This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

3 3433 06910409 3

OHF
Ohm

Lehrbuch

der

gesammten höhern Mathematik

in zwei Bänden.

Zum Gebrauche für die oberen Klassen der Gymnasien und anderen höheren Lehr-Anstalten, so wie zum Selbstunterrichte

bearbeitet

und mit vielen Uebungs-Beispielen versehen

vom

Professor Dr. Martin Ohm,

an der Königl. Friedrich-Wilhelms-Universität, an der Königl. Allgemeinen Kriegsschule, so wie auch an der Königl. vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule zu Berlin; der Kaiserl. Russischen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München, und mehrerer anderen gelehrten Gesellschaften correspond. Mitglied.

Zweiter Band,

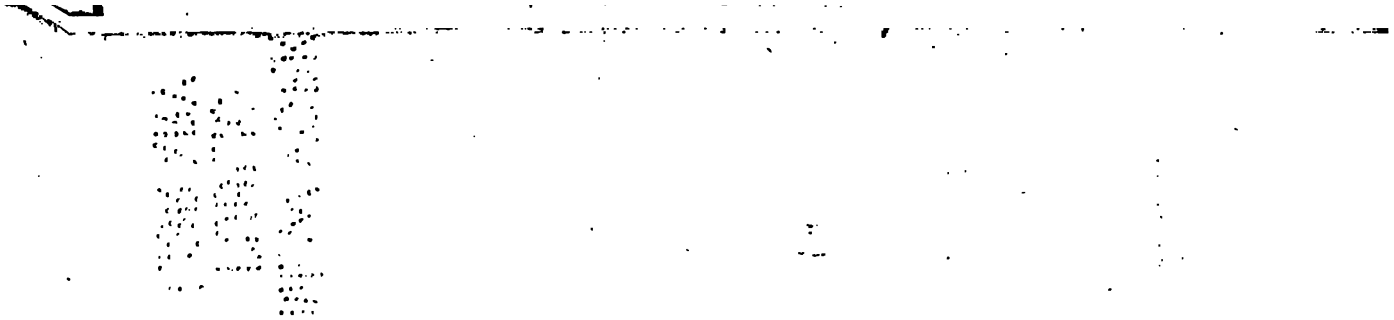
die Integral-Rechnung, die Variations-Rechnung, die endliche Summen- und Differenzen-Rechnung und deren Anwendungen auf Geometrie und Analysis enthaltend.

Jeder Band mit einer Figurentafel.

Leipzig 1839.

Bei Friedrich Volckmar.

NEW-YORK



Vorrede.

Der Verfaſſer benutzt dieſe Gelegenheit, um nachträglich noch auf die Auflöſungs-Methode der numeriſchen höhern Gleichungen aufmerkſam zu machen, welche Profeſſor Gräffe in Zürich in ſeiner Schrift: „Die Auflöſung der höhern numeriſchen Gleichungen. Zürich 1837.“ mitgetheilt hat, und welche man in dem „Berliner aſtronomiſchen Jahrbuche für 1841“ von Encke noch verbeſſert vorfindet. Sie gründet ſich darauf, daß wenn α, β, γ, δ, ε, etc. etc. die geſuchten Wurzel-Werthe der gegebenen Gleichung vorſtellen, und eine neue Gleichung gebildet wird, deren Koefficienten der Reihe nach durch $-A, B, -C, D, -E, F$, etc. etc. ausgedrückt ſeyn mögen, und deren Wurzel-Werthe bezüglich α^m, β^m, γ^m, δ^m, ε^m, etc. etc. ſind, dann (wenn alle Wurzel-Werthe α, β, γ, δ, ε, etc. etc. reell und der Größe nach geordnet ſind, ſo daß α die größeſte iſt),

$$\alpha = \sqrt[m]{A},\ \beta = \sqrt[m]{\frac{B}{A}},\ \gamma = \sqrt[m]{\frac{C}{B}},\ \delta = \sqrt[m]{\frac{D}{C}},\ \text{etc. etc.}$$

deſto näher ſeyn wird, je größer m iſt. — Aehnliches findet ſtatt, wenn einige oder alle Wurzel-Werthe imaginär ſeyn ſollten. — Dieſe Methode hat den großen

Vorzug a) daß ſie die reellen Wurzel-Werthe direkt findet, und b) daß ſie, nach dem von Encke hinzugefügten Verfahren, unter den bis jetzt bekannten Wegen, die imaginären Wurzel-Werthe zu finden, bei weitem den beſten und ausführbarſten geliefert hat. — Solche hier näher zu beſchreiben, kann jedoch nicht in dem Plane eines ſo kurz gefaßten Werkes liegen, weshalb wir uns damit begnügen, auf ſelbige aufmerkſam gemacht zu haben, um ſo mehr, als die im erſten Bande mitgetheilte verbeſſerte Newton'ſche Näherungs-Methode ihre anderweitigen Vorzüge hat, ſo lange die imaginären Wurzel-Werthe nicht verlangt werden.

Berlin, im Auguſt 1839.

M. Ohm.

Inhalt des zweiten Bandes.

V. Höhere Analyſis. Zweite Abtheilung. Integral-Rechnung.

Seite.

Erſtes Kapitel. Integration entwickelt gegebener Funktionen eines einzigen Veränderlichen. . . . 3

§. 1. Begriff des Integrals $\int y \cdot dx$. 3

§. 2. Die Maclaurin'ſche Reihe giebt eine allgemeine Integral-Formel. 3

§. 3. Allgemeines, — beſonderes Integral. 5

§. 4. Die vier allgemeinen Hauptformeln für das Integriren. . . 5

§. 5. Zwölf einfachſte Integrale. 7

§. 6. Noch fünfzehn zuſammengeſetztere Integrale, aus dieſen einfachern gebildet. 8

§. 7. Integration der algebraiſchen rationalen ganzen Funktionen. . 14

§. 8. Integration der algebraiſchen rationalen gebrochenen Funktionen. 14

§. 9. Zerlegung der ächt gebrochenen Funktionen in ihre Partial-Brüche. 16

§. 10. Zerlegung einer gebrochenen Funktion in ihre doppelten Partial-Brüche. 22

§. 11. Direkte Integration der doppelten Partial-Brüche. . . . 24

§. 12. Integration der irrationalen Funktionen I. $\sqrt{a+bx}$, II. $\sqrt{a+bx+cx^2}$, III. $\sqrt{a+bx}$ und $\sqrt{p+qx}$. IV. Ellipt. Tranſcendenten. 31

§. 13. Reduktionsformeln für ſolche Integrale, welche $\sqrt{a+bx+cx^2}$ enthalten. 40

§. 14. Integration des irrationalen Binomiums $x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} \cdot dx$ oder $(ax+b)^m(px+q)^n \cdot dx$. 42

§. 15. Integration einiger logarithmiſchen Funktionen. 51

§. 16. Integration einiger Exponential-Funktionen. 54

§. 17. Integration von trigonometriſchen Funktionen. 57

§. 18. Integration durch unendliche Reihen. 66

Seite.

Zweites Kapitel. Eigenschaften der besondern und bestimmten Integrale. 73

§. 19. Mit x = a anfangendes; mit x = b aufhörendes; bestimmtes Integral. 73

§. 20. $\int_{b-a} y \cdot dx$ ist die Summe aller Differentialien von x = a an bis x = b hin. 77

§. 21. Formeln zur Näherungs-Berechnung bestimmter Integrale. . 79

§. 22. Die Formeln des §. 4. für Integrale, die mit x = a anfangen. 81

§. 23. In wie fern die Ordnung des Differenziirens und Integrirens vertauscht werden kann. 83

§. 24. Noch fünf allgemeine Sätze über bestimmte Integrale. . . 84

§. 25. Der Taylor'sche und Maclaurin'sche Lehrsatz nebst den Grenzen, zwischen denen das Ergänzungs-Glied liegen muß, wenn die Reihen irgend wo abbrechen. 86

§. 26. Näherungs-Berechnung eines bestimmten Integrals mit Bestimmung der Grenzen des Fehlers. 89

VI. Zweite Reihe der Anwendungen der höhern Analysis.

Drittes Kapitel. Rektifikation der Kurven überhaupt, und Quadratur der ebenen Kurven. . . . 93

§. 27. Quadratur ebener Kurven mittelst rechtwinklicher Koordinaten. 93

§. 28. Quadratur ebener Kurven mittelst Polar-Koordinaten. . . . 106

§. 29. Rektifikation der ebenen Kurven und auch der Kurven doppelter Krümmung. 108

§. 30. Wie durch Rektifikation des Kreises bewiesen wird, daß die Werthe der allgemeinen Sinus und Kosinus-Reihen, die, unter denselben Namen geschichtlich bekannten Linien im Kreise ausdrücken, dessen Radius 1 ist. 111

§. 31. Quadratur, Rektifikation, auch sonstige Eigenschaften der Cykloide. 115

Viertes Kapitel. Kubatur der Körper und Quadratur ihrer Oberflächen §§. 32. 33. 120

§. 32. Kubatur der Körper. 120

§. 33. Quadratur ihrer Oberflächen. 128

VII. Höhere Analysis. Dritte Abtheilung. Fortsetzung der Integral-Rechnung.

Fünftes Kapitel. Von der Integration der Differential-Funktionen und der totalen Differential-Gleichungen, vorzüglich mit zwei Veränderlichen. . 133

§. 34. Differential-Funktion, Differential-Gleichung definirt. . . . 133

§. 35. Integral einer Differential-Funktion definirt. 134

Seite.

§. 36. Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität. I. Bei $M+N\cdot\delta y_x$. II. Bei $M+N\cdot\delta y_x+P\cdot\delta z_x$. 137

§. 37. Integral einer Differential-Gleichung definirt. 141

§. 38. Jede Differential-Gleichung der n^{ten} Ordnung hat n erste Integrale, und ein Ur-Integral mit n willkührlichen Conſtanten, mit Ausnahme der ſingulären Werthe. 142

§. 39. Integration einer jeden Gleichung der n^{ten} Ordnung mittelſt des Maclaurin'ſchen Lehrſatzes. 144

§. 40. Integrations-Methoden für Differential-Gleichungen der erſten Ordnung zwiſchen zwei Veränderlichen x und y. I. Direkte Integration. II. Methode des integrirenden Faktors. III. Trennung der Veränderlichen. IV. Einführung neuer Veränderlichen. V. Einen neuen Veränderlichen p dadurch eingeführt, daß man $\delta y_x = p$ ſetzt. 145

§. 41. Integration der Differential-Gleichungen der zweiten und höhern Ordnungen zwiſchen zwei Veränderlichen (in endlicher Form). 161

§. 42. Integration der lineären Gleichungen aller Ordnungen. . . 170

§. 43. Integration zweier oder mehrerer gleichzeitig gegebener (totaler) Differential-Gleichungen. 179

§. 44. Die d'Alembert'ſche Methode zur Integration mehrerer gleichzeitig gegebener (totaler) lineären Differential-Gleichungen. . 186

§. 45. Von den ſingulären Werthen. 190

§. 46. Integration durch unendliche Reihen. 197

§. 47. Ueber die Beſtimmung der Conſtanten in den verſchiedenen Anwendungen der gefundenen Integrale. 200

Sechſtes Kapitel. Von der Integration der Gleichungen zwiſchen drei und mehr Veränderlichen, ſowohl der totalen als auch der Partial-Gleichungen. 202

Erſter Abſchnitt. Integration der totalen Gleichungen. . . . 202

§. 48. Integration der Gleichung $P\cdot\delta x+Q\cdot\delta y+R\cdot\delta z=0$. Bedingungs-Gleichung ihrer Integrabilität und der Exiſtenz eines integrirenden Faktors und eines Integrals. 202

§. 49. Wenn ſie kein Integral hat, ſo kann man zwei Ur-Gleichungen mit einer willkührlichen Funktion finden, welche ihr genügen. 206

Zweiter Abſchnitt. Integration der Partial-Gleichungen. . 207

§. 50. Integration der lineären Partial-Gleichungen der erſten Ordnung. 207

§. 51. Integration der nicht lineären Partial-Gleichungen der erſten Ordnung. 211

§. 52. Allgemeine Betrachtungen über die Partial-Gleichungen der erſten Ordnung. 216

§. 53. Ueber die Integrale der Partial-Gleichungen der zweiten Ordnung in endlicher Form. 218

Seite.
§. 54. Fortsetzung. Beispiele der Integration. 220
§. 55. Integration mittelst unendlicher Reihen. 225
Siebentes Kapitel. Geometrische Aufgaben. . . 231
§. 56. Aufgaben, welche zu totalen Differential-Gleichungen führen. 231
§. 57. Aufgaben, welche zu Partial-Differential-Gleichungen führen. 250
Achtes Kapitel. Noch einiges über bestimmte Integrale; als Fortsetzung des zweiten Kapitels. . . 262
§. 58—§. 63. Methoden zur Auswerthung von Integralen zwischen völlig bestimmten in Ziffern-Werthen gegebenen Grenzen, 0 und ∞, oder −∞ und +∞, oder 0 und 1, oder 0 und ½π; u. s. f. 262

VIII. Höhere Analysis. Vierte Abtheilung. Die Variationsrechnung und die allgemeinste Lehre vom Größten und Kleinsten.

Neuntes Kapitel. Ganz allgemeine Methode zur Entwickelung in Reihen. 289
Erster Abschnitt. Entwickelung der Polynomial-Funktionen in Reihen. 289
§. 64. Erklärung der Bezeichnung. 290
§. 65. Es ist $\delta^a \mathfrak{d}^n = \mathfrak{d}^n \delta^a$ und $\delta^a f = f \delta^a$. 291
§. 66. Erste Haupt-Aufgabe, wo $V_x = V_{a_x}$. 292
§. 67. Zweite Haupt-Aufgabe, wo $V_x = V_{a_x, b_x}$. 295
§. 68. Wenn $V_{a_x, b_x} = 0$ ist. 296
§. 69. Wenn $V_x = V_{a_x, b_x}$ und noch $\varphi_{a_x, b_x} = 0$ ist. . . . 297
§. 70. Die Umkehrung der Reihen. 298
§. 71. Wenn $V_x = V_{b_x}$ und noch $\varphi_{a_x, b_x} = 0$ ist. 299
§. 72. Dritter Haupt-Lehrsatz, wo $V_x = V_{a_x, b_x, c_x}$ ist. . . . 300
§. 73. Wenn $V = 0$ ist, oder wenn $V = 0$ und noch $W = 0$ ist. 301
§. 74. Wenn in der Aufgabe des §. 72.) noch $\varphi_{a_x, b_x, c_x} = 0$, oder noch $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ seyn sollte. 301
§. 75. Allgemeinere Haupt-Aufgabe, wenn V eine Funktion von beliebig viel solchen Reihen a_x, b_x, c_x, etc. ist. 302
§. 76. Noch allgemeinere Haupt-Aufgabe, wo $V_x = V_{a_x, b_x, y_x, z_x}$ und die Koefficienten von y_x, z_x, etc. selbst noch Funktionen von a_x, b_x werden. 304
§. 77. Besonderer Fall hiervon, wenn nur a_x allein, und nicht noch b_x vorkommt. 309

Seite.

Zweiter Abſchnitt. Variations-Rechnung. 311

§. 78. Erklärung der n^{ten} Variationen und der Total-Variation. . 311

§. 79. Praktiſche Regel für die Entwickelung der Variationen. . . 312

Zehntes Kapitel. Die allgemeinſte Lehre vom Größten und Kleinſten. 315

§. 80. Allgemeinſte Aufgabe. 315

§. 81. Aufgaben, in denen die Funktion V eine Ur-Funktion oder eine Differential-Funktion iſt. 318

§. 82. Wenn $V_x = \int_{b+a} U_x \cdot dx$ iſt. 324

§. 83. Wenn $V_x = \int_{b_x+a_x} U_x \cdot dx$ iſt. 330

§. 84. Wenn $V = \int U \cdot dx$, und U außer x noch y, z, etc. etc. enthält, und zwiſchen y und z, etc., noch eine (oder einige) Gleichung(en) gegeben ſeyn ſollte. 333

IX. Höhere Analyſis. Fünfte Abtheilung. Von den Differenz- und Summen-Reihen. Vom endlichen Differenziiren und vom endlichen Integriren. Von der Interpolation und von der Summation der Reihen. Von den Fourier'ſchen Reihen.

Eilftes Kapitel. Von den Differenz- und Summen-Reihen, namentlich von dem Verhalten ihrer Glieder zu einander im Allgemeinen. 343

§. 85. Erklärung der Differenz-Reihen. 343

§. 86. Bezeichnung ihrer Glieder. 344

§. 87. Erklärung der Summen-Reihen. 345

§. 88. Folgerungen. N. 6. Die Summe von n Gliedern irgend einer Reihe iſt gleich der Differenz zwiſchen zweien, um eine Anzahl n von einander entfernten Gliedern der nächſten Summen-Reihe. 346

§§. 89. 90. Algorithmus zur einfachen und bequemen Bildung der Gleichungen zwiſchen den Gliedern der verſchiedenen Reihen. . 349

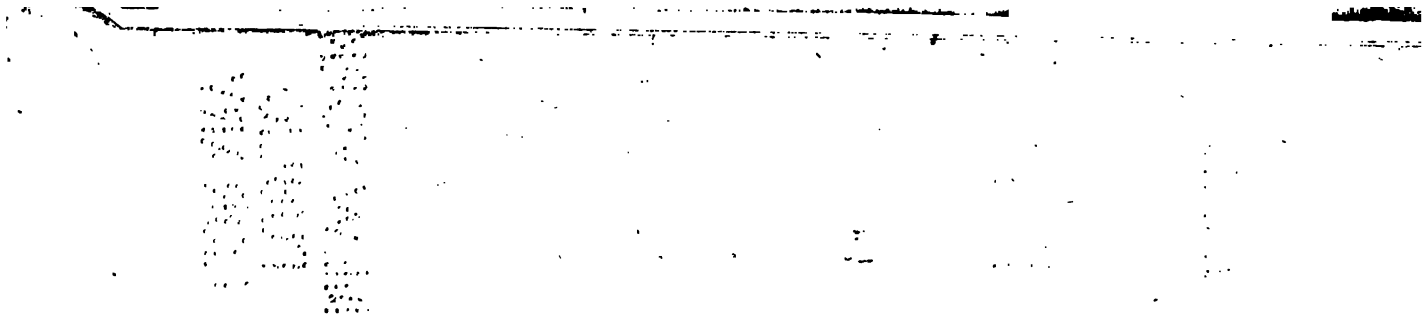
§. 91. Anwendungen dieſes Algorithmus; I. $u_{r+n} = (1+\Delta)^n \cdot u_r$; II. $\Delta^n u_r = (u_1 - 1)^n \cdot u_r$; III. $u_{r-n} = (1+\Delta u_{-1})^n \cdot u_r$. . 352

§. 92. Dieſelben Formeln, wenn n negativ iſt. 356

§. 93. Arithmetiſche Reihen der höhern Ordnung. 359

Anmerkung. Wenn ſich eine Reihe einer arithmetiſchen Reihe höherer Ordnung nähert. 361

§. 94. — §. 97. Vergleichungen zweier Schemen von Ur- und Differenz- und Summen-Reihen mit einander, wenn die eine Ur-Reihe aus gleichweit von einander entfernten Gliedern der andern beſteht. 362



Vorrede.

Der Verfaſſer benutzt dieſe Gelegenheit, um nachträglich noch auf die Auflöſungs-Methode der numeriſchen höhern Gleichungen aufmerkſam zu machen, welche Profeſſor Gräffe in Zürich in ſeiner Schrift: „Die Auflöſung der höhern numeriſchen Gleichungen. Zürich 1837.“ mitgetheilt hat, und welche man in dem „Berliner aſtronomiſchen Jahrbuche für 1841“ von Encke noch verbeſſert vorfindet. Sie gründet ſich darauf, daß wenn α, β, γ, δ, ε, etc. etc. die geſuchten Wurzel-Werthe der gegebenen Gleichung vorſtellen, und eine neue Gleichung gebildet wird, deren Koefficienten der Reihe nach durch — A, B, — C, D, — E, F, etc. etc. ausgedrückt ſeyn mögen, und deren Wurzel-Werthe bezüglich α^{m}, β^{m}, γ^{m}, δ^{m}, ε^{m}, etc. etc. ſind, dann (wenn alle Wurzel-Werthe α, β, γ, δ, ε, etc. etc. reell und der Größe nach geordnet ſind, ſo daß α die größeſte iſt),

$$\alpha = \sqrt[m]{A},\ \beta = \sqrt[m]{\frac{B}{A}},\ \gamma = \sqrt[m]{\frac{C}{B}},\ \delta = \sqrt[m]{\frac{D}{C}},\ \text{etc. etc.}$$

deſto näher ſeyn wird, je größer m iſt. — Aehnliches findet ſtatt, wenn einige oder alle Wurzel-Werthe imaginär ſeyn ſollten. — Dieſe Methode hat den großen

Seite.

zwischen der Summe S_{x+1} der ersten x Glieder und der Summe S_x der ersten $x-1$ Glieder. Also ist $S_x = \Sigma_1 f_x + const.$. 439

§. 137. Hat man die Summe von n Gliedern einer Reihe gefunden, so setze man $n = \infty$, und man hat sogleich die Summe der unendlichen Reihe, wenn nur letztere convergent ist. . 442

Vierzehntes Kapitel. Ueber Summation allgemeiner und numerischer unendlichen Reihen, namentlich solcher die nach Sinus und Kosinus der vielfachen Bogen fortlaufen. 443

§. 138. Begriff der Summation einer allgemeinen unendlichen Reihe. 443

§. 139. Wie die Summe einer unendlichen, nach Kosinus oder Sinus der vielfachen Bogen fortlaufenden Reihe gefunden wird. . 445

§. 140. Einige Beispiele von Summation solcher Reihen, nach den vorgegebenen Methoden. 446

§§. 141. 142. Solche Beispiele, wo die Summe der gegebenen Reihe durch Differentiation oder Integration anderer summirten Reihen gefunden wird. 452

Fünfzehntes Kapitel. Von der Entwickelung beliebig gegebener Funktionen in Reihen, die nach den Sinus und Kosinus der vielfachen Bogen fortlaufen. (Fourier's Reihen.) 461

§. 143. Man kann zwischen $x = a$ und $x = b$ unendlich viele Werthe interpoliren. 461

§. 144. Eine Sinus-Reihe von $n-1$ Gliedern gefunden, welche mit $n-1$ Werthen einer Funktion u_x, die von $x = 0$ an bis $x = \pi$ hin genommen sind, zusammenfallen. 462

§. 145. Der Uebergang, wenn $n = \infty$ gedacht wird. 466

§. 146. Auffindung einer unendlichen Kosinus-Reihe, welche dieselbe Eigenschaft hat, d. h. welche mit einer Funktion u_x, von $x = 0$ an bis $x = \pi$ hin alle Werthe gemein hat. 468

§. 147. Verallgemeinerung dieser Formeln, so daß die Reihen mit u_x alle Werthe gemein haben von $x = -\pi$ an bis zu $x = \pi$ hin. 471

§§. 148. 149. Beweis der Convergenz dieser Reihen. 473

§§. 150. 151. Umformung dieser Reihen, so daß die neuen Reihen mit einer Funktion u_x alle Werthe gemein haben, von $x = -a$ an bis zu $x = +a$ hin, oder von $x = 0$ an bis zu $x = +a$ hin. 476

V.

Höhere Analysis.

Zweite Abtheilung.

Integral-Rechnung.

Erſtes Kapitel.

Integration entwickelt gegebener Funktionen eines einzigen Veränderlichen.

§. 1.

Wenn y_x eine gegebene Funktion von x iſt, und nun eine Funktion ψ_x geſucht wird, ſo daß

$$\partial\psi_x = y_x \quad \text{oder} \quad d\psi = y_x \cdot dx$$

iſt, ſo ſagt man: „es werde y nach x integrirt"; und die Funktion ψ_x nennt man das Integral von y nach x, und bezeichnet ſie durch

$$\int y_x \cdot dx \quad \text{oder} \quad \int y \cdot dx.$$

Iſt alſo

1) $\psi_x = \int y \cdot dx$, ſo iſt 2) $\partial\psi_x = y$;

d. h. es iſt

I. $\partial(\int y \cdot dx)_x = y$ und II. $\psi_x = \int(\partial\psi_x) \cdot dx$.

§. 2.

Iſt

$$\psi_x = \int y \cdot dx,$$

ſo iſt

$\partial\psi_x = y$, $\partial^2\psi_x = \partial y_x$, $\partial^3\psi_x = \partial^2 y_x$ und $\partial^n\psi_x = \partial^{n-1} y_x$.

Daher giebt der Maclaurin'ſche Lehrſatz (I. Bd. §. 156.), wenn man C ſtatt ψ_0 ſchreibt, augenblicklich

1) $$\psi_x = C + y_0 \cdot x + \partial y_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + \partial^2 y_0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Umgekehrt: wenn man C ganz willkührlich sich denkt, aber (nach x) constant, so giebt diese Gleichung 1.), indem sie nach x abgeleitet wird,

$$2) \qquad \partial\psi_x = y_0 + \partial y_0 \cdot x + \partial^2 y_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + \cdots,$$

d. h.

$$3) \qquad \partial\psi_x = y_x,$$

in so fern in 2.) die Reihe zur Rechten (nach I. Bd. §. 156.) genau die Funktion y_x ist.

Man findet also

$$(\odot) \cdots \quad \int y \cdot dx = C + y_0 \cdot x + \partial y_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + \partial^2 y_0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

wo C eine ganz unbestimmte, willkührliche Constante (nach x) vorstellt.

Weil aber y_0, oder ∂y_0, $\partial^2 y_0$, etc. etc. die Form $\frac{1}{0}$ annehmen können, in Ausnahmsfällen, so wird man lieber den allgemeinern Maclaurin'schen Lehrsatz (I. Bd. §. 156.) anwenden und dann genau durch dasselbe Verfahren erhalten

$$(\mathfrak{D}) \cdots \quad \int y \cdot dx$$
$$= C + y_\alpha \cdot (x - \alpha) + \partial y_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \partial^2 y_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^3}{3!} + \cdots,$$

während auch hier wieder C ganz willkührlich und unbestimmt bleibt, aber (nach x) constant.

Diese Formeln ($\odot$) und ($\mathfrak{D}$) geben sogleich jedes verlangte Integral einer jeden gegebenen Funktion y_x, entweder nach Potenzen von x, oder nach Potenzen von $x - \alpha$ entwickelt, also in der Regel in Form einer unendlichen Reihe, obgleich auch in besonderen Fällen die Glieder dieser Reihe abbrechen können, so daß sie selbst eine endliche Reihe wird *).

Wir lernen aber daraus, daß jedes Integral $\int y \cdot dx$ eine

*) Dies ist dann gewiß der Fall, wenn y_x eine ganze Funktion von x ist, weil dann eine der Ableitungen und alle folgenden für jedes x der Null gleich werden.

unbestimmte Constante C in sich aufnimmt; daß es also eigentlich von jeder Funktion y von x, unendlich viele, um die verschiedenen Werthe der Constante C von einander verschiedene Integrale nach x, giebt*).

§. 3.

Das Integral, welches die unbestimmte Constante C in sich aufgenommen hat, wird das allgemeine Integral genannt. — Jedes Integral dagegen, welches keine solche unbestimmte Constante enthält, welches aber allemal aus dem allgemeinen Integral dadurch hervorgehen muß, daß der unbestimmten Constante C ein bestimmter Werth beigelegt wird, wird ein besonderes Integral genannt.

Hat man aber irgend ein besonderes Integral, so darf man zu selbigem nur noch eine völlig unbestimmte Constante C addiren, und man hat sogleich das allgemeine Integral.

§. 4.

Man kann nicht jede gegebene Funktion y_x in endlicher Form integriren. Wo man es aber durchsetzen kann, da geschieht es mittelst der nachstehenden Formeln:

1) $\int A\varphi_x \cdot dx = A \cdot \int \varphi_x \cdot dx;$

2) $\int (\varphi_x \pm \psi_x) \cdot dx = \int \varphi \cdot dx \pm \int \psi \cdot dx;$

3) $\int (\varphi_x \cdot \psi_x) \cdot dx = \varphi \cdot \int \psi \cdot dx - \int (\partial \varphi_x \cdot \int \psi \cdot dx) \cdot dx,$

in welcher Gleichung das zur Rechten zweimal vorkommende Zeichen $\int \psi \cdot dx$ jedesmal ein und dasselbe besondere, übrigens beliebige Integral von ψ nach x vorstellt; — endlich

4) $\int \varphi_x \cdot dx = \int (\varphi \cdot \partial x_z) \cdot dz,$

wenn φ_x ohne z ist und wenn man rechts statt x eine ganz

*) In der That bekommt man jedesmal ein und dasselbe, ob man die Ableitungen von f_x, oder von $f_x + C$ nach x nimmt, weil $\partial(C)_x = 0$ ist (nach I. Bd. §. 150. B. 9.).

beliebige Funktion von z ſetzt, ſo daß in $\varphi \cdot \delta x_z$ durchaus kein mehr vorkommt, und dann das ganze Produkt $\varphi \cdot \delta x_z$ nach z integri

Man erhält dieſe Formeln 1.) und 2.), wenn man die Formeln I. Bd. §. 150. B. 4. und 1.) gerade umgekehrt.

Die Formel 3.) ergiebt ſich auch aus I. Bd. §. 150. B. 2.). Es nämlich nach letzterer

1') $$\delta(yz)_x = z \cdot \delta y_x + y \cdot \delta z_x,$$

alſo

2') $$z \cdot \delta y_x = \delta(yz)_x - y \cdot \delta z_x,$$

oder, wenn man hier φ_x ſtatt z, und ψ_x ſtatt δy_x ſetzt, ſo daß $\psi_x = \delta y_x$ noch $\int \psi \cdot dx = y_x$ hervorgeht,

3') $$\varphi \cdot \psi = \delta(\varphi \cdot \int \psi \cdot dx) - \delta\varphi_x \cdot \int \psi \cdot dx.$$

Und nimmt man hier links und rechts das Integral nach allem x, ſo det ſich die obige 3.) unmittelbar *).

Die Formel 4.) endlich geht aus I. Bd. §. 150. B. I.) hervor, ind man ſie umkehrt. Iſt nämlich

$$\int \varphi \cdot dx = y, \quad \text{ſo iſt} \quad \varphi = \delta y_x;$$

allein nach der gedachten Formel iſt

$$\delta y_z = \delta y_x \cdot \delta x_z = \varphi \cdot \delta x_z;$$

alſo iſt auch $$y = \int (\varphi \cdot \delta x_z) \cdot dz.$$

Dieſelbe Funktion y alſo, welche $= \int \varphi \cdot dx$ iſt, iſt zu gleicher Zeit a $= \int (\varphi \cdot \delta x_z) \cdot dz$.

Wendet man die Formel 1.) an, ſo ſagt man: bei Integriren (nach x) wird jeder (nach x) conſtante F tor herausgeſetzt, und bloß der veränderliche (d. von x abhängige) Faktor integrirt.

Wendet man die Formel 2.) an, ſo ſagt man: ei

*) Es muß zwar, wenn

$$f_x = \varkappa_x$$

iſt, nicht nothwendig

$$\int f_x \cdot dx = \int \varkappa_x \cdot dx,$$

ſeyn, ſondern es können dieſe beiden Integrale $\int f \cdot dx$ und $\int \varkappa \cdot dx$ eine Conſtante von einander verſchieden ſeyn. — Weil aber in jedem gezeigten Integral immer noch eine willkührliche Conſtante mit begri iſt, ſo iſt das obige Verfahren richtig und überzeugend.

Reihe von Gliedern wird integrirt, wenn man nach und nach jedes einzelne Glied integrirt *).

Die Anwendung der Formel 3.) nennt man das theilweise Integriren (l'intégration par parties).

Und wird die Formel 4.) benutzt, so sagt man: es werde durch Substitution integrirt.

Anmerkung 1. Wendet man die Formel 4.) auf die Formel 3.) an, so kann letztere, wie aus der 2'.) hervorgeht, auch diese Form annehmen

1) $$\int z \cdot dy = zy - \int y \cdot dz,$$

in so fern sie vorher diese Form hatte

2) $$\int (z \cdot \partial y_x) \cdot dx = zy - \int (y \cdot \partial z_x) \cdot dx.$$

Sind nämlich y und z Funktionen von x, so ist auch z als eine Funktion von y herzustellen, also dann z nach y zu integriren; während aber auch y als eine Funktion von z hergestellt gedacht, also dann auch y nach z integrirt werden kann.

Anmerkung 2. Für die bequemere Anwendbarkeit der Formel 4.) ist zu bemerken, daß

$$dx = \partial x_z \cdot dz$$

ist, und daß man aus $\varphi \cdot dx$ in 4.) zur Linken, sogleich das $(\varphi \cdot \partial x_z) \cdot dz$ zur Rechten bekommt, wenn man von x als Funktion von z das Differential dx nimmt, und diesen Ausdruck $\partial x_z \cdot dz$ statt des Faktors dx substituirt.

§. 5.

Aber eben weil man nur diese vier allgemeineren Integralformeln hat, so thut man wohl, die einfacheren Integrale zunächst dadurch sich zu verschaffen, daß man die einfacheren Ableitungs-Resultate der §§. 150. und 151. des I. Bd. bloß umkehrt. Dadurch erhält man namentlich sogleich:

*) Eine Funktion y_x kann daher integrirt werden, sobald sie in eine solche Reihe einzelner und in endlicher Form integrirbarer Glieder zerlegt werden kann.

1) $\int x^m \cdot dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$; 2) $\int \frac{1}{x} \cdot dx = log\, x$;

3) $\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{log\, a}$; 4) $\int e^x \cdot dx = e^x$;

5) $\int sin\, x \cdot dx = -cos\, x$; 6) $\int cos\, x \cdot dx = sin\, x$;

7) $\int \frac{1}{cos\, x^2} \cdot dx = tg\, x$; 8) $\int \frac{1}{sin\, x^2} \cdot dx = -cotg\, x$

9) $\int \frac{sin\, x}{cos\, x^2} \cdot dx = sec\, x$; 10) $\int \frac{cos\, x}{sin\, x^2} \cdot dx = -cosec$

11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \frac{1}{sin} x$, auch $= -\frac{1}{cos} x$;

12) $\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \frac{1}{tg} x$, auch $= -\frac{1}{cotg} x$*) $= -\frac{1}{tg}$

§. 6.

Mittelst dieser Integrale kann man wieder viele andere ähnliche Integrale finden, z. B.

$$\int a^{px} \cdot dx, \quad \int sin\, px \cdot dx, \quad \int \frac{1}{px+q} \cdot dx,$$

u. s. w.; indem man $px+q=z$ setzt (es mag $q=0$ o

*) In den NN. 11.) und 12.) ist die zweite Form des Integr von der erstern allemal um die Constante $\frac{1}{2}\pi$ verschieden. Ist näml $\frac{1}{sin} x = z$, also $sin\, z = x$, so ist auch $cos(\frac{1}{2}\pi - z) = x$, d.

$$\tfrac{1}{2}\pi - z = \frac{1}{cos} x,$$

folglich

$$-\frac{1}{cos} x = -\tfrac{1}{2}\pi + z = -\tfrac{1}{2}\pi + \frac{1}{sin} x.$$

Und ist $\frac{1}{tg} x = u$, so ist $tg\, u = x$, also auch $cotg(\frac{1}{2}\pi - u) =$

d. h.

$$\frac{1}{cotg} x = \tfrac{1}{2}\pi - u$$

und

$$-\frac{1}{cotg} x = -\tfrac{1}{2}\pi + u = -\tfrac{1}{2}\pi + \frac{1}{tg} x.$$

nicht $= 0$ seyn), daraus $x = \frac{1}{p}z - \frac{q}{p}$, und $dx = \frac{1}{p} \cdot dz$ findet, und nun durch Substitution, d. h. nach der Formel §. 4. N. 4.) integrirt. — Auf diesem Wege erhält man noch

13) $$\int (px+q)^m \cdot dx = \frac{1}{p(m+1)} \cdot (px+q)^{m+1};$$

14) $$\int \frac{1}{px+q} \cdot dx = \frac{1}{p} \cdot log(px+q);$$

15) $$\int a^{px+q} \cdot dx = \frac{1}{p \cdot log\, a} \cdot a^{px+q};$$

16) $$\int sin(px+q) \cdot dx = -\frac{1}{p} \cdot cos(px+q);$$

17) $$\int cos(px+q) \cdot dx = \frac{1}{p} \cdot sin(px+q)\ ^*).$$

Zuweilen muß man die zu integrirende Funktion vorher erst ein wenig umformen, damit ihr Integral nach der vorstehenden Weise ebenfalls auf eines der einfachern und bekannten Integrale (des §. 5.) zurückgebracht werden könne. — Hat man z. B. $\frac{1}{\sqrt{b-cx^2}} \cdot dx$, oder $\frac{1}{b+cx^2} \cdot dx$ zu integriren, so kann man versuchen sie auf die (aus §. 5. N. N. 11. und 12.) be-

*) Ist überhaupt irgend einmal $\int f_x \cdot dx = \psi_x$ gefunden, so ist allemal sogleich $\int f_{px+q} \cdot dx = \frac{1}{p} \cdot \psi_{px+q}$, wie auf demselben Wege der Substitution in die Augen fällt. — Aber dann ist auch noch

$$\int x \cdot f_{px^2+q} \cdot dx = \frac{1}{2p} \cdot \psi_{px^2+q},$$

wie sich findet, wenn man $px^2+q = z$ setzt, so daß sich $2px \cdot dx = dz$ ergiebt. —

Aber eben so ist dann auch noch

$$\int x^{n-1} \cdot f_{px^n+q} \cdot dx = \frac{1}{np} \cdot \Phi_{px^n+q};$$

und zwar ergiebt sich dieses Resultat sogleich, wenn man $px^n+q = z$ setzt, so daß $npx^{n-1} \cdot dx = dz$ wird, und dann die Formel §. 4. N. 4.) anwendet.

kannten Integrale von $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx$ und $\frac{1}{1+x^2}\cdot dx$ zurückzuführen. — Da muß man denn von $b\mp cx^2$, den Faktor b herausſetzen, alſo, indem man $\frac{c}{b}=p^2$, d. h. $p=\sqrt{\frac{c}{b}}$ nimmt, $b(1\mp p^2x^2)$ ſtatt $b\mp cx^2$ ſchreiben, dann $px=z$ ſetzen, ſo daß $p\cdot dx=dz$ wird; und man erhält dann

$$\int\frac{1}{\sqrt{b-cx^2}}\cdot dx=\frac{1}{\sqrt{b}}\int\frac{1}{\sqrt{1-p^2x^2}}\cdot dx=\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{p}\int\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\cdot dz$$

und

$$\int\frac{1}{b+cx^2}\cdot dx=\frac{1}{b}\int\frac{1}{1+p^2x^2}\cdot dx=\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{p}\int\frac{1}{1+z^2}\cdot dz.$$

Auf dieſe Weiſe erhält man (aus §. 5. N. N. 11. und 12.)

18) $$\int\frac{1}{\sqrt{b-cx^2}}\cdot dx=\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{sin}x\sqrt{\frac{c}{b}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{tg}\frac{x\sqrt{c}}{\sqrt{b-cx^2}}$$ *);

auch $$=-\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{cos}x\sqrt{\frac{c}{b}}$$ **);

---

*) Iſt nämlich $x\sqrt{\frac{c}{b}}$ der Sinus eines Bogens, ſo iſt die Tangente deſſelben Bogens $=\frac{sin}{\sqrt{1-sin^2}}$ d. h. $=\frac{x\sqrt{c}}{\sqrt{b-cx^2}}$.

**) Man muß nur nicht überſehen, daß wenn von einer und derſelben Funktion zwei oder mehr Integrale angegeben ſind, ſolche nicht nothwendig einander gleich ſeyn müſſen, ſondern um eine Conſtante von einander verſchieden ſeyn können. So findet man z. B. für $\int\frac{1}{x}\cdot dx$ ſowohl $log\,x$, als auch $log(ax)$, $log(-bx)$, alſo auch $log(\frac{1}{2}x)$, $log(-2x)$ u. ſ. f. — Alle dieſe Integrale ſind einander nicht gleich, aber ſie ſind alle von einander nur um eine Conſtante verſchieden; z. B. es iſt $log\,ax-log(-bx)=log\left(\frac{ax}{-bx}\right)=log\left(-\frac{a}{b}\right)$. — Oder es iſt $log(ax)=log\,x+log\,a$; $log(-bx)=log\,x+log(-b)$; eben ſo iſt $log(-x)=log\,x+log(-1)$; u. ſ. w. Und alle dieſe Integrale ſind im allgemeinen Integral $log\,x+C$ enthalten.

Hier oben (in 18.) ergiebt ſich die zweite Form des Integrals, wenn

und

19) $\int \frac{1}{b+cx^2}\cdot dx = \frac{1}{\sqrt{(bc)}}\cdot\frac{1}{tg}\,x\sqrt{\frac{c}{b}} = \frac{1}{\sqrt{(bc)}}\cdot\frac{1}{sin}\,\frac{x\sqrt{c}}{\sqrt{b+cx^2}}$

$= -\frac{1}{\sqrt{bc}}\cdot\frac{1}{cos}\,\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b+cx^2}}$, auch $= -\frac{1}{\sqrt{(bc)}}\cdot\frac{1}{cotg}\,x\sqrt{\frac{c}{b}}$.

Eben so könnte man versuchen, die Integrale von $\frac{1}{\sqrt{a+bx-cx^2}}\cdot dx$ und von $\frac{1}{a+bx+cx^2}\cdot dx$ auf die Integrale von $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx$ und von $\frac{1}{1+x^2}\cdot dx$ zurückzuführen. Man würde zu dem Ende $x\mp\frac{b}{2c}=z$ setzen, d. h. $x=z\pm\frac{b}{2c}$, so daß $a+bx\mp cx^2=\left(a\pm\frac{b^2}{4c}\right)\mp cz^2$ sich findet. Und da zu gleicher Zeit $dx=dz$ wird, so sieht man diese letztern beiden Integrale auf die vorhergehenden beiden

---

man zu der erstern Form $\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{sin}\,x\sqrt{\frac{c}{b}}$ die Constante $\frac{-1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{2}\pi$ addirt. — Setzt man nämlich $\frac{1}{sin}\,x\sqrt{\frac{c}{b}}=v$, so ist $sin\,v=x\sqrt{\frac{c}{b}}$, und das neue Integral ist daher

$=\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot v-\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{2}\pi$ oder $=\frac{1}{\sqrt{c}}(v-\frac{1}{2}\pi)$ oder $=-\frac{1}{\sqrt{c}}(\frac{1}{2}\pi-v)$.

Weil aber v und $\frac{1}{2}\pi-v$ einander zu $\frac{1}{2}\pi$ ergänzen, so ist der Sinus des einen Bogens zugleich der Kosinus des andern; d. h. es ist

$$sin\,v=cos\,(\tfrac{1}{2}\pi-v),\quad \text{also}\quad cos\,(\tfrac{1}{2}\pi-v)=x\sqrt{\frac{c}{b}},$$

d. h.
$$\tfrac{1}{2}\pi-v=\frac{1}{cos}\,x\sqrt{\frac{c}{b}}.$$

Eben so geht in 19.) die zweite Form $-\frac{1}{\sqrt{(bc)}}\cdot\frac{1}{cotg}\,x\sqrt{\frac{c}{b}}$ aus der erstern Form $\frac{1}{\sqrt{(bc)}}\cdot\frac{1}{tg}\,x\sqrt{\frac{c}{b}}$ hervor, wenn man zur letzteren noch die Constante $\frac{-1}{\sqrt{(bc)}}\cdot\frac{1}{2}\pi$ addirt; weil, wenn zwei Bogen einander zu $\frac{1}{2}\pi$ ergänzen, dann die Tangente des einen allemal zugleich auch die Kotangente des andern ist. (*Vgl. die Note zu* §. 5. N. 12.)

18.) und 19.) zurückgebracht, ſo daß man in letztern $a \pm \frac{b^2}{4c}$ d. h. $\frac{4ac \pm b^2}{4c}$ ſtatt b, und $x \pm \frac{b}{2c}$ ſtatt x ſe ben darf, um dieſe neuen zu haben. Dies giebt alſo

20) $$\int \frac{1}{\sqrt{a+bx-cx^2}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{sin} \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{tg} \frac{2cx-b}{2\sqrt{c} \cdot \sqrt{a+bx-cx}}$$

auch $$= -\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{cos} \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}};$$

21) $$\int \frac{1}{a+bx+cx^2} \cdot dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \cdot \frac{1}{tg} \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}},$$

auch $$= -\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \cdot \frac{1}{cotg} \frac{2cx+}{\sqrt{4ac-}}$$

Obgleich aber dieſe Formeln 18.—20.) gelten, es ma reell oder imaginär, poſitiv oder negativ ſeyn, ſo ſind ſie d für die Ziffern-Rechnungen nur bequem, ſo lange c poſitiv Denkt man ſich c negativ, oder ſetzt man —c ſtatt c, da auch nachher wieder c poſitiv gedacht werden könne, ſo n man die Formeln des I. Bd. §. 151. I.—IV.) anwenden, die Bogen in Logarithmen zu verwandeln, ſo daß in den E Reſultaten die $\sqrt{-1}$ d. h. i, die nun in 18.—20.), ſob —c ſtatt c geſetzt wird, ſich rechts hervorhebt, wieder ſchwinde und abermals reelle Formen entſtehen. Daſſelbe n man in der 21.) thun, ſobald $4ac-b^2$ negativ wird. diesem Wege erhält man dann unmittelbar

22) $$\int \frac{1}{\sqrt{b+cx^2}} \cdot dx = \frac{-1}{\sqrt{c}} \cdot log\,(\sqrt{b+cx^2} - x\sqrt{c}),$$

auch $$= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot log\,(\sqrt{b+cx^2} + x\sqrt{c})^*),$$

*) Die zweite Form ergiebt ſich, wenn man zur erſtern die Conſt $\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot log\,b$ addirt.

auch (nach N. 18.) $= \frac{1}{\sqrt{(-c)}} \cdot \frac{1}{\sin} x\sqrt{\frac{-c}{b}} = \frac{1}{\sqrt{(-c)}} \cdot \frac{1}{tg} \frac{x\sqrt{(-c)}}{\sqrt{b+cx^2}}$;

23) $\int \frac{1}{b-cx^2} \cdot dx = \frac{1}{2\sqrt{(bc)}} \cdot log \frac{1+x\sqrt{c:b}}{1-x\sqrt{c:b}}$,

auch (nach N. 19.)

$$= \frac{1}{\sqrt{(-bc)}} \cdot \frac{1}{tg} x\sqrt{\frac{-c}{b}} = \frac{1}{\sqrt{(-bc)}} \cdot \frac{1}{\sin} \frac{x\sqrt{-c}}{\sqrt{b-cx^2}};$$

24) $\int \frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot log\,(2cx+b+2\sqrt{c} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2});$$

auch $= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot log\left(\frac{2cx+b}{2\sqrt{c}} + \sqrt{a+bx+cx^2}\right)$ *),

auch (nach N. 20.) $= -\frac{1}{\sqrt{(-c)}} \cdot \frac{1}{\sin} \frac{2cx+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{(-c)}} \cdot \frac{1}{tg} \frac{2cx+b}{2\sqrt{(-c)} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}};$$

25) $\int \frac{1}{a+bx+cx^2} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \cdot log \frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}$,

auch (nach N. 21.) $= \frac{2}{\sqrt{(4ac-b^2)}} \cdot \frac{1}{tg} \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$.

Für $b = c = 1$ gehen die Formeln 22.) und 23.) noch in diese beiden besonderen Fälle über:

26) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot dx = log\,(x+\sqrt{1+x^2})$ (Vgl. N. 11.);

27) $\int \frac{1}{1-x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} log \frac{1+x}{1-x} = log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ **) (Vgl. N. 12.).

---

*) Die zweite Form ergiebt sich, wenn man von der ersten die Constante $\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot log\,(2\sqrt{c})$ subtrahirt.

**) Es ist $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$,

Dies ist ohngefähr Alles, was man zunächst für das Integriren in den einfacheren Fällen thun kann.

§. 7.

Integration der ganzen Funktionen.

Gewöhnlich betrachtet man nach der Reihe die Integration a) der algebraischen rationalen ganzen, b) der algebraischen rationalen gebrochenen Funktionen, c) der algebraischen irrationalen und zuletzt d) der transcendenten (der Exponential-, der logarithmischen und der trigonometrischen) Funktionen. — Gehen auch wir nun diesen Weg.

Die algebraischen rationalen ganzen Funktionen von x sind alle von der Form

$$Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+\cdots,$$

und ihr Integral giebt daher sogleich

$$\frac{A}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+\frac{B}{\beta+1}x^{\beta+1}+\frac{C}{\gamma+1}x^{\gamma+1}+\cdots;$$

und dieses Resultat gilt sogar dann noch, wenn α, β, γ etc. etc. gebrochene oder negative Zahlen seyn sollten.

§. 8.

Integration der algebraischen rationalen gebrochenen Funktionen.

I. Jede unächt gebrochene Funktion, d. h. jede Funktion von der Form

$$\frac{A+Bx+Cx^2+\cdots+Px^m}{A'+B'x+C'x^2+\cdots+Rx^n},$$

in welcher der Exponent m der höchsten Potenz von x im Zähler, gleich oder größer ist, als der Exponent n der höchsten Potenz von x im Nenner, — läßt sich allemal in eine Summe aus einer ganzen Funktion von x (die auch zuweilen, nämlich wenn

---

also $\int\frac{1}{1-x^2}\cdot dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-x}\cdot dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x}\cdot dx$
$=-\frac{1}{2}log(1-x)+\frac{1}{2}log(1+x).$

Reihe von Gliedern wird integrirt, wenn man nach und nach jedes einzelne Glied integrirt *).

Die Anwendung der Formel 3.) nennt man das theilweise Integriren (l'intégration par parties).

Und wird die Formel 4.) benutzt, so sagt man: es werde durch Substitution integrirt.

Anmerkung 1. Wendet man die Formel 4.) auf die Formel 3.) an, so kann letztere, wie aus der 2'.) hervorgeht, auch diese Form annehmen

1) $$\int z \cdot dy = zy - \int y \cdot dz,$$

in so fern sie vorher diese Form hatte

2) $$\int (z \cdot \partial y_x) \cdot dx = zy - \int (y \cdot \partial z_x) \cdot dx.$$

Sind nämlich y und z Funktionen von x, so ist auch z als eine Funktion von y herzustellen, also dann z nach y zu integriren; während aber auch y als eine Funktion von z hergestellt gedacht, also dann auch y nach z integrirt werden kann.

Anmerkung 2. Für die bequemere Anwendbarkeit der Formel 4.) ist zu bemerken, daß

$$dx = \partial x_z \cdot dz$$

ist, und daß man aus $\varphi \cdot dx$ in 4.) zur Linken, sogleich das $(\varphi \cdot \partial x_z) \cdot dz$ zur Rechten bekommt, wenn man von x als Funktion von z das Differential dx nimmt, und diesen Ausdruck $\partial x_z \cdot dz$ statt des Faktors dx substituirt.

§. 5.

Aber eben weil man nur diese vier allgemeineren Integral-Formeln hat, so thut man wohl, die einfacheren Integrale zunächst dadurch sich zu verschaffen, daß man die einfacheren Ableitungs-Resultate der §§. 150. und 151. des I. Bd. bloß umkehrt. Dadurch erhält man namentlich sogleich:

---

*) Eine Funktion y_x kann daher integrirt werden, sobald sie in eine solche Reihe einzelner und in endlicher Form integrirbarer Glieder zerlegt werden kann.

1) $\int x^m \cdot dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$; 2) $\int \frac{1}{x} \cdot dx = log\, x$;

3) $\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{log\, a}$; 4) $\int e^x \cdot dx = e^x$;

5) $\int sin\, x \cdot dx = -cos\, x$; 6) $\int cos\, x \cdot dx = sin\, x$;

7) $\int \frac{1}{cos\, x^2} \cdot dx = tg\, x$; 8) $\int \frac{1}{sin\, x^2} \cdot dx = -cotg\, x$;

9) $\int \frac{sin\, x}{cos\, x^2} \cdot dx = sec\, x$; 10) $\int \frac{cos\, x}{sin\, x^2} \cdot dx = -cosec\, x$;

11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \frac{1}{sin} x$, auch $= -\frac{1}{cos} x$;

12) $\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \frac{1}{tg} x$, auch $= -\frac{1}{cotg} x$*) $= -\frac{1}{tg}\frac{1}{x}$

§. 6.

Mittelst dieser Integrale kann man wieder viele andere ähnliche Integrale finden, z. B.

$$\int a^{px} \cdot dx, \quad \int sin\, px \cdot dx, \quad \int \frac{1}{px+q} \cdot dx,$$

u. s. w.; indem man $px+q=z$ setzt (es mag $q=0$ oder

---

*) In den NN. 11.) und 12.) ist die zweite Form des Integrals von der ersten allemal um die Constante $\frac{1}{2}\pi$ verschieden. Ist nämlich $\frac{1}{sin} x = z$, also $sin\, z = x$, so ist auch $cos(\frac{1}{2}\pi - z) = x$, d. h.

$$\tfrac{1}{2}\pi - z = \frac{1}{cos} x,$$

folglich

$$-\frac{1}{cos} x = -\tfrac{1}{2}\pi + z = -\tfrac{1}{2}\pi + \frac{1}{sin} x.$$

Und ist $\frac{1}{tg} x = u$, so ist $tg\, u = x$, also auch $cotg(\frac{1}{2}\pi - u) = x$ d. h.

$$\frac{1}{cotg} x = \tfrac{1}{2}\pi - u$$

und

$$-\frac{1}{cotg} x = -\tfrac{1}{2}\pi + u = -\tfrac{1}{2}\pi + \frac{1}{tg} x.$$

Beiſpiel 1. So findet ſich $\frac{1-2x^2}{1-x^3}=\frac{1-2x^2}{(1-x)(1+x+x^2)}$, und man hat daher $M_x=1-2x^2$, $N_x=1-x^3$, $R_x=1+x+x^2$; $-\frac{q}{p}=1$; alſo $(M)=-1$, $(R)=3$; folglich $A=-\frac{1}{3}$. Hernach wird $M_x-A\cdot R_x=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}x^2$ alſo $M'_x=\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}x^2}{x-1}=-\frac{2}{3}-\frac{5}{3}x$; folglich hat man gefunden

$$\frac{1-2x^2}{1-x^3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4+5x}{1+x+x^2}.$$

Beiſpiel 2. Soll dieſe letztere ächt gebrochene Funktion $\frac{4+5x}{1+x+x^2}$ aufs Neue in Partial-Brüche zerlegt werden, ſo muß man zuvor den Nenner $1+x+x^2$ in ſeine beiden einfachen Faktoren zerlegen, welche beſtglich $x-\alpha$ und $x-\beta$ ſind, wenn α und β die beiden Werthe von x vorſtellen, welche ihn zu Null machen. Man findet aber aus $x^2+x+1=0$, gleich $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}$, wo i die $\sqrt{-1}$ vorſtellt. Alſo ſind die beiden Faktoren von x^2+x+1 dieſe: $x+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})$ und $x+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})$.

Setzt man nun

$$\frac{4+5x}{1+x+x^2}=\frac{A}{x+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})}+\frac{M'_x}{x+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})},$$

ſo hat man jetzt $M_x=4+5x$, $R_x=x+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})$, $-\frac{q}{p}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}$; daher $(M)=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i\cdot\sqrt{3}$, $(R)=-i\cdot\sqrt{3}$ und $A=\frac{(M)}{(R)}=\frac{-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i\cdot\sqrt{3}}{i\cdot\sqrt{3}}=\frac{5}{2}+\frac{3}{2\sqrt{3}}\cdot i=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}$. Und dann findet ſich noch

$$M'_x=\frac{M_x-A\cdot R_x}{px+q}=\frac{(3+i\cdot\sqrt{3})+(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})x}{x+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})}=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}\ ^*),$$

ſo daß $\frac{4+5x}{1+x+x^2}=\frac{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}}{x+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})}+\frac{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}}{x+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})}$ gefunden iſt.

Beiſpiel der Integration. Hat man aber nun in den vorſtehenden Beiſpielen 1.) und 2.) die gebrochene Funktion $\frac{1-2x^2}{1-x^3}$ in ihre einfachen Faktoren zerlegt und

---

*) Daß man M'_x nach x conſtant und von A nur dadurch verſchieden finden mußte, daß hier $-i$ ſteht, wo in A der Werth i oder $+i$ zu finden iſt, konnte man à priori wiſſen, und man brauchte dann dasmal die Berechnung von M'_x *gar nicht auszuführen.*

kannten Integrale von $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx$ und $\frac{1}{1+x^2}\cdot dx$ zurückzuführen. — Da muß man denn von $b\mp cx^2$, den Faktor b herausſetzen, alſo, indem man $\frac{c}{b}=p^2$, d. h. $p=\sqrt{\frac{c}{b}}$ nimmt, $b(1\mp p^2x^2)$ ſtatt $b\mp cx^2$ ſchreiben, dann $px=z$ ſetzen, ſo daß $p\cdot dx=dz$ wird; und man erhält dann

$$\int\frac{1}{\sqrt{b-cx^2}}\cdot dx=\frac{1}{\sqrt{b}}\int\frac{1}{\sqrt{1-p^2x^2}}\cdot dx=\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{p}\int\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\cdot dz$$

und

$$\int\frac{1}{b+cx^2}\cdot dx=\frac{1}{b}\cdot\int\frac{1}{1+p^2x^2}\cdot dx=\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{p}\int\frac{1}{1+z^2}\cdot dz.$$

Auf dieſe Weiſe erhält man (aus §. 5. N. N. 11. und 12.)

18) $$\int\frac{1}{\sqrt{b-cx^2}}\cdot dx=\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{sin}x\sqrt{\frac{c}{b}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{tg}\frac{x\sqrt{c}}{\sqrt{b-cx^2}}$$ *),

auch $$=-\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{cos}x\sqrt{\frac{c}{b}}$$ **);

---

*) Iſt nämlich $x\sqrt{\frac{c}{b}}$ der Sinus eines Bogens, ſo iſt die Tangente deſſelben Bogens $=\frac{sin}{\sqrt{1-sin^2}}$ d. h. $=\frac{x\sqrt{c}}{\sqrt{b-cx^2}}$.

**) Man muß nur nicht überſehen, daß wenn von einer und derſelben Funktion zwei oder mehr Integrale angegeben ſind, ſolche nicht nothwendig einander gleich ſeyn müſſen, ſondern um eine Conſtante von einander verſchieden ſeyn können. So findet man z. B. für $\int\frac{1}{x}\cdot dx$ ſowohl $log\,x$, als auch $log(ax)$, $log(-bx)$, alſo auch $log(\frac{1}{2}x)$, $log(-2x)$ u. ſ. f. — Alle dieſe Integrale ſind einander nicht gleich, aber ſie ſind alle von einander nur um eine Conſtante verſchieden; z. B. es iſt $log\,ax-log(-bx)=log\left(\frac{ax}{-bx}\right)=log\left(-\frac{a}{b}\right)$. — Oder es iſt $log(ax)=log\,x+log\,a$; $log(-bx)=log\,x+log(-b)$; eben ſo iſt $log(-x)=log\,x+log(-1)$; u. ſ. w. Und alle dieſe Integrale ſind im allgemeinen Integral $log\,x+C$ enthalten.

Hier oben (in 18.) ergiebt ſich die zweite Form des Integrals, wenn

2) $A=\frac{(M)}{(R)}$; 3) $M'_x=\frac{M_x-A\cdot R_x}{px+q}$;

4) $B=\frac{(M')}{(R)}$ und 5) $M''_x=\frac{M'_x-B\cdot R_x}{px+q}$.

Denn man hat

$$\frac{M_x}{N_x}=\frac{1}{px+q}\cdot\frac{M_x}{(px+q)\cdot R_x},$$

also (nach I.) $$=\frac{1}{px+q}\cdot\left(\frac{A}{px+q}+\frac{M'_x}{R_x}\right),$$

wo A und M'_x (nach I.) aus den hiesigen Gleichungen 2.) und 3.) gefunden werden müssen. Dann aber zerlegt sich $\frac{M'_x}{(px+q)\cdot R_x}$ auf's neue in die beiden Brüche $\frac{B}{px+q}+\frac{M''_x}{R_x}$, wo B und M''_x (nach I.) aus den beiden Gleichungen 4.) und 5.) sich ergeben.

III. Und hat der Nenner N_x den Faktor $px+q$ dreimal, so daß $N_x=(px+q)^3\cdot R_x$ ist, so kann man

1) $$\frac{M_x}{N_x}=\frac{A}{(px+q)^3}+\frac{B}{(px+q)^2}+\frac{C}{px+q}+\frac{M'''_x}{R_x}$$

setzen, während A, B, C und M''' nach und nach durch folgende Rechnung gefunden werden, nämlich

2) $A=\frac{(M)}{(R)}$; 3) $M'_x=\frac{M_x-A\cdot R_x}{px+q}$;

4) $B=\frac{(M')}{(R)}$; 5) $M''_x=\frac{M'_x-B\cdot R_x}{px+q}$;

6) $C=\frac{(M'')}{(R)}$ und 7) $M'''_x=\frac{M''_x-C\cdot R_x}{px+q}$.

Dabei müssen die Divisionen zur Rechten immer aufgehen, weil M'_x, M''_x, M'''_x allemal ganze Funktionen von x sind.

IV. Man übersieht nun die Zerlegung von $\frac{M_x}{N_x}$ für den Fall, daß N_x den Faktor $(px+q)^n$ enthalten sollte, während n irgend eine ganze positive Zahl ist.

Anmerkung 1. Das Integriren der gebrochenen Funktionen hängt also vom Zerlegen derselben in ihre einfachen Par-

18.) und 19.) zurückgebracht, so daß man in letztern nur $a \pm \frac{b^2}{4c}$ d. h. $\frac{4ac \pm b^2}{4c}$ statt b, und $x \pm \frac{b}{2c}$ statt x schreiben darf, um diese neuen zu haben. Dies giebt also

20) $$\int \frac{1}{\sqrt{a+bx-cx^2}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{sin} \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{tg} \frac{2cx-b}{2\sqrt{c} \cdot \sqrt{a+bx-cx^2}},$$

$$\text{auch} \quad = -\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{cos} \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}};$$

21) $$\int \frac{1}{a+bx+cx^2} \cdot dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \cdot \frac{1}{tg} \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}},$$

$$\text{auch} \quad = -\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \cdot \frac{1}{cotg} \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}.$$

Obgleich aber diese Formeln 18.—20.) gelten, es mag c reell oder imaginär, positiv oder negativ seyn, so sind sie doch für die Ziffern-Rechnungen nur bequem, so lange c positiv ist. Denkt man sich c negativ, oder setzt man —c statt c, damit auch nachher wieder c positiv gedacht werden könne, so muß man die Formeln des I. Bd. §. 151. I.—IV.) anwenden, um die Bogen in Logarithmen zu verwandeln, so daß in den End-Resultaten die $\sqrt{-1}$ d. h. i, die nun in 18.—20.), sobald —c statt c gesetzt wird, sich rechts hervorhebt, wieder verschwinde und abermals reelle Formen entstehen. Dasselbe muß man in der 21.) thun, sobald $4ac - b^2$ negativ wird. Auf diesem Wege erhält man dann unmittelbar

22) $$\int \frac{1}{\sqrt{b+cx^2}} \cdot dx = \frac{-1}{\sqrt{c}} \cdot log\,(\sqrt{b+cx^2} - x\sqrt{c}),$$

$$\text{auch} \quad = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot log\,(\sqrt{b+cx^2} + x\sqrt{c})^*),$$

*) Die zweite Form ergiebt sich, wenn man zur erstern die Constante $\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot log\, b$ addirt.

auch (nach N. 18.) $= \frac{1}{\sqrt{(-c)}} \cdot \frac{1}{\sin} x\sqrt{\frac{-c}{b}} = \frac{1}{\sqrt{(-c)}} \cdot \frac{1}{tg} \frac{x\sqrt{(-c)}}{\sqrt{b+cx^2}}$;

23) $\int \frac{1}{b-cx^2} \cdot dx = \frac{1}{2\sqrt{(bc)}} \cdot log \frac{1+x\sqrt{c:b}}{1-x\sqrt{c:b}}$,

auch (nach N. 19.)

$$= \frac{1}{\sqrt{(-bc)}} \cdot \frac{1}{tg} x\sqrt{\frac{-c}{b}} = \frac{1}{\sqrt{(-bc)}} \cdot \frac{1}{\sin} \frac{x\sqrt{-c}}{\sqrt{b-cx^2}};$$

24) $\int \frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot log\,(2cx+b+2\sqrt{c} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2});$$

auch $$= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot log\left(\frac{2cx+b}{2\sqrt{c}} + \sqrt{a+bx+cx^2}\right)$$ *),

auch (nach N. 20.) $= -\frac{1}{\sqrt{(-c)}} \cdot \frac{1}{\sin} \frac{2cx+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{(-c)}} \cdot \frac{1}{tg} \frac{2cx+b}{2\sqrt{(-c)} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}};$$

25) $\int \frac{1}{a+bx+cx^2} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \cdot log \frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}$,

auch (nach N. 21.) $= \frac{2}{\sqrt{(4ac-b^2)}} \cdot \frac{1}{tg} \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$.

Für $b = c = 1$ gehen die Formeln 22.) und 23.) noch in diese beiden besonderen Fälle über:

26) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot dx = log\,(x+\sqrt{1+x^2})$ (Vgl. N. 11.);

27) $\int \frac{1}{1-x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} log \frac{1+x}{1-x} = log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ **) (Vgl. N. 12.).

---

*) Die zweite Form ergiebt sich, wenn man von der ersten die Constante $\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot log\,(2\sqrt{c})$ subtrahirt.

**) Es ist $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$,

Dies iſt ohngefähr Alles, was man zunächſt für das Integriren in den einfacheren Fällen thun kann.

§. 7.

Integration der ganzen Funktionen.

Gewöhnlich betrachtet man nach der Reihe die Integration a) der algebraiſchen rationalen ganzen, b) der algebraiſchen rationalen gebrochenen Funktionen, c) der algebraiſchen irrationalen und zuletzt d) der tranſcendenten (der Exponential-, der logarithmiſchen und der trigonometriſchen) Funktionen. — Gehen auch wir nun dieſen Weg.

Die algebraiſchen rationalen ganzen Funktionen von x ſind alle von der Form

$$Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+\cdots,$$

und ihr Integral giebt daher ſogleich

$$\frac{A}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+\frac{B}{\beta+1}x^{\beta+1}+\frac{C}{\gamma+1}x^{\gamma+1}+\cdots;$$

und dieſes Reſultat gilt ſogar dann noch, wenn α, β, γ etc. etc. gebrochene oder negative Zahlen ſeyn ſollten.

§. 8.

Integration der algebraiſchen rationalen gebrochenen Funktionen.

I. Jede unächt gebrochene Funktion, d. h. jede Funktion von der Form

$$\frac{A+Bx+Cx^2+\cdots+Px^m}{A'+B'x+C'x^2+\cdots+Rx^n},$$

in welcher der Exponent m der höchſten Potenz von x im Zähler, gleich oder größer iſt, als der Exponent n der höchſten Potenz von x im Nenner, — läßt ſich allemal in eine Summe aus einer ganzen Funktion von x (die auch zuweilen, nämlich wenn

---

alſo $\int\frac{1}{1-x^2}\cdot dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-x}\cdot dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x}\cdot dx$

$=-\frac{1}{2}log(1-x)+\frac{1}{2}log(1+x).$

$m = n$ ist, in eine bloße Constante nach x übergehen kann) und einer ächt gebrochenen Funktion (in welcher der Exponent der höchsten Potenz von x im Zähler kleiner ist, als der im Nenner) umformen. — Man ordnet zu dem Ende Zähler und Nenner nach fallenden Potenzen von x, dividirt dann auf die, in den Elementen gewöhnliche Weise mit dem Nenner in den Zähler, so lange bis der erste Rest kommt, der von einem niedrigern Grade als der Divisor ist.

So z. B. findet sich $\frac{1+x}{1-x} = -1+\frac{2}{1-x}$;

$$\frac{1-2x+3x^2-4x^3}{1-4x+x^2} = -4x-13+\frac{14-50x}{1-4x+x^2};$$

u. s. w. f.

Eine unächt gebrochene Funktion wird also integrirt, wenn man sie auf die vorstehende Weise in eine ganze und eine ächt gebrochene verwandelt, und dann (nach I. Bd. §. 150. B. 1.) jede der beiden letztern für sich integrirt.

II. Jede ächt gebrochene Funktion läßt sich allemal in eine Summe von ächt gebrochenen Funktionen zerlegen, welche entweder die Form

$$\frac{A}{px+q}, \quad \text{oder die Form} \quad \frac{A}{(px+q)^n}$$

haben, und welche einfache Partial-Brüche genannt werden. — Die Integrale dieser beiden letztern Funktionen sind aber nach den Nummern 14.) und 13.) des §. 6.) bereits gefunden; nämlich

1) $$\int \frac{A}{px+q}\cdot dx = \frac{A}{p}\cdot log\,(px+q);$$

2) $$\int \frac{A}{(px+q)^n}\cdot dx = \frac{A(px+q)^{1-n}}{p(1-n)} = \frac{-A}{p(n-1)(px+q)^{n-1}}.$$

Folglich kann man jede ächt gebrochene und deshalb (nach I.) auch jede unächt gebrochene Funktion integriren, so oft es gelingt, die erstere in die gedachten einfachen Partial-Brüche zu zerlegen.

§. 9.

Zerlegung der ächt gebrochenen Funktionen in ihre einfachen Partial-Brüche.

I. Hat in einer ächt gebrochenen Funktion $\frac{M_x}{N_x}$, der N ner N_x den Faktor $px+q$ nur einmal, ist also $N_x=(px+q)\cdot$ und setzt man

$$1) \qquad \frac{M_x}{N_x}=\frac{A}{px+q}+\frac{M'_x}{R_x},$$

so ist allemal

$$2) \quad A=\frac{(M)}{(R)} \quad \text{und dann} \quad 3) \quad M'_x=\frac{M_x-A\cdot R_x}{px+q},$$

wenn (M) und (R) die Werthe bedeuten, welche M_x und annehmen, sobald in ihnen statt x der Werth von x ge wird, welcher den Faktor $px+q$ der Null gleich macht, n cher also aus $px+q=0$ gefunden wird, und welc $=-\frac{q}{p}$ ist.

Addirt man nämlich in 1.) die beiden Brüche zur Rechten, so er man aus der Vergleichung augenblicklich

$$M_x=A\cdot R_x+(px+q)\cdot M'_x.$$

Giebt man in dieser Gleichung, um M'_x fortzuschaffen, dem x einen chen Werth, daß $px+q=0$ wird, so erhält man die Gleichung Bestimmung von A. Ist aber A gefunden, so giebt dieselbe Gleichu indem man x in ihr unbestimmt läßt, sogleich M'_x dazu.

Enthielte aber R_x den Faktor $px+q$ noch einmal, so würde $(R)=$ und die jetzige Form von A, nämlich $\frac{1}{0}$ würde anzeigen, daß jetzt e solche Zerlegung nicht statt findet.

Uebrigens gilt diese Zerlegung 1.) auch dann noch, we $\frac{M_x}{N_x}$ eine unächt gebrochene Funktion ist, wie der so eben führte Beweis deutlich sehen läßt. Die ganze Funktion, wel in $\frac{M_x}{N_x}$ steckt, steckt natürlich dann in dem zweiten Summ den $\frac{M'_x}{R_x}$.

bereits gefunden hat. Alles kommt daher nun darauf an, den Bruch $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ dergestalt in zwei Brüche $\frac{Ax+E}{x^2+px+q}$ und $\frac{B-E}{x^2+px+q}$ zu zerlegen, daß das Integral des erstern leicht gefunden werden kann. Weil aber $\partial(x^2+px+q)_x = 2x+p$ ist, so hat man (nach §. 4. N. 4. und §. 5. N. 2.)

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\cdot dx = log(x^2+px+q),$$

also auch, wenn man diese Gleichung mit irgend einer Constante H multiplicirt,

$$\int \frac{2Hx+Hp}{x^2+px+q}\cdot dx = H\cdot log(x^2+px+q).$$

Setzt man daher $2H = A$, also $H = \frac{1}{2}A$, so erhält man

1) $$\int \frac{Ax+\frac{1}{2}pA}{x^2+px+q}\cdot dx = \frac{1}{2}A\cdot log(x^2+px+q).$$

Auf diese Betrachtung fußend, zerlegt man also den zu integrirenden Bruch $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ in die beiden

$$\frac{Ax+\frac{1}{2}pA}{x^2+px+q} + \frac{B-\frac{1}{2}pA}{x^2+px+q}$$

und hat dann

2) $$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\cdot dx$$
$$= \frac{1}{2}A\cdot log(x^2+px+q) + (B-\tfrac{1}{2}pA)\cdot \int \frac{1}{x^2+px+q}\cdot dx;$$

also (nach §. 6. N. 21.)

(⊙) ... $$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\cdot dx$$
$$= \frac{1}{2}A\cdot log(x^2+px+q) + \frac{2B-pA}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot \frac{1}{tg}\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}.$$

Wenn man hier $\frac{b}{a}$ statt p, und $\frac{c}{a}$ statt q setzt, auch die

$$\frac{1-2x^2}{1-x^3} = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{\frac{5}{6}+\frac{1}{6}i\cdot\sqrt{3}}{x+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})} - \frac{\frac{5}{6}-\frac{1}{6}i\cdot\sqrt{3}}{x+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})}$$

gefunden, ſo findet ſich nun ſogleich (nach der Formel 1. des Textes und nach I. Bd. §. 150. B. 1.)

$$\int\frac{1-2x^2}{1-x^3}\cdot dx = \tfrac{1}{3}log(x-1) - (\tfrac{5}{6}+\tfrac{1}{6}i\cdot\sqrt{3})\cdot log(x+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}) - (\tfrac{5}{6}-\tfrac{1}{6}i\cdot\sqrt{3})\cdot log(x+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}).$$

Dieſes Reſultat darf nun nur noch ſo umgeformt werden, daß ſich die imaginäre Wurzel i heraushebt. Zu dem Ende ſchreibe man die beiden letzten, ſubtrahirten Glieder anders, nämlich ſo, daß die mit $\frac{5}{6}$ multiplicirten Glieder zuſammengefaßt werden, und dann die mit i multiplicirten. Dieſer ſubtrahirte Theil wird dann

$$= \tfrac{5}{6}log(1+x+x^2) + \tfrac{1}{6}i\cdot\sqrt{3}\cdot log\frac{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}}{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}}.$$

Dieſer zweite Logarithme muß nun (nach I. Bd. §. 151.) in einen Bogen umgeformt werden. Die III.) des I. Bd. §. 151.) giebt aber für dieſes 2te Glied der vorſtehenden Summe, wenn im Logarithmanden Zähler und Nenner durch $x+\frac{1}{2}$ dividirt werden, und wenn man bemerkt, daß $i = -\frac{1}{i}$ iſt,

$$-\tfrac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{tg}\frac{\sqrt{3}}{2x+1} \quad \text{oder (nach I. Bd. §. 81.)} \quad -\tfrac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{cotg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Man hat alſo zuletzt in ganz reellen Formen

$$\int\frac{1-2x^2}{1-x^3}\cdot dx = \tfrac{1}{3}log(x-1) - \tfrac{5}{6}log(1+x+x^2) + \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{cotg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}};$$

wo man, wenn noch die Conſtante $-\frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\pi$ addirt wird, ſtatt $\frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{cotg}$ auch $-\frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{tg}$ ſchreiben kann. — Und in der That, wenn man den Ausdruck zur Rechten nach allem x differenziirt, ſo kommt die Funktion unter dem Integral-Zeichen zur Linken wieder heraus.

II. Hat der Nenner N_x der ächt gebrochenen Funktion $\frac{M_x}{N_x}$ den Faktor $px+q$ doppelt, iſt alſo $N = (px+q)^2\cdot R_x$, ſo daß R_x denſelben Faktor $px+q$ nicht mehr hat, ſo kann man ſetzen

$$1) \qquad \frac{M_x}{N_x} = \frac{A}{(px+q)^2} + \frac{B}{px+q} + \frac{M''_x}{R_x};$$

und dabei wird gefunden

2) $A=\frac{(M)}{(R)}$; 3) $M'_x=\frac{M_x-A\cdot R_x}{px+q}$;

4) $B=\frac{(M')}{(R)}$ und 5) $M''_x=\frac{M'_x-B\cdot R_x}{px+q}$.

Denn man hat

$$\frac{M_x}{N_x}=\frac{1}{px+q}\cdot\frac{M_x}{(px+q)\cdot R_x},$$

also (nach I.) $$=\frac{1}{px+q}\cdot\left(\frac{A}{px+q}+\frac{M'_x}{R_x}\right),$$

wo A und M'_x (nach I.) aus den hiesigen Gleichungen 2.) und 3.) gefunden werden müssen. Dann aber zerlegt sich $\frac{M'_x}{(px+q)\cdot R_x}$ auf's Neue in die beiden Brüche $\frac{B}{px+q}+\frac{M''_x}{R_x}$, wo B und M''_x (nach I.) aus den beiden Gleichungen 4.) und 5.) sich ergeben.

III. Und hat der Nenner N_x den Faktor $px+q$ dreimal, so daß $N_x=(px+q)^3\cdot R_x$ ist, so kann man

1) $$\frac{M_x}{N_x}=\frac{A}{(px+q)^3}+\frac{B}{(px+q)^2}+\frac{C}{px+q}+\frac{M'''_x}{R_x}$$

setzen, während A, B, C und M''' nach und nach durch folgende Rechnung gefunden werden, nämlich

2) $A=\frac{(M)}{(R)}$; 3) $M'_x=\frac{M_x-A\cdot R_x}{px+q}$;

4) $B=\frac{(M')}{(R)}$; 5) $M''_x=\frac{M'_x-B\cdot R_x}{px+q}$;

6) $C=\frac{(M'')}{(R)}$ und 7) $M'''_x=\frac{M''_x-C\cdot R_x}{px+q}$.

Dabei müssen die Divisionen zur Rechten immer aufgehen, weil M'_x, M''_x, M'''_x allemal ganze Funktionen von x sind.

IV. Man übersieht nun die Zerlegung von $\frac{M_x}{N_x}$ für den Fall, daß N_x den Faktor $(px+q)^n$ enthalten sollte, während n irgend eine ganze positive Zahl ist.

Anmerkung 1. Das Integriren der gebrochenen Funktionen hängt also vom Zerlegen derselben in ihre einfachen Par-

tial-Brüche, und letzteres wieder von dem Zerlegen einer ganzen Funktion von x in ihre einfachen Faktoren ab; während dieses letzterwähnte Geschäft wiederum von der Auflösung der höheren Gleichungen abhängig ist. — Nachstehende Beispiele mögen noch zur weiteren Uebung dienen.

Beispiel 1. Soll $\int \frac{3x^2}{1-x^2}\cdot dx$ gefunden werden, so zerlegt man zunächst $\frac{3x^2}{1-x^2}$ in $-3+3\cdot\frac{1}{1-x^2}$; dann letztere ächt gebrochene Funktion $\frac{1}{1-x^2}$ wieder in $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x}$. Man hat daher

$$\frac{3x^2}{1-x^2}=-3+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-x};$$

folglich findet sich, wenn man jetzt integrirt,

$$\int\frac{3x^2}{1-x^2}\cdot dx=-3x+\tfrac{3}{2}log(1+x)-\tfrac{3}{2}log(1-x)$$
$$=-3x+\tfrac{3}{2}log\frac{1+x}{1-x}.$$

Beispiel 2. Um $\int\frac{x^2}{(a+bx)^3}\cdot dx$ zu finden, zerlegt man

$$\frac{x^2}{(a+bx)^3}\text{ in }\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{1}{(a+bx)^3}-2\frac{a}{b^2}\cdot\frac{1}{(a+bx)^2}+\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{a+bx}$$

und es wird daher das gesuchte Integral

$$=-\frac{a^2}{2b^3}\cdot\frac{1}{(a+bx)^2}+2\frac{a}{b^3}\cdot\frac{1}{a+bx}+\frac{1}{b^3}\cdot log(a+bx)\text{ *).}$$

Beispiel 3. Soll $\int\frac{5x^3+8x-20}{(x-4)^3(x^2-4x+8)}\cdot dx$ gefunden werden,

---

*) Solche Funktionen, wie $\frac{x^2}{(a+bx)^3}$ integriren sich leichter noch, wenn man $a+bx=z$ setzt, so daß $x=\frac{1}{b}(z-a)$ wird, also, $dx=\frac{1}{b}$. Dann hat man

$$\int\frac{x^2}{(a+bx)^3}\cdot dx=\int\frac{1}{b^2}\cdot\frac{(z-a)^2}{z^3}\cdot dx\cdot dz=\frac{1}{b^3}\int\frac{z^2-2az+a^2}{z^3}\cdot dz$$
$$=\frac{1}{b^3}\left(\int\frac{1}{z}\cdot dz-2a\int\frac{1}{z^2}\cdot dz+a^2\int\frac{1}{z^3}\cdot dz\right).$$

Durch diese Substitution ist aber eigentlich nur die Zerlegung in die Partial-Brüche vereinfacht.

Weil aber das obige $-\frac{6}{(1+x^2)^2}\cdot dx$ ebenfalls integrirt werden ſoll, ſo nimmt man es ſogleich mit dieſem letztern Integral zuſammen und hat nun

$$\int\left(\frac{-x+4}{(1+x^2)^2}-\frac{6}{(1+x^2)^2}\right)\cdot dx=\frac{x+\frac{1}{2}}{(1+x^2)^2}+\int\frac{-3}{(1+x^2)^2}\cdot dx.$$

Wird nun (in §. 11. II. 1.) $n=2$, $P=0$, $Q=-3$, $a=c=1$, und $b=0$ geſetzt, ſo erhält man wieder

$$\int\frac{-3}{(1+x^2)^2}\cdot dx=\frac{-\frac{3}{2}x}{1+x^2}+\int\frac{-\frac{3}{2}}{1-x^2}\cdot dx.$$

Weil aber oben auch noch $\frac{3}{1+x^2}\cdot dx$ zu integriren ſteht, ſo hat man zuletzt

$$\int\frac{3x^4-x+1}{(1+x^2)^3}\cdot dx=\frac{x+\frac{1}{2}}{(1+x^2)^2}-\frac{\frac{3}{2}x}{1+x^2}+\int\frac{\frac{3}{2}}{1+x^2}\cdot dx,$$

$$\text{alſo}\qquad=\frac{x+\frac{1}{2}}{(1+x^2)^2}-\frac{\frac{3}{2}x}{1+x^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{ig}x.$$

$$=\frac{-\frac{3}{2}x^3-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{(1+x^2)^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{ig}x\text{ *)}.$$

Anmerkung. Iſt

1) $\qquad N_x=(x-\alpha)^m\cdot R_x,$

ſo iſt (nach I. Bd. §. 157. Anmerkung 2.)

$\partial^{m-\mu}N_\alpha=0$, $\partial^m N_\alpha=m!R_\alpha$ und $\partial^{m+\nu}N_\alpha=(m+\nu)^{m\mid-1}\partial^\nu R_\alpha$; alſo kann man R_α finden, ohne R_x ſelbſt zu haben, indem man N_x m mal hinter einander nach x ableitet, dann α ſtatt x ſetzt, und noch durch m! dividirt. Dies läßt ſich bei der Zerlegung in Partial-Brüche, wobei man R_α immer braucht, zuweilen mit

*) Die Rechnungen des Textes vereinfachen ſich, wenn man einen neuen Veränderlichen z dadurch einführt, daß man $x+\frac{b}{2a}=z$, alſo $x=z-\frac{b}{2a}$ und $\partial x_z=1$ ſetzt. Es wird dann $ax^2+bx+c=az^2+p$, wenn $\frac{4ac-b^2}{4a}=p$ geſetzt worden iſt. Die zu integrirende Funktion verwandelt ſich daher in eine andere von der Form $\frac{Pz+Q}{(az^2+p)^n}\cdot dz$, die zwar auf demſelben Wege, aber in ſo fern einfacher integrirt wird, als der Coefficient von z^1 im *Nenner, der Null gleich* iſt.

$-2A\cdot\frac{1}{tg}\frac{\varphi}{f}$ umgeformt werden muß. So wenig Schwierigkeit aber diese letztere Umformung auch gewähren mag, besonders wenn man sich ein für allemal das Schema

$$(\odot)\cdots\quad A\cdot i\cdot log\frac{f+i\cdot\varphi}{f-i\cdot\varphi}=-A\cdot i\cdot log\frac{f-i\cdot\varphi}{f+i\cdot\varphi}=-2A\cdot\frac{1}{tg}\frac{\varphi}{f}$$

in das Gedächtniß prägt, so zieht man doch oft vor, die Zerlegung eines solchen Bruches wie $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, wenn der Nenner x^2+px+q imaginäre einfache Faktoren hat, nicht weiter zu bewerkstelligen, sondern diesen Bruch direkt zu integriren.

Kommt aber im Nenner N_x einer gebrochenen Funktion $\frac{M_x}{N_x}$, derselbe doppelte Faktor x^2+px+q, mehrere Male vor, ist z. B. $N_x=(x^2+px+q)^3\cdot R_x$, so kann man die gebrochene Funktion $\frac{M_x}{N_x}$ auch sogleich so zerlegen, daß man erhält

$$(\mathfrak{C})\cdots\quad \frac{M_x}{N_x}=$$

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^3}+\frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+px+q}+\frac{Z_x}{R_x}$$

und dann muß man diese doppelten Partial-Brüche ohne weitere Zerlegung integriren, wenn man die imaginären Formen und ihre Umformung in reelle Formen vermeiden will.

Sowohl dieses Zerlegen in doppelte Partial-Brüche, als auch die nochmalige direkte Integration der letztern (ohne sie aufs Neue in einfache Partial-Brüche zerlegen zu müssen) mögen nun die beiden nächsten Paragraphen noch nachweisen.

§. 10.

Von der Zerlegung einer gebrochenen Funktion in ihre doppelten Partial-Brüche.

I. Hat der Nenner N_x den Faktor x^2+px+q nur einmal, ist also $N_x=(x^2+px+q)\cdot R_x$, und sind die Werth

Diese Gleichungen 4′.), 5′.) und 6′.) geben nun wieder A, B und C, während die 3.) oder die 3′.) dann Z_x dazu zu liefern hat.

Dieselben Betrachtungen lassen sich auch bei der Zerlegung in doppelte Partial-Brüche in Anwendung bringen, weil der Nenner N_x dann die beiden Faktoren $(x-(\alpha+\beta i))^n$ und $(x-(\alpha-\beta i))^n$ hat; die eben gedachten Gleichungen daher alle doppelt erscheinen und deshalb auch eine doppelte Anzahl unbestimmter Koefficienten bestimmen.

Ist endlich $N_x=(px+q)^n\cdot R_x$,

so kann man $-\frac{q}{p}=\alpha$ setzen, und hat dann

$$N_x=(x-\alpha)^n\cdot p^n R_x;$$

und daher gilt das Vorstehende alles noch, nur daß $p^n R_x$ statt R_x zu stehen kommt.

Eben so kann man, wenn $N_x=(ax^2+bx+c)^n\cdot R_x$ seyn sollte, sogleich $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$ setzen, und man hat dann $N_x=(x^2+px+q)^n\cdot a^n R_x$, so daß man die erstere Form immer auf diese letztere zurückführen kann, nur daß in der letztern Form, $a^n R_x$ der zweite Faktor von N_x ist, wenn man N_x als ein Produkt zweier Faktoren ansehen will, von welchem $(x^2+px+q)^n$ der erste Faktor ist.

§. 12.

Integration der irrationalen Funktionen.

I$_a$.) Enthält die zu integrirende Funktion bloß $a+bx$ unter dem Wurzel-Zeichen, und kommt bloß $(a+bx)^{\frac{m}{n}}$ allein vor, so setzt man

$$a+bx=z^n, \quad \text{also} \quad b\cdot\partial x_z=nz^{n-1},$$

und die neue Funktion (von z) wird rational.

und man hat daher gefunden

$$\frac{x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)} = \frac{x}{x^2+x+1} + \frac{-x+1}{x^2+1}.$$

II. Das vorstehende gilt auch dann noch, wenn $\frac{M_x}{N_x}$ eine unecht gebrochene Funktion seyn sollte.

Ist daher ein andermal

$$N_x = (x^2+px+q)^2 \cdot R_x,$$

so daß R_x denselben Faktor x^2+px+q nicht mehr enthält, so ist

$$1) \qquad \frac{M_x}{N_x} = \frac{1}{x^2+px+q} \cdot \frac{M_x}{(x^2+px+q) \cdot R_x}.$$

Wird nun der zweite Faktor $\frac{M}{(x^2+px+q) \cdot R_x}$ (genau nach I.) in die beiden Partial-Brüche I. 1.) zerlegt, so hat man (aus 1.)

$$2) \qquad \frac{M_x}{N_x} = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^2} + \frac{M'_x}{(x^2+px+q) \cdot R_x},$$

wo A und B genau nach I. 2.) 3.) 4.) und 5.) gefunden worden sind. — Setzt man nun aber in I. 2.—5.) sowohl M'_x statt M_x, als auch A', B' statt A und B, und findet man dann M''_x in M'_x, A' und B' gerade so ausgedrückt, wie (in 6.) M'_x in M_x, A und B ausgedrückt steht, so hat man zuletzt

$$3) \qquad \frac{M_x}{N_x} = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^2} + \frac{A'x+B'}{x^2+px+q} + \frac{M''_x}{R_x}.$$

III. Und so sieht man deutlich, wie die einzelnen doppelten Partial-Brüche gefunden werden, wenn N den Faktor x^2+px+q mehr als zweimal enthält. — Namentlich sieht sich die Form D.) in der Anmerkung 2. zu §. 9.) gerechtfertigt.

§. 11.

Integration der doppelten Partial-Brüche, ohne weitere Zerlegung derselben in einfache.

I. Soll $\frac{Ax+B}{x^2+px+q} \cdot dx$ integrirt werden, so erinnere man sich, daß man (§. 6. N. 21.) das Integral von $\frac{1}{x^2+px+q}$

3) $\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}} \cdot dx = [\frac{1}{3}(a+bx) - a] \frac{2\sqrt{a+bx}}{b^2}$;

4) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a+bx}} \cdot dx = (\frac{8}{1\cdot 3}a^2 - \frac{4}{1\cdot 3}abx + \frac{1}{3}b^2x^2) \frac{2\sqrt{a+bx}}{b^3}$;

5) $\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot log \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}}$,

auch $= \frac{2}{\sqrt{-a}} \cdot \frac{1}{tg} \frac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{-a}}$;

6) $\int \frac{1}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}} \cdot dx = -\frac{2}{b\sqrt{a+bx}}$;

7) $\int \frac{x}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}} \cdot dx = (2a+bx) \cdot \frac{2}{b^2\sqrt{a+bx}}$;

8) $\int \frac{1}{x(a+bx)^{\frac{3}{2}}} \cdot dx = \frac{2}{a\sqrt{a+bx}} + \frac{1}{a} \int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}} \cdot dx.$

Dieſe letztere Formel iſt, wie man ſieht, eine Reduktions-Formel, welche dadurch unmittelbar gefunden wird, daß man

$$\frac{1}{x(a+bx)^{\frac{3}{2}}} \text{ in } \frac{1}{a}\left(\frac{a+bx}{x(a+bx)^{\frac{3}{2}}} - \frac{bx}{x(a+bx)^{\frac{3}{2}}}\right),$$

d. h. in $\frac{1:a}{x\sqrt{a+bx}} - \frac{b:a}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}$ verwandelt.

Da $\sqrt{a+bx} = \frac{a+bx}{\sqrt{a+bx}}$ und $x\sqrt{a+bx} = \frac{ax+bx^2}{\sqrt{a+bx}}$

ſo können die Integrale dieſer beiden Funktionen $\sqrt{a+bx}$ und $x\sqrt{a+bx}$ aus den Reſultaten 1.—3.) zuſammengeſetzt werden.

I$_b$.) Enthält die zu integrirende Funktion eine oder mehrere Wurzeln aus $\frac{a+bx}{p+qx}$, — z. B. $\left(\frac{a+bx}{p+qx}\right)^{\frac{m}{n}}$; oder $\left(\frac{a+bx}{p+qx}\right)^{\frac{m}{n}}$ und noch $\left(\frac{a+bx}{p+qx}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$, — ſo wird ſie dadurch rational gemacht, daß man im *erſtern* Falle

ganze Gleichung mit $\frac{1}{a}$ multiplicirt, endlich noch die Constante $\frac{1}{2}A \cdot log\, a$ addirt, so erhält man hieraus auch sogleich:

$$(D)\ldots \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\cdot dx = \frac{A}{2a}\cdot log(ax^2+bx+c) + \frac{2aB-bA}{a\cdot\sqrt{4ac-b^2}}\cdot \frac{1}{tg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}.$$

II. Soll aber $\int \frac{Px+Q}{(ax^2+bx+c)^n}\cdot dx$ gefunden werden, so sucht man dieses Integral auf das einfachere zurück zu führen, welches von derselben Form ist, welches aber im Nenner den Exponenten um eine Einheit kleiner hat. Zu dem Ende setzt man

$$\int \frac{Px+Q}{(ax^2+bx+c)^n}\cdot dx = \frac{Gx+H}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \int \frac{Q_1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\cdot dx$$

differenziirt links und rechts und vergleicht, um die noch unbestimmt gelassenen Koefficienten G, H und Q_1 gehörig zu bestimmen; und man erhält auf diesem Wege

$$Q_1 = \frac{(2n-3)(2aQ-bP)}{(n-1)(4ac-b^2)},$$

$$G = \frac{2aQ-bP}{(n-1)(4ac-b^2)} \quad \text{und} \quad H = \frac{bQ-2cP}{(n-1)(4ac-b^2)};$$

so daß man zuletzt hat*)

*) Man übersieht dieses ganze Verfahren besser, wenn man vorher $x+\frac{b}{2a}=z$ setzt, und dadurch $\int \frac{Px+Q}{(ax^2+bx+c)^n}\cdot dx$ auf $\int \frac{P'z+Q'}{(az^2+p)^n}\cdot dz$ zurückführt. Dann kommt man von selbst darauf, daß sich dieser Bruch in zwei Brüche

$$\frac{P'z}{(az^2+p)^n}\cdot dz \quad \text{und} \quad \frac{Q'}{(az^2+p)^n}\cdot dz$$

zerlegt, und daß der erstere davon sich sogleich integrirt, wenn man

$$az^2+p=u, \quad \text{also} \quad 2az\cdot dz = du$$

nimmt. Wird zuletzt statt z wieder $x+\frac{b}{2a}$ gesetzt, so erhält man die Reduktions-Formel 1.) augenblicklich.

1) $$\int \frac{Px+Q}{(ax^2+bx+c)^n}\cdot dx$$
$$= \frac{1}{(n-1)(4ac-b^2)}\cdot\left[\frac{(2aQ-bP)x+(bQ-2cP)}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right.$$
$$\left.+(2n-3)(2aQ-bP)\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\cdot dx\right].$$

Setzt man nun hier $P=0$, $Q=1$, und $n-1$ statt n, so findet man hieraus

2) $$\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\cdot dx = \frac{1}{(n-2)(4ac-b^2)}$$
$$\times\left[\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-2}}+(2n-5)2a\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-2}}\cdot dx\right].$$

Wird hier wieder $n-1$ statt n gesetzt, so führt sich die Integration von $\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-2}}\cdot dx$ auf die Integration von $\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-3}}\cdot dx$ zurück, u. s. f.; so daß man zuletzt auf das (im §. 6. N. 21. bereits gefundene) Integral $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\cdot dx$ zurückgeführt wird, so oft, was hier vorausgesetzt werden mag, n eine positive ganze Zahl ist *).

---

*) Ist n eine gebrochene Zahl >1, so führen dieselben Formeln das Integral von $\frac{Px+Q}{(ax^2+bx+c)^n}\cdot dx$ zuletzt auf die Integration der Form $\frac{1}{(ax^2+bx+c)^\nu}\cdot dx$ zurück, wo aber $\nu<1$ ist. — So z. B. dienen die hiesigen Reduktions-Formeln 1.) und 2.), um

$$\int \frac{Px+Q}{(ax^2+bx+c)^2\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}}\cdot dx$$

auf die Integration von $\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\cdot dx$ zurückzuführen, während diese letztere (im §. 6. N. 24.) bereits durchgeführt sich findet.

Beispiel. Es sey $\frac{3x^4-x+1}{(1+x^2)^3}\cdot dx$ zu integriren. — Man zerlege zuerst den Bruch in seine doppelten Partial-Brüche

$$\frac{Ax+B}{(1+x^2)^3}+\frac{A'x+B'}{(1+x^2)^2}+\frac{A''x+B''}{1+x^2}.$$

Nimmt man dazu den §. 10.) zu Hülfe, so hat man $x^2+px+q=x^2+1$, also $\alpha=0$, $\beta=1$; ferner $R_x=1$, also $r=1$, $r_1=0$; endlich $M_x=3x^4-x+1$, also $m=4$ und $m_1=-1$. — Die beiden Gleichungen zur Bestimmung von A und B (§. 10. Nr. 4. 5.) geben daher jetzt, weil $r\alpha-r_1\beta=0$ und $r_1\alpha+r\beta=1$ wird, $B=4$ und $A=-1$, so daß der erste Partial-Bruch $=\frac{-x+4}{(1+x^2)^3}$ ist. Die Gleichung 6.) des §. 10.) giebt dann noch

$$M'_x=\frac{3x^4-x+1-(-x+4)}{x^2+1}=3x^2-3;$$

so daß zunächst gefunden ist

$$\frac{3x^4-x+1}{(1+x^2)^3}=\frac{-x+4}{(1+x^2)^3}+\frac{3x^2-3}{(1+x^2)^2}.$$

Wird nun dieser Werth von M'_x statt M_x, ferner A', B' statt A und B in die Gleichungen des §. 10.) substituirt, so erhält man auf's Neue $m=-6$, $m_1=0$; während r und r_1 ihre Werthe behalten. Die Gleichungen (§. 10. Nr. 4. u. 5.) geben nun $B'=-6$ und $A'=0$, so daß der zweite Partial-Bruch $=\frac{-6}{(1+x^2)^2}$ wird. Die Gleichung 6.) des §. 10.) giebt dann

$$M''_x=\frac{3x^2-3-(-6)}{x^2+1}=3.$$

Man hat also nun gefunden

$$\frac{3x^4-x+1}{(1+x^2)^3}=\frac{-x+4}{(1+x^2)^3}-\frac{6}{(1+x^2)^2}+\frac{3}{1+x^2}.$$

Und weil hier $R_x=1$ ist, so ist dieser dritte Bruch zu gleicher Zeit schon der gesuchte Partial-Bruch. — Wollte man aber das Verfahren des §. 10.) fortsetzen, so würde man auf's neue (indem M''_x statt M_x und A'', B'' statt A, B gesetzt werden) $m=3$, $m_1=0$; also $B''=3$ und $A''=0$ finden, während $M'''_x=0$ sich ergiebt. Der vierte Bruch wird daher $=0$.

Ist aber diese Zerlegung bewirkt, so kommen wir nun an die Integration dieser einzelnen Partial-Brüche. — Zunächst hat man (nach §. 11. II. 1.) wenn $n=3$, $P=-1$, $Q=4$, $a=c=1$, $b=0$ gesetzt wird,

$$\int\frac{-x+4}{(1+x^2)^3}\cdot dx=\frac{x+\frac{1}{4}}{(1+x^2)^2}+\int\frac{3}{(1+x^2)^2}\cdot dx.$$

Weil aber das obige $-\frac{6}{(1+x^2)^2}\cdot dx$ ebenfalls integrirt werden soll, so nimmt man es sogleich mit diesem letztern Integral zusammen und hat nun

$$\int\left(\frac{-x+4}{(1+x^2)^2}-\frac{6}{(1+x^2)^2}\right)\cdot dx=\frac{x+\frac{1}{2}}{(1+x^2)^2}+\int\frac{-3}{(1+x^2)^2}\cdot dx.$$

Wird nun (in §. 11. II. 1.) $n=2$, $P=0$, $Q=-3$, $a=c=1$, und $b=0$ gesetzt, so erhält man wieder

$$\int\frac{-3}{(1+x^2)^2}\cdot dx=\frac{-\frac{3}{2}x}{1+x^2}+\int\frac{-\frac{3}{2}}{1-x^2}\cdot dx.$$

Weil aber oben auch noch $\frac{3}{1+x^2}\cdot dx$ zu integriren steht, so hat man zuletzt

$$\int\frac{3x^2-x+1}{(1+x^2)^2}\cdot dx=\frac{x+\frac{1}{2}}{(1+x^2)^2}-\frac{\frac{3}{2}x}{1+x^2}+\int\frac{\frac{3}{2}}{1+x^2}\cdot dx,$$

$$\text{also}\qquad=\frac{x+\frac{1}{2}}{(1+x^2)^2}-\frac{\frac{3}{2}x}{1+x^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{tg}x.$$

$$=\frac{-\frac{3}{2}x^3-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{(1+x^2)^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{tg}x\text{ *).}$$

Anmerkung. Ist

1) $N_x=(x-\alpha)^m\cdot R_x$,

so ist (nach I. Bd. §. 157. Anmerkung 2.)

$\partial^{m-\mu}N_\alpha=0$, $\partial^m N_\alpha=m!R_\alpha$ und $\partial^{m+\nu}N_\alpha=(m+\nu)^{m-1}\partial^\nu R_\alpha$; also kann man R_α finden, ohne R_x selbst zu haben, indem man N_x m mal hinter einander nach x ableitet, dann α statt x setzt, und noch durch m! dividirt. Dies läßt sich bei der Zerlegung in Partial-Brüche, wobei man R_α immer braucht, zuweilen mit

*) Die Rechnungen des Textes vereinfachen sich, wenn man einen neuen Veränderlichen z dadurch einführt, daß man $x+\frac{b}{2a}=z$, also $x=z-\frac{b}{2a}$ und $dx_z=1$ setzt. Es wird dann $ax^2+bx+c=az^2+p$, wenn $\frac{4ac-b^2}{4a}=p$ gesetzt worden ist. Die zu integrirende Funktion verwandelt sich daher in eine andere von der Form $\frac{Pz+Q}{(az^2+p)^n}\cdot dz$, die zwar auf demselben Wege, aber in so fern einfacher integrirt wird, als der Koefficient von z^1 im Nenner, der Null gleich ist.

Vortheil anwenden, namentlich z. B. wenn bloß $N_x=(x-\alpha)\cdot R_x$ iſt, wo man dann ſogleich $\partial N_\alpha = R_\alpha$ findet.

Aber auch außerdem laſſen ſich dieſe Sätze (I. Bd. §. 157. Anmerkung 2.) zur Zerlegung in Partial-Brüche in Anwendung bringen. — Um die verſchiedenen Formen, unter denen dieſe Anwendungen ſtatt finden können, hervorzuheben, ſey

2) $\dfrac{M_x}{N_x}$ in $\dfrac{A}{(x-\alpha)^3}+\dfrac{B}{(x-\alpha)^2}+\dfrac{C}{x-\alpha}+\dfrac{Z_x}{R_x}$

zu zerlegen, wo alſo $N_x=(x-\alpha)^3\cdot R_x$ gedacht worden iſt. Dieſe Gleichung giebt ſogleich

3) $(x-\alpha)^3\cdot Z_x = M_x - AR_x - B(x-\alpha)R_x - C(x-\alpha)^2R_x.$

Nimmt man nun von dieſer Gleichung das erſte, zweite Differential nach x, ſo erhält man (nach Anmerkung 2. zu §. 157. I. Bd.) für $x=\alpha$, außer

4) $0 = M_\alpha - A\cdot R_\alpha,$

welche aus der Gleichung 3.) ſelbſt hervorgeht, noch

5) $0 = \partial M_\alpha - A\cdot\partial R_\alpha - B\cdot R_\alpha,$

6) $0 = \partial^2 M_\alpha - A\cdot\partial^2 R_\alpha - B\cdot\partial R_\alpha - 2C\cdot R_\alpha;$

woraus nun A, B, C gefunden werden können. Die Gleichung 3.) giebt dann Z_x dazu.

Dividirt man die Gleichung 3.) durch R_x, ſo erhält man

3') $(x-\alpha)^3\cdot\dfrac{Z_x}{R_x} = \dfrac{M_x}{R_x} - A - B(x-\alpha) - C(x-\alpha)^2.$

Aus dieſer Gleichung erhält man für $x=\alpha$ ſogleich

4') $0 = \dfrac{M_\alpha}{R_\alpha} - A;$

und wenn man die 3'.) nach x ableitet und dabei $x=\alpha$ ſetzt,

5') $0 = \partial\left(\dfrac{M_x}{R_x}\right)_\alpha - B.$

Nimmt man aber von der Gleichung 3'.) ſogleich links und rechts die zweiten Ableitungen nach x, für $x=\alpha$, ſo erhält man noch

6') $0 = \partial^2\left(\dfrac{M_x}{R_x}\right)_\alpha - 2C.$

Diese Gleichungen 4′.), 5′.) und 6′.) geben nun wieder A, B und C, während die 3.) oder die 3′.) dann Z_x dazu zu liefern hat.

Dieselben Betrachtungen lassen sich auch bei der Zerlegung in doppelte Partial-Brüche in Anwendung bringen, weil der Nenner N_x dann die beiden Faktoren $(x-(\alpha+\beta i))^n$ und $(x-(\alpha-\beta i))^n$ hat; die eben gedachten Gleichungen daher alle doppelt erscheinen und deshalb auch eine doppelte Anzahl unbestimmter Koefficienten bestimmen.

Ist endlich $N_x = (px+q)^n \cdot R_x$,

so kann man $-\frac{q}{p} = \alpha$ setzen, und hat dann

$$N_x = (x-\alpha)^n \cdot p^n R_x;$$

und daher gilt das Vorstehende alles noch, nur daß $p^n R_x$ statt R_x zu stehen kommt.

Eben so kann man, wenn $N_x = (ax^2+bx+c)^n \cdot R_x$ seyn sollte, sogleich $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$ setzen, und man hat dann $N_x = (x^2+px+q)^n \cdot a^n R_x$, so daß man die erstere Form immer auf diese letztere zurückführen kann, nur daß in der letztern Form, $a^n R_x$ der zweite Faktor von N_x ist, wenn man N_x als ein Produkt zweier Faktoren ansehen will, von welchem $(x^2+px+q)^n$ der erste Faktor ist.

§. 12.

Integration der irrationalen Funktionen.

I.) Enthält die zu integrirende Funktion bloß $a+bx$ unter dem Wurzel-Zeichen, und kommt bloß $(a+bx)^{\frac{m}{n}}$ allein vor, so setzt man

$$a+bx = z^n, \quad \text{also} \quad b \cdot \partial x_z = nz^{n-1},$$

und die neue Funktion (von z) wird rational.

Kommen aber $(a+bx)^{\frac{m}{n}}$ und $(a+bx)^{\frac{p}{q}}$ zugleich vor, ſo ſetzt man

$$a+bx=z^{nq}, \quad \text{alſo} \quad b\cdot dx=nqz^{nq-1}\cdot dz$$

und die neue Funktion (von z) wird rational.

Die rationalen Funktionen werden dann nach den vorhergehenden Paragraphen integrirt.

Beiſpiel 1. Iſt z. B. $\int(3x^2-5x+8)\sqrt[3]{(5x+2)^2}\cdot dx=y$ zu finden, ſo ſetzt man $5x+2=z^3$; dann wird $5x=\frac{3z^2}{5}$, und $x=\frac{z^3-2}{5}$; ferner $3x^2-5x+8=\frac{1}{25}(3z^6-37z^3+262)$, $\sqrt[3]{(5x+2)^2}=z^2$; demnach findet ſich (nach §. 4. N. 4.)

$$y=\tfrac{1}{25}\int(3z^{10}-37z^7+262z^4)\cdot dz=\tfrac{1}{25}(\tfrac{3}{11}z^{11}-\tfrac{37}{9}z^9+\tfrac{262}{5}z^5)$$

$$=\tfrac{1}{825}[\tfrac{3}{11}(5x+2)^3-\tfrac{37}{9}(5x+2)^2+\tfrac{262}{3}(5x+2)]\cdot\sqrt[3]{(5x+2)^2}.$$

Beiſpiel 2. Iſt $\int\frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}\cdot dx=y$ zu finden, ſo ſetzt man $x=z^6$, und hat dann $dx=6z^5\cdot dz$, $\sqrt{x}=z^3$, $\sqrt[3]{x}=z^2$, $\sqrt[3]{x^2}=z^4$; alſo

$$y=\int 6\frac{1+z^3-z^4}{1+z^2}z^5\cdot dz=6\int\frac{z^5+z^3-z^9}{1+z^2}\cdot dz.$$

Dieſe gebrochene rationale Funktion von z wird nun (nach §. 8.) integrirt, indem man (in ſo fern ſie unächt gebrochen iſt) die ganze Funktion herausdividirt, dann dieſe und die übrig bleibende ächt gebrochene Funktion, jede für ſich integrirt. Man findet dann

$$y=6\int\left(-z^7+z^6+z^5-z^4+z^2-1+\frac{1}{1+z^2}\right)\cdot dz$$

$$=6\left(-\tfrac{1}{8}z^8+\tfrac{1}{7}z^7+\tfrac{1}{6}z^6-\tfrac{1}{5}z^5+\tfrac{1}{3}z^3-z+\frac{1}{tg}z\right)$$

$$=-\tfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+\tfrac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+x-\tfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+\frac{1}{tg}\sqrt[6]{x}.$$

Auf dieſem Wege findet man namentlich ſogleich noch folgende Reſultate:

1) $$\int\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\cdot dx=\frac{2}{b}\sqrt{a+bx};$$

2)

2) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx \text{ *)}$$
$$= \frac{2cx-3b}{4c^2}\sqrt{a+bx+cx^2} + \left(\frac{3b^2}{8c^2} - \frac{a}{2c}\right)\int \frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx;$$

3) $$\int \frac{x^m}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx \text{ **)} = \frac{1}{mc} x^{m-1}\sqrt{a+bx+cx^2}$$
$$- \frac{(m-\frac{1}{2})b}{mc}\int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$$
$$- \frac{(m-1)a}{mc}\int \frac{x^{m-2}}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx.$$

Mittelst dieser Formeln wird das Integral von

$$\frac{p+qx+rx^2+sx^3+\cdots}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$$

und auch von

$$(p+qx+rx^2+\cdots)\sqrt{a+bx+cx^2} \cdot dx$$

(in so fern letzteres in $\frac{(p+qx+rx^2+\cdots)(a+bx+cx^2)}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ sich verwandeln läßt) auf

$$\int \frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$$

zurückgeführt.

Ferner findet man noch

---

*) Differenziirt man $x \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}$, so erhält man

$$\partial(x \cdot \sqrt{a+bx+cx^2})_x = \frac{a+\frac{3}{2}bx+2cx^2}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Schreibt man hier den Bruch zur Rechten als die Summe dreier Brüche, nimmt man links und rechts die Integrale und setzt man auch statt $\int \frac{x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$ seinen Werth aus 1.), so erhält man sogleich die 2.).

**) Diese Formel erhält man, wenn $x^{m-1}\sqrt{a+bx+cx^2}$ differenziirt, und dabei auf analoge Weise verfahren wird.

$$\frac{a+bx}{p+qx} = z^n,$$

im andern Falle dagegen

$$\frac{a+bx}{p+qx} = z^m$$

setzt.

Soll z. B. $\int \frac{x\cdot\sqrt[3]{(1+x)^2}\cdot\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt[3]{(1-x)^2}-\sqrt[3]{(1+x)}\cdot\sqrt[6]{(1-x)^5}}\cdot dx = y$ ge-

funden werden, so kann man zuerst Zähler und Nenner durch $\sqrt{(1-x)}\cdot\sqrt[3]{(1-x)^2}$ wegdividiren, und man erhält

$$y = \int \frac{x\sqrt[3]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}}\cdot dx.$$

Nun setzt man $\frac{1+x}{1-x} = z^6$, also daß $x = \frac{z^6-1}{z^6+1}$ und $dx = \frac{12z^5}{(z^6+1)^2}$ wird. Dann erhält man

$$y = 12\int \frac{z^{12}+z^{11}+z^{10}+z^9+z^8+z^7}{(z^6+1)^3}\cdot dz,$$

so daß nur noch diese ächt gebrochene Funktion zu integriren bleibt. Diese muß aber vorher in ihre Parzial-Brüche, und deshalb muß noch früher der Nenner z^6+1 in seine Faktoren zerlegt werden. Zu letzterem Behufe sucht man die sechs Werthe von z, welche $z^6+1=0$ machen, und welche $=\sqrt[6]{-1}$ d. h. (nach I. Bd. §. 86.) $= cos\frac{2n+1}{6}\pi + i\cdot sin\frac{2n+1}{6}\pi$, sind, wenn statt n nach und nach 0, −1, +1, −2, +2 und −3 gesetzt wird. Zieht man jeden dieser sechs Werthe von z ab, so hat man die sechs einfachen Faktoren von z^6+1; und multiplicirt man immer die zwei Faktoren mit einander, welche ein reelles Produkt geben, so erhält man die drei reellen doppelten Faktoren von z^6+1, nämlich

$$(z^2-2z\cdot cos\tfrac{1}{6}\pi+1)(z^2+1)(z^2+2z\cdot cos\tfrac{1}{6}\pi+1)^*).$$

---

*) Man konnte diese Faktoren auch bekommen, wenn man daran dachte, daß $\frac{u^3+1}{u+1} = u^2-u+1$ ist; denn dann wußte man, daß $\frac{z_6+1}{z^2+1} = z^4-z^2+1$ ist, und konnte u^2-u+1 oder z^4-z^2+1 auf's Neue zerlegen.

führen kann) näher betrachten, wobei wir m und n positiv oder negativ ganz vorausſetzen *).

I. Zunächſt ſetze man $a+bx^n=z^q$; man erhält dann $x^n=\frac{z^q-a}{b}$, alſo $x^m=b^{-\frac{m}{n}}\cdot(z^q-a)^{\frac{m}{n}}$, und

$x^{m-1}\cdot dx=\frac{q}{n}b^{-\frac{m}{n}}\cdot(z^q-a)^{\frac{m}{n}-1}\cdot dz$, und die gegebene Funktion ⊙.) geht dadurch in dieſe:

$$\text{(}\bigcirc\text{)}\qquad \frac{q}{n}b^{-\frac{m}{n}}\cdot z^{p+q-1}(z^q-a)^{\frac{m}{n}-1}\cdot dz$$

über. — Trifft ſich's nun zufällig, daß $\frac{m}{n}$ eine poſitive oder

---

*) Wäre zu integriren $x^{\frac{1}{2}}(a+bx^{\frac{1}{2}})^{\frac{p}{q}}\cdot dx$, ſo würde man $x=z^6$ ſetzen, ſo daß $x^{\frac{1}{2}}=z^2$, $x^{\frac{1}{2}}=z^3$ und $dx=6z^5\cdot dz$ würde. Dann würde man erhalten (nach §. 4. N. 4.) $\int x^{\frac{1}{2}}(a+bx^{\frac{1}{2}})^{\frac{p}{q}}\cdot dx=6\int z^7(a+bx^3)^{\frac{p}{q}}\cdot dz$, und dieſe letztere Funktion wäre in der obigen $x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\cdot dx$ enthalten.

Und wäre $x^{m-1}(a+bx^{-n})^{\frac{p}{q}}\cdot dx$ zu integriren, ſo würde man $x=\frac{1}{z}$ ſetzen, ſo daß $dx=-\frac{1}{z^2}\cdot dz$, und $x^{-n}=z^n$, $x^{m-1}=z^{-m+1}$ wird. Dann hat man $\int x^{m-1}(a+bx^{-n})^{\frac{p}{q}}\cdot dx=-\int z^{-m-\frac{np}{q}-1}(b+az^n)\cdot dz$, weshalb man oben n poſitiv vorausſetzen konnte und doch auch den Fall mit behandelt hätte, in welchem n negativ ſeyn ſollte.

Und hätte man

$$x^{m-1}(ax^r+bx^n)^{\frac{p}{q}}\cdot dx$$

zu integriren, ſo würde man ſolcher Funktion die Form

$$x^{m+\frac{pr}{q}-1}(a+bx^{n-r})^{\frac{p}{q}}\cdot dx$$

geben, um ſie in die obige Form eingehen gemacht zu haben.

2) Hernach kann man auch $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c}+xz$ setzen. Man erhält dann $ax^2+bx = 2xz\sqrt{c}+x^2z^2$, kann durch x wegdividiren, und erhält wiederum x und dx in z und dz **ohne Wurzel**. — Dies Verfahren wird man in der Regel dann anwenden, wenn c positiv ist *).

3) Endlich kann man ax^2+bx+c in die Faktoren $a(x-\alpha)(x-\beta)$ zerlegen (wo α und β die beiden Werthe von x sind, welche ax^2+bx+c der Null gleich machen, und dann setzt man $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)z$. — Daraus folgt, wenn man quadrirt und durch $x-\alpha$ dividirt, $a(x-\beta) = (x-\alpha)z^2$, also werden x und dx in z und dz wiederum ohne Wurzel ausgedrückt, und dies letztere (da auch jedesmal $\sqrt{ax^2+bx+c}$ in z ohne Wurzel ausgedrückt erscheint) bewirkt, daß die neue zu integrirende Funktion in z, rational wird, und daher nach den §§. 7.—11.) integrirt werden kann. — Dies Verfahren kann man gleich bequem anwenden, es mag a positiv oder negativ seyn, wenn nur α und β reell sind.

Man integrire nun danach das einfachste aller hieher gehörigen Beispiele, nämlich $\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\cdot dx$ oder $\frac{1}{\sqrt{-ax^2+bx+c}}\cdot dx$, und sehe zu, ob jedesmal das Resultat N. 24.) oder N. 20.) des §. 6.) sich ergiebt (indem nämlich daselbst a mit c vertauscht wird), oder ob doch ein Resultat kommt, welches von jenem nur um eine Constante verschieden ist.

Vor allen diesen Rechnungen kann man aber allemal erst $x+\frac{b}{2a} = z$ setzen, damit die $\sqrt{ax^2+bx+c}$ in $\sqrt{az^2+p}$ übergehe, welche letztere in so fern einfacher ist, als der Coefficient von z^1 in ihr der Null gleich ist.

III. Kämen in einer Funktion, die integrirt werden soll,

*) Man würde aber vorher lieber $\sqrt{c}\cdot\sqrt{\left(\frac{a}{c}x^2+\frac{b}{c}x+1\right)}$ statt $\sqrt{ax^2+bx+c}$ schreiben, damit bloß $\sqrt{px^2+qx+1}$ vorkäme, um nachher $\sqrt{px^2+qx+1} = 1+xz$ setzen zu können. Dadurch würde vermieden, daß in den Rechnungen nicht immer $\sqrt{c}$ mit fortgeschleppt würde.

die beiden Wurzeln $\sqrt{a+bx}$ und $\sqrt{p+qx}$ vor, welche verschiedene Radikanden vom ersten Grade haben, so würde man $\sqrt{a+bx} = z\sqrt{p+qx}$ setzen, hätte dann $a+bx = z^2(p+qx)$, also $x = \frac{pz^2-a}{b-qz^2}$ und $dx = \frac{2(bp-aq)z}{(b-qz^2)^2}\cdot dz$. Es werden also x und dx rational in z und dz ausgedrückt; dagegen kommt statt $\sqrt{a+bx}$ jetzt $z\sqrt{p+qx}$, so daß $\sqrt{p+qx}$ mehreremale vorkommen kann. Setzt man aber statt x seinen Werth in z, so erhält man $\sqrt{p+qx} = \frac{\sqrt{bp-aq}}{\sqrt{b-qz^2}}$; und so sieht sich also die Integration des jetzigen Falles, weil in der nun zu integrirenden Funktion, $\sqrt{b-qz^2}$ vorkommt, auf den Fall II.) zurückgeführt. — Hinsichtlich des Falles, wo $(a+bx)^{\frac{m}{n}}$ und $(p+qx)^{\frac{\mu}{\nu}}$ vorkommen, s. §. 14.).

IV. Enthält aber die zu integrirende Funktion zwei solche Quadrat-Wurzeln wie $\sqrt{a+bx+cx^2}$ und $\sqrt{p+qx+rx^2}$ mit verschiedenen Radikanden vom zweiten Grade, so ist sie in seltenen Fällen nur rational zu machen (d. h. das Integral dieser Funktion wird dann nur höchst selten auf die Integration einer rationalen Funktion von z zurückgeführt werden können).

Ist in's Besondere

$$\sqrt{a+bx+cx^2}\cdot\sqrt{p+qx+rx^2} = \sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4},$$

oder ist

$$\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{\sqrt{p+qx+rx^2}} = \frac{a+bx+cx^2}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$$

zu integriren, so sind dies zwei besondere Fälle des allgemeinern Problems, wo

$$1)\qquad \frac{f_x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}\cdot dx$$

integrirt werden soll, während f_x eine gegebene algebraische ra-

$$2)\quad \int (ay+b)^m(py+q)^n\cdot dy = \frac{(ay+b)^{m+1}(py+q)^n}{(m+1)a} - \frac{np}{(m+1)a}\int (ay+b)^{m+1}(py+q)^{n-1}\cdot dy;$$

$$3)\quad \int (ay+b)^m(py+q)^n\cdot dy = \frac{(ay+b)^m(py+q)^{n+1}}{(m+n+1)p} - \frac{m(aq-bp)}{(m+n+1)p}\int (ay+b)^{m-1}(py+q)^n\cdot dy;$$

$$4)\quad \int (ay+b)^m(py+q)^n\cdot dy = \frac{(ay+b)^{m+1}(py+q)^n}{(m+n+1)a} - \frac{n(bp-aq)}{(m+n+1)a}\int (ay+b)^m(py+q)^{n-1}\cdot dy;$$

$$5)\quad \int (ay+b)^m(py+q)^n\cdot dy = \frac{(ay+b)^{m+1}(py+q)^{n+1}}{(m+1)(aq-bp)} - \frac{(m+n+2)p}{(m+1)(aq-bp)}\int (ay+b)^{m+1}(py+q)^n\cdot dy;$$

$$6)\quad \int (ay+b)^m(py+q)^n\cdot dy = \frac{(ay+b)^{m+1}(py+q)^{n+1}}{(n+1)(bp-aq)} - \frac{(m+n+2)a}{(n+1)(bp-aq)}\int (ay+b)^m(py+q)^{n+1}\cdot dy.$$

Die 1.) und 2.) bekommt man durch unmittelbares theilweiſes Integriren, d. h. unmittelbar durch Anwendung der Formel §. 4. N. 3.), indem man daſelbſt abwechſelnd $(ay+b)^m$ oder $(py+q)^n$ ſtatt ψ ſetzt (ſo wie y ſtatt x). — Nun kann man aber die Funktion $(ay+b)^{m-1}(py+q)^{n+1}$ zerlegen in $(py+q)\cdot(ay+b)^{m-1}(py+q)^n$ und dann in

$$\left[\frac{p}{a}(ay+b)+q-\frac{bp}{a}\right]\cdot(ay+b)^{m-1}(py+q)^n,$$

alſo in

$$\frac{p}{a}(ay+b)^m(py+q)^n+\frac{aq-bp}{a}(ay+b)^{m-1}(py+q)^n,$$

ſo daß das Integral der Funktion $(ay+b)^{m-1}(py+q)^{n+1}\cdot dx$ gleich iſt der Summe der Integrale aus den beiden letztern Funktionen. Subſtituirt man dies in die 1.), ſo erhält man die 3.), alſo auch die 4.) (in ſo fern die 4.) aus der 3.) hervorgeht, wenn man m mit n, a mit p, und b mit q vertauſcht).

Setzt man endlich in die 3.) jetzt m+1 ſtatt m, und findet man dann

das zur Rechten entſtehende Integral durch das zur Linken ausgedrückt, ſo hat man die 5.), alſo auch die 6.) (in ſo fern nämlich die 2.), 4.), 6.) aus den 1.), 3.), 5.) hervorgehen, wenn man m mit n, a mit p, und b mit q vertauſcht.

Cauchy leitet dieſe Reduktions-Formeln alle durch ein und daſſelbe Verfahren ab, nämlich dadurch daß er die Formel

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

in dieſer Form hinſtellt:

$$\int uv \cdot d(log\, v) = uv - \int uv \cdot d(log\, u),$$

und nun ſtatt u und v ſolche Potenzen je zweier der drei Ausdrücke $ay+b$, $py+q$, $\frac{ay+b}{py+q}$ ſetzt, daß $\int uv \cdot d(log\, v)$ allemal das verlangte $\int (ay+b)^m (py+q)^n \cdot dy$ wird.

Die Formel 1.) wird man anwenden, wenn m poſitiv, n negativ iſt; die 2.) dagegen, wenn m negativ, n aber poſitiv iſt. — Die 3.) und 4.) werden abwechſelnd mit Erfolg angewandt, wenn m und n beide poſitiv ſind. — Und die Formeln 5.) und 6.) ſind eben ſo abwechſelnd anzuwenden, wenn m und n beide negativ ſeyn ſollten. — Dann erhält man nämlich nach und nach immer abſolut niedrigere, poſitive oder negative Exponenten, bis man, wenn m und n ganze Zahlen ſind, auf Null-Exponenten, oder doch auf -1 oder $+1$ als Exponent ſtößt; — oder, wenn m oder n gebrochen iſt, auf Exponenten, welche poſitiv oder negativ ſind, dagegen abſolut zwiſchen 0 und 1 liegen. Dieſe letztern Integrale können dann oft mittelſt unendlicher Reihen gefunden werden.

IV. Setzt man in dieſen Reduktions-Formeln $y = z^\nu$ alſo $dy = \nu z^{\nu-1} dz$, ſo wie $p = 1$ und $q = 0$, ſo gehen ſie in unmittelbar brauchbare Reduktions-Formeln für $z^\mu (az^\nu + b)^n \cdot dz$ über, d. h. für die Form ⊙.), mit welcher wir dieſen Paragraphen eröffnet haben. Wir wollen auch von dieſen noch die brauchbarſten herſetzen. Sie ſind:

1) $$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p \cdot dx$$
$$= \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{b(pn+m)} - \frac{a(m-n)}{b(pn+m)} \int x^{m-n-1}(a+bx^n)^p \cdot dx;$$

Auf das hier in Rede stehende Integral, also auf die elliptischen Transcendenten, lassen sich noch zurückführen die Integrale von

$$P_x \cdot \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{\sqrt{a'+b'x+c'x^2}} \cdot dx, \quad \frac{P_x}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4+\delta x^6}} \cdot dx, \quad \frac{P_x}{\sqrt[4]{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}} \cdot dx,$$

$$P_x \cdot \sqrt[4]{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4} \cdot dx, \quad P_x \cdot (\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)^{\pm\frac{1}{2}} \cdot dx,$$

$$\frac{P_x}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\gamma x^4+\beta x^5+\alpha x^6}} \cdot dx, \quad \frac{P_x}{\sqrt{\beta+\gamma x^2+\delta x^4+\gamma x^6+\beta x^8}} \cdot dx,$$

u. d. gl. m., wo P_x eine rationale Funktion von x ist.

V. Von der Integration noch anderer irrationalen Funktionen in endlicher Form läßt sich im Allgemeinen fast gar nichts sagen, während die Grenzen dieses Werkes uns verbieten in die Betrachtung einzelner Fälle, die manchmal fast nur einzelne Beispiele genannt werden können, noch mehr einzugehen. Wir werden jedoch im §. 14.) einen hieher gehörigen Fall noch näher betrachten.

§. 13.

Reduktionsformeln für die Integration von Funktionen, welche $\sqrt{a+bx+cx^2}$ enthalten.

In vielen Fällen ist es vortheilhafter, statt direkt zu integriren, das gesuchte Integral mittelst Reduktionsformeln auf ein schon bekanntes zurückzuführen. — Namentlich sind für den Fall §. 12. II.) nachstehende Formeln bequem, nämlich

1) $$\int \frac{x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx \text{ *)}$$

$$= \frac{1}{c}\sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{b}{2c}\int \frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx;$$

*) Differenziirt man nämlich $\sqrt{a+bx+cx^2}$, so erhält man

$$\partial(\sqrt{a+bx+cx^2})_x = \frac{\frac{1}{2}b}{\sqrt{a+bx+cx^2}} + \frac{cx}{\sqrt{a+bx+cx^2}};$$

und diese Gleichung giebt die obige 1.); wenn man links und rechts die Integrale nach x nimmt.

2) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx \text{ *)}$$

$$= \frac{2cx-3b}{4c^2}\sqrt{a+bx+cx^2} + \left(\frac{3b^2}{8c^2} - \frac{a}{2c}\right)\int \frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx;$$

3) $$\int \frac{x^m}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx \text{ **)} = \frac{1}{mc} x^{m-1}\sqrt{a+bx+cx^2}$$

$$- \frac{(m-\frac{1}{2})b}{mc}\int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$$

$$- \frac{(m-1)a}{mc}\int \frac{x^{m-2}}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx.$$

Mittelst dieser Formeln wird das Integral von

$$\frac{p+qx+rx^2+sx^3+\cdots}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$$

und auch von

$$(p+qx+rx^2+\cdots)\sqrt{a+bx+cx^2} \cdot dx$$

(in so fern letzteres in $\frac{(p+qx+rx^2+\cdots)(a+bx+cx^2)}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ sich verwandeln läßt) auf

$$\int \frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$$

zurückgeführt.

Ferner findet man noch

---

*) Differenziirt man $x \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}$, so erhält man

$$\partial(x \cdot \sqrt{a+bx+cx^2})_x = \frac{a+\frac{3}{2}bx+2cx^2}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Schreibt man hier den Bruch zur Rechten als die Summe dreier Brüche, nimmt man links und rechts die Integrale und setzt man auch statt $\int \frac{x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$ seinen Werth aus 1.), so erhält man sogleich die 2.).

**) Diese Formel erhält man, wenn $x^{m-1}\sqrt{a+bx+cx^2}$ differenziirt, und dabei auf analoge Weise verfahren wird.

4) $\int \frac{1}{x\cdot\sqrt{a+bx+cx^2}}\cdot dx$ *)

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot log\,\frac{2a+bx-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+bx+cx^2}}{x}$$

auch $$= \frac{1}{\sqrt{-a}}\cdot\frac{1}{tg}\,\frac{a+\frac{1}{2}bx}{\sqrt{(-a)}\cdot\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Ueberhaupt kann man dadurch, daß man $\frac{1}{x}=z$ ſetzt, die Integration von $\frac{p+qx+rx^2+\cdots}{x\sqrt{a+bx+cx^2}}$ und auch von $\frac{(p+qx+rx^2\cdots)\sqrt{a+bx+cx^2}}{x}$ auf das Integral $\int\frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\cdot dx$ in den N.N. 20.) und 24.) des §. 6.) zurückführen, wenn man die vorſtehenden Reduktions-Formeln zu Hülfe nimmt.

§. 14.

Integration des irrationalen Binomiums $x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}.dx$ oder $(ay+b)^{\frac{\mu}{\nu}}(py+q)^{\frac{m}{n}}.dy$.

Wir wollen noch die Integration der Funktion von der Form

⊙) $$x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\cdot dx$$

(die man auch auf die Form $(\alpha y+\beta)^{\frac{\mu}{\nu}}(\gamma y+\delta)^{\frac{\varkappa}{\varrho}}\cdot dy$ zurück-

*) Man findet dies, wenn man $\frac{1}{x}=z$ ſetzt, ſo daß $dx=-\frac{1}{z^2}\cdot dz$ wird. Dadurch reducirt ſich nämlich das in Rede ſtehende Integral ſogleich auf die N.N. 20.) oder 24.) des §. 6.).

führen kann) näher betrachten, wobei wir m und n positiv oder negativ ganz voraussetzen *).

I. Zunächst setze man $a+bx^n=z^q$; man erhält dann $x^n=\frac{z^q-a}{b}$, also $x^m=b^{-\frac{m}{n}}\cdot(z^q-a)^{\frac{m}{n}}$, und

$x^{m-1}\cdot dx=\frac{q}{n}b^{-\frac{m}{n}}\cdot(z^q-a)^{\frac{m}{n}-1}\cdot dz$, und die gegebene Funktion ⊙.) geht dadurch in diese:

$$\text{(C)}\qquad \frac{q}{n}b^{-\frac{m}{n}}\cdot z^{p+q-1}(z^q-a)^{\frac{m}{n}-1}\cdot dz$$

über. — Trifft sich's nun zufällig, daß $\frac{m}{n}$ eine positive oder

---

*) Wäre zu integriren $x^{\frac{1}{2}}(a+bx^{\frac{1}{2}})^{\frac{p}{q}}\cdot dx$, so würde man $x=z^6$ setzen, so daß $x^{\frac{1}{2}}=z^2$, $x^{\frac{1}{2}}=z^3$ und $dx=6z^5\cdot dz$ würde. Dann würde man erhalten (nach §. 4. N. 4.) $\int x^{\frac{1}{2}}(a+bx^{\frac{1}{2}})^{\frac{p}{q}}\cdot dx=6\int z^7(a+bx^3)^{\frac{p}{q}}\cdot dz$, und diese letztere Funktion wäre in der obigen $x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\cdot dx$ enthalten.

Und wäre $x^{m-1}(a+bx^{-n})^{\frac{p}{q}}\cdot dx$ zu integriren, so würde man $x=\frac{1}{z}$ setzen, so daß $dx=-\frac{1}{z^2}\cdot dz$, und $x^{-n}=z^n$, $x^{m-1}=z^{-m+1}$ wird. Dann hat man $\int x^{m-1}(a+bx^{-n})^{\frac{p}{q}}\cdot dx=-\int z^{-m-\frac{np}{q}-1}(b+az^n)\cdot dz$, weshalb man oben n positiv voraussetzen konnte und doch auch den Fall mit behandelt hätte, in welchem n negativ seyn sollte.

Und hätte man

$$x^{m-1}(ax^r+bx^n)^{\frac{p}{q}}\cdot dx$$

zu integriren, so würde man solcher Funktion die Form

$$x^{m+\frac{pr}{q}-1}(a+bx^{n-r})^{\frac{p}{q}}\cdot dx$$

geben, um sie in die obige Form eingehen gemacht zu haben.

negative ganze Zahl ist, so ist diese letztere Funktion rational *), und kann nach den vorhergehenden Paragraphen integrirt werden.

Ist z. B. $\int x^9 \cdot (a+bx^3)^{\frac{p}{q}} \cdot dx$ zu finden, so ist hier $m=9$, $n=3$, also $\frac{m}{n}$ eine positive ganze Zahl (3). Die Funktion (C.) wird nun

$$\frac{q}{3b^3} z^{p+q-1}(z^q-a)^2 \cdot dz$$

und kann ohne Weiteres integrirt werden.

II. Ein andermal kann man

$$x^{m-1} \cdot (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} \cdot dx \text{ auch so schreiben:}$$

$$x^{m+\frac{np}{q}-1} \cdot (ax^{-n}+b)^{\frac{p}{q}} \cdot dx;$$

dann aber $ax^{-n}+b=z^q$ setzen, oder, mit andern Worten in der Form (C.) $-n$ statt n, ferner a und b statt b und a, endlich $m+\frac{np}{q}$ statt m; und man hat

$$\int x^{m-1} \cdot (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} \cdot dx = -\frac{q}{na} \int z^{p+q-1} \left(\frac{z^q-b}{a}\right)^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}-1} \cdot dz.$$

Trifft es sich also zufällig, daß $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ eine positive oder negative ganze Zahl ist, so hat man durch diese Substitution die zu integrirende irrationale Funktion in eine rationale umgewandelt.

Ist z. B. $\int x^4 (a+bx^3)^{\frac{1}{3}} \cdot dx$ zu integriren, so hat man $m=5$,

*) Ein besonderer Fall ist es, wenn $m=n$ ist; es findet sich dann

$$\int x^{n-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} \cdot dx = \frac{q}{nb} \int z^{p+q-1} \cdot dz$$

$$= \frac{qz^{p+q}}{nb(p+q)}$$

$$= \frac{q}{nb(p+q)} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}.$$

$n=3$, $p=1$, $q=3$; also $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=2$; folglich, wenn $ax^{-3}+b=z^3$ gesetzt wird,

$$\int x^4(a+bx^3)^{\frac{1}{3}}\cdot dx=-a^2\int\frac{z^3}{(z^3-b)^3}\cdot dz,$$

welche letztere Funktion in Partial-Brüche zerlegt, und dann integrirt wird.

III. Und wiederum versucht man es und setzt, wenn $x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\cdot dx$ integrirt werden soll, $x^n=y$; und man hat $x^m=y^{\frac{m}{n}}$, $mx^{m-1}\cdot dx=\frac{m}{n}y^{\frac{m}{n}-1}\cdot dy$.

Dadurch erhält man

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}.dx=\frac{1}{n}\int y^{\frac{m}{n}-1}\cdot(a+by)^{\frac{p}{q}}\cdot dx.$$

Dieses Integral zur Rechten läßt sich nun auf andere Integrale zurückführen von derselben Form, in welchen aber nach und nach der Exponent von y, oder der Exponent von $a+by$, oder alle beide immer einfacher und einfacher, also zuletzt entweder $+1$ oder -1, oder doch eine ächte gebrochene Zahl wird, die positiv oder negativ aber absolut <1 ist. Dieses letztere Integral ist dann entweder schon früher gefunden oder sonst noch einer Behandlung fähig.

Weil aber dieses Integral nach y in dem nachstehenden etwas allgemeineren, nämlich in

$$\int(ay+b)^m\cdot(py+q)^n\cdot dy$$

enthalten ist, wenn man sich m und n hier beliebig positiv oder negativ, ganz oder gebrochen denkt, so wollen wir die gedachten Reduktionsformeln für das letztere hinstellen. Man findet nämlich

1) $$\int(ay+b)^m(py+q)^n\cdot dy=\frac{(ax+b)^m(py+q)^{n+1}}{(n+1)p}$$
$$-\frac{ma}{(n+1)p}\int(ay+b)^{m-1}(py+q)^{n+1}\cdot dy;$$

2) $\int (ay+b)^m (py+q)^n \cdot dy = \frac{(ay+b)^{m+1}(py+q)^n}{(m+1)a}$

$$- \frac{np}{(m+1)a} \int (ay+b)^{m+1}(py+q)^{n-1} \cdot dy;$$

3) $\int (ay+b)^m (py+q)^n \cdot dy = \frac{(ay+b)^m (py+q)^{n+1}}{(m+n+1)p}$

$$- \frac{m(aq-bp)}{(m+n+1)p} \int (ay+b)^{m-1}(py+q)^n \cdot dy;$$

4) $\int (ay+b)^m (py+q)^n \cdot dy = \frac{(ay+b)^{m+1}(py+q)^n}{(m+n+1)a}$

$$- \frac{n(bp-aq)}{(m+n+1)a} \int (ay+b)^m (py+q)^{n-1} \cdot dy;$$

5) $\int (ay+b)^m (py+q)^n \cdot dy = \frac{(ay+b)^{m+1}(py+q)^{n+1}}{(m+1)(aq-bp)}$

$$- \frac{(m+n+2)p}{(m+1)(aq-bp)} \int (ay+b)^{m+1}(py+q)^n \cdot dy;$$

6) $\int (ay+b)^m (py+q)^n \cdot dy = \frac{(ay+b)^{m+1}(py+q)^{n+1}}{(n+1)(bp-aq)}$

$$- \frac{(m+n+2)a}{(n+1)(bp-aq)} \int (ay+b)^m (py+q)^{n+1} \cdot dy.$$

Die 1.) und 2.) bekommt man durch unmittelbares theilweiſes Integriren, d. h. unmittelbar durch Anwendung der Formel §. 4. N. 3.), indem man daſelbſt abwechſelnd $(ay+b)^m$ oder $(py+q)^n$ ſtatt ψ ſetzt (ſo wie y ſtatt x). — Nun kann man aber die Funktion $(ay+b)^{m-1}(py+q)^{n+1}$ zerlegen in $(py+q)\cdot(ay+b)^{m-1}(py+q)^n$ und dann in

$$\left[\frac{p}{a}(ay+b)+q-\frac{bp}{a}\right]\cdot(ay+b)^{m-1}(py+q)^n,$$

alſo in

$$\frac{p}{a}(ay+b)^m(py+q)^n + \frac{aq-bp}{a}(ay+b)^{m-1}(py+q)^n,$$

ſo daß das Integral der Funktion $(ay+b)^{m-1}(py+q)^{n+1}\cdot dx$ gleich iſt der Summe der Integrale aus den beiden letztern Funktionen. Subſtituirt man dies in die 1.), ſo erhält man die 3.), alſo auch die 4.) (in ſo fern die 4.) aus der 3.) hervorgeht, wenn man m mit n, a mit p, und b mit q vertauſcht).

Setzt man endlich in die 3.) jetzt m+1 ſtatt m, und findet man dann

Beiſpiel 1. So findet man nach und nach, wenn die Formel 1.) wiederholt angewandt wird,

$$\int a^x x^3 \cdot dx = \frac{a^x}{\log a}\left(x^3 - \frac{3}{\log a}x^2 + \frac{6}{(\log a)^2}x - \frac{6}{(\log a)^3}\right);$$

und wenn n eine poſitive ganze Zahl iſt

$$\int a^x x^n \cdot dx = \frac{a^x}{\log a} \times \left\{x^n - \frac{n}{\log a}x^{n-1} + \frac{n^{2|-1}}{(\log a)^2}x^{n-2} - \frac{n^{3|-1}}{(\log a)^3}x^{n-3} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{n!}{(\log a)^n}\right\}.$$

Beiſpiel 2. Die Formel 2.), wenn ſie wiederholt angewandt wird, giebt ferner

$$\int \frac{a^x}{x^3} \cdot dx = -\frac{a^x}{2x^2} - \frac{a^x \log a}{2x} + \frac{(\log a)^2}{2}\int \frac{a^x}{x} \cdot dx,$$

wo wegen $a^x = e^x \cdot \log a$, das Integral von $\frac{a^x}{x} \cdot dx$ ſich auf das Integral von $\frac{e^x}{x} \cdot dx$ zurückführt, auf welches in der Anmerkung zu §. 15.) der ſogenannte Integral-Logarithme zurückgeführt wird.

Iſt aber n abermals eine poſitive ganze Zahl, ſo findet man, (durch wiederholte Anwendung der Formel 2.)

$$\int \frac{a^x}{x^n} \cdot dx = -a^x \times \left\{\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{\log a}{(n-1)^{2|-1}x^{n-2}} + \frac{(\log a)^2}{(n-1)^{3|-1}x^{n-3}} + \cdots + \frac{(\log a)^{n-2}}{(n-1)^{n-1|-1}x}\right\} + \frac{(\log a)^{n-1}}{(n-1)!}\int \frac{a^x}{x} \cdot dx.$$

Beiſpiel 3. Iſt n eine poſitive oder negative gebrochene Zahl, ſo kann man beide Formeln 1.) und 2.) ohne Ende fort anwenden, ſo daß man jedesmal eine unendliche Reihe bekommt. So z. B. giebt die Formel 1.) wiederholt angewandt

$$\int \frac{a^x}{\sqrt{x}} \cdot dx = \frac{a^x}{\log a \cdot \sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{2x \cdot \log a} + \frac{1 \cdot 3}{4x^2 \cdot (\log a)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{8x^3 \cdot (\log a)^3} + \cdots\right)$$

Wo aber die Reihe abgebrochen wird, da kommt immer noch ein Integral als Ergänzungs-Glied hinzu, welches jedoch weggelaſſen werden kann, ſo oft in einer Anwendung, wenn die Conſtante für dieſe Anwendung beſtimmt iſt, für den beſtimmten Werth von x der Werth dieſes (Ergänzungs-) Integrals als klein genug nachgewieſen werden kann.

Wollte man auf daſſelbe Beiſpiel die Formel 2.) wiederholt anwenden, ſo erhielte man

2) $\int x^{m-1}(a+bx^n)^p \cdot dx$

$$= \frac{x^m(a+bx^n)^p}{pn+m} - \frac{pna}{pn+m}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}\cdot dx;$$

3) $\int x^{-m-1}(a+bx^n)^p \cdot dx$

$$= -\frac{x^{-m}(a+bx^n)^{p+1}}{am} - \frac{b(m-n-np)}{am}\int x^{-m+n-1}(a+bx^n)^p \cdot dx;$$

4) $\int x^{m-1}(a+bx^n)^{-p} \cdot dx$

$$= \frac{x^m(a+bx^n)^{-p+1}}{(p-1)na} - \frac{m+n-np}{(p-1)na}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{-p+1}\cdot dx.$$

So oft aber in allen diesen Formeln (in III. und IV.) der Nenner Null wird, so oft sind sie nicht mehr brauchbar. In der Regel sind dies aber gerade die einfacheren Fälle, in denen eine unmittelbare Integration möglich, eine Reduktion also unnöthig ist *).

Beispiel 1. Es sey $\int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx$ zu integriren, wenn m eine positive ganze Zahl ist. — Die Formel IV. 1.) giebt sogleich für $a=1$, $b=-1$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$, und wenn man $m+1$ statt m setzt

$$\text{(A)} \cdots \int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{m-2}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx.$$

Setzt man hier statt m nach und nach 3, 5, 7, etc. etc., so erhält man

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = -\tfrac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + \tfrac{2}{3}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx;$$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = -\tfrac{1}{5}x^4\sqrt{1-x^2} + \tfrac{4}{5}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx;$$

$$\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = -\tfrac{1}{7}x^6\sqrt{1-x^2} + \tfrac{6}{7}\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx;$$

u. s. w. s.

Sub-

*) Daß man diese Reduktions-Formeln 1.—4.) auch unmittelbar aus $\int u\cdot dv = uv - \int v\cdot du$ ableiten könne, wenn man noch ähnliche Hülfsmittel anwendet, wie in III.) sie gebraucht worden sind, versteht sich von selbst.

$$\int\frac{a^x}{x}\cdot dx = log\,x + \frac{x\cdot log\,a}{1} + \tfrac{1}{2}\frac{x^2(log\,a)^2}{2!} + \tfrac{1}{3}\frac{x^3(log\,a)^3}{3!} + \tfrac{1}{4}\frac{x^4(log\,a)^4}{4!} + \cdots,$$

welches, wenn man $a^x = z$ setzt, übergeht in

$$\int\frac{1}{log\,z}\cdot dz = log(log\,z) + \frac{log\,z}{1} + \tfrac{1}{2}\frac{(log\,z)^2}{2!} + \tfrac{1}{3}\frac{(log\,z)^3}{3!} + \tfrac{1}{4}\frac{(log\,z)^4}{4!} + \cdots.$$

IV. Man versucht auch zuweilen eine Funktion, in welcher e^x (oder a^x d. h. $e^x \cdot log\,a$) vorkommt, dadurch zu integriren, daß man das Integral $= e^x \cdot z$ setzt, und z noch zu bestimmen sucht. — Hat man z. B. $\int\frac{e^x x}{(1+x)^2}\cdot dx = e^x \cdot z$ gesetzt, und differenzirt man links und rechts, so ergiebt sich zur Bestimmung von z die Gleichung $\frac{x}{(1+x)^2} = dz_x + z$. — Kann man nun aus letzterer Gleichung z finden (und wie z aus einer solchen Gleichung gefunden wird, lehrt ein späteres Kapitel), findet man namentlich (sey es auch nur durch Versuche), daß dieser letztern Gleichung durch $z = \frac{1}{1+x}$ (welche $dz_1 = -\frac{1}{(1+x)^2}$ liefert) genügt wird, so hat man

$$\int\frac{e^x x}{(1+x)^2}\cdot dx = \frac{e^x}{1+x}$$

gefunden *).

§. 17.

Weitere Fortsetzung der Integration transcendenter Funktionen. — Integration trigonometrischer Funktionen.

Zu den Exponential-Funktionen gehören auch die trigonometrischen, in so fern *sin* x und *cos* x nichts anders als die Exponential-Funktionen $\frac{1}{2i}(e^{xi} - e^{-xi})$ und $\frac{1}{2}(e^{xi} + e^{-xi})$

*) Häufig kommt man auf diesem Wege nicht anders zum Ziele, als daß man durch Versuche der Gleichung in z zu genügen sucht, in so fern nämlich die systematische Auflösung derselben Gleichung die Kenntniß des hier gesuchten Integrals wiederum voraussetzt.

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = -\int \frac{1}{1-z^2}\cdot dz = -\tfrac{1}{2}log\frac{1+z}{1-z} = -\tfrac{1}{2}log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}$$

oder

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = -log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Setzt man nun in Q.) statt m zunächst 3, 5, 7, etc., so erhält man

$$\int \frac{1}{x^3\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2} + \tfrac{1}{2}log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x};$$

$$\int \frac{1}{x^5\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{4x^4} + \tfrac{3}{4}\int \frac{1}{x^3\sqrt{1-x^2}}\cdot dx;$$

$$\int \frac{1}{x^7\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{6x^6} + \tfrac{5}{6}\int \frac{1}{x^5\sqrt{1-x^2}}\cdot dx;$$

u. s. w. f.

Setzt man aber in Q.) statt m zunächst 2, 4, 6, etc. etc., so erhält man

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3x^3} + \tfrac{2}{3}\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\cdot dx;$$

$$\int \frac{1}{x^6\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{5x^5} + \tfrac{4}{5}\int \frac{1}{x^4\sqrt{1-x^2}}\cdot dx;$$

u. s. w. f.

Beispiel 3. Soll $\int \frac{x^q}{\sqrt{2cx-x^2}}\cdot dx$ gefunden werden, so schreibe man solches zunächst so: $\int x^{q-\frac{1}{2}}\cdot(2c-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot dx$; dann findet die Formel IV. 1.) sogleich ihre Anwendung, indem man $a=2c$, $b=-1$, $n=1$, $m=q+\frac{1}{2}$ und $p=-\frac{1}{2}$ setzt. Man erhält

$$\int x^{q-\frac{1}{2}}\cdot(2c-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot dx = -\frac{x^{q-\frac{1}{2}}(2c-x)^{\frac{1}{2}}}{q} + \frac{2c(q-\frac{1}{2})}{q}\int x^{q-\frac{1}{2}}(2c-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot dx;$$

oder

$$\int \frac{x^q}{\sqrt{2cx-x^2}}\cdot dx = -\frac{1}{q}x^{q-1}\sqrt{2cx-x^2} + \frac{2q-1}{q}c\int \frac{x^{q-1}}{\sqrt{2cx-x^2}}\cdot dx,$$

welche Reduktions-Formel so lange angewandt werden kann, bis der Exponent von x im Zähler entweder 0 oder doch <1 ist.

Beispiel 4. Soll $\int \frac{1}{(z^2+\beta^2)^m}\cdot dz$ oder $\int (z^2+\beta^2)^{-m}\cdot dz$ gefun-

Soll also $\int(sin(px+q))^2 \cdot dx$ gefunden werden, so nimmt man die Formel $(sin(px+q))^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2(px+q)$ und hat sogleich

7) $$\int(sin(px+q))^2 \cdot dx = \tfrac{1}{2}x - \frac{1}{4p} \cdot sin\, 2(px+q).$$

Eben so findet sich

8) $$\int(cos(px+q))^2 \cdot dx = \tfrac{1}{2}x + \frac{1}{4p} \cdot sin\, 2(px+q).$$

III. Ganze positive Potenzen von *sin* x und *cos* x (und dann auch von *sin*(px+q) und *cos*(px+q)) können dadurch integrirt werden, daß man sie in Kosinus und Sinus von Vielfachen der Bogen umwandelt. Für die Potenzen der Kosinus hat man die Formel

1) $$2^{n-1} \cdot (cos\, x)^n = cos\, nx + n_1 \cdot cos(n-2)x + n_2 \cdot cos(n-4)x + n_3 \cdot cos(n-6)x + n_4 \cdot cos(n-8)x + \cdots,$$

wenn man, im Falle n ungerade ist, bei dem mit *cos* x afficirten Gliede abbricht, dagegen, so oft n gerade ist, bei dem Gliede *cos* 0x oder 1 aufhört, dessen Koefficienten aber nur zur Hälfte nimmt*), während n_1, n_2, n_3, etc. etc. die Binomial-Koefficienten der n^{ten} Potenz eines Binomiums vorstellen, so daß z. B. $n_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ gedacht ist.

Für n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc. etc. erhält man hieraus:

$cos\, x = cos\, x;$

$2(cos\, x)^2 = cos\, 2x + 1;$

$4(cos\, x)^3 = cos\, 3x + 3cos\, x;$

---

*) Man erhält diese Formel, wenn man von $2cos\, x = e^{xi} + e^{-xi}$ I. Bd. §. 70. V. VI.) ausgeht, diese Gleichung zur n^{ten} Potenz erhebt, rechts den binomischen Lehrsatz anwendet, und in dieser Entwickelungs-Reihe immer diejenigen zwei Glieder zusammenfaßt, welche vom ersten und letzten Gliede gleich weit abstehen, welche also auch gleiche (Binomial-) Koefficienten haben. Diese zwei Glieder lassen sich nämlich immer in die Form $n_q[e^{(n-2q)i} + e^{-(n-2q)i}]$ zusammenfassen und geben dann $2n_q \cdot cos(n-2q)$, wiederum nach I. Bd. §. 70. V. VI.).

$8(cos\,x)^4 = cos\,4x + 4cos\,2x + 3;$

$16(cos\,x)^5 = cos\,5x + 5cos\,3x + 10cos\,x;$

$32(cos\,x)^6 = cos\,6x + 6cos\,4x + 15cos\,2x + 10;$

$64(cos\,x)^7 = cos\,7x + 7cos\,5x + 21cos\,3x + 35cos\,x;$

u. s. w. f.

Für die Potenzen der Sinus aber hat man die Formeln

2) wenn n ungerade ist

$$2^{n-1}i^{n-1}\cdot(sin\,x)^n =$$

$$sin\,nx - n_1\,sin(n-2)x + n_2\,sin(n-4)x - n_3\,sin(n-6)x + \cdots$$

3) wenn n gerade

$$2^{n-1}i^n\cdot(sin\,x)^n =$$

$$cos\,nx - n_1 cos(n-2)x + n_2 cos(n-4)x - n_3 cos(n-6)x + \cdots$$

sobald man nur zur Rechten keine negativen Bogen zuläßt, sondern die Reihe abbricht, so wie der letzte positive Bogen erschienen ist, während i die $\sqrt{-1}$ vorstellt, so daß für $n = 2\mu+1$ $i^{n-1} = i^{2\mu} = (-1)^\mu = \mp 1$, dagegen für $n = 2\mu$ $i^n = i^{2\mu} = (-1)^\mu = \mp 1$ wird. In der Formel 3.) darf man noch überdies von dem letzten Gliede nur die Hälfte nehmen *), wie die Entwickelung der Formel lehrt. —

Für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, etc. etc. erhält man hieraus in's Besondere

$sin\,x = +sin\,x;$

$2(sin\,x)^2 = -cos\,2x + 1;$

$4(sin\,x)^3 = -sin\,3x + 3sin\,x;$

$8(sin\,x)^4 = +cos\,4x - 4cos\,2x + 3;$

---

*) Diese beiden Formeln 2.) und 3.) erhält man ganz auf dieselbe Weise wie die 1.) — Man geht nämlich von der Gleichung $2i\cdot sin\,x = e^{xi} - e^{-xi}$ aus, erhebt solche zur n^{ten} Potenz, wendet zur Rechten den binomischen Lehrsatz an, und kann dann jedesmal das Paar von Gliedern, welche gleich weit vom ersten und letzten Gliede abstehen, zusammenfassen. Solches Paar giebt einen Sinus, wenn n ungerade, einen Kosinus dagegen, wenn n gerade ist. Und ist n gerade, so giebt es jedesmal noch ein mittleres Glied, welches keinen Geführten findet, so daß es als die Hälfte seines Doppelten dasteht.

Dieſes letztere Integral $\int \frac{x^2}{\log x} \cdot dx$ läßt ſich nach derſelben Formel nicht weiter mehr reduciren.

Anmerkung. Die Funktion $\frac{x^m}{\log x} \cdot dx$, auf welche ſich die Integration von $\frac{x^m}{(\log x)^n} \cdot dx$ zurückzieht, ſo oft n eine poſitive ganze Zahl iſt, ſoll weiter unten bei der Integration mittelſt unendlicher Reihen, noch einmal betrachtet werden. Setzt man $x^{m+1} = z$, ſo hat man $x^m \cdot dx = \frac{1}{m+1} \cdot dz$, $(m+1)\log x = \log z$, und man erhält

$$\int \frac{x^m}{\log x} \cdot dx = \int \frac{1}{\log z} \cdot dz.$$

Und ſetzt man hier wieder $z = e^u$, ſo daß $dz = e^u \cdot du$ wird, ſo findet ſich noch

$$\int \frac{x^m}{\log x} \cdot dx = \int \frac{1}{\log z} \cdot dz = \int \frac{e^u}{u} \cdot du.$$

Dieſes Beiſpiel iſt übrigens unter dem Namen des Integral-Logarithmens bekannt.

So ſchwierig und in endlicher Form unmöglich aber $\frac{1}{\log z} \cdot dz$ zu integriren iſt, ſo leicht integrirt ſich $\log z \cdot dz$, indem man in der Formel (§. 4. N. 3.), welche $\int \varphi_z \cdot \psi_z \cdot dz$ liefert, $\psi = 1$, alſo $\int \psi \cdot dz = z$ ſetzt. Man erhält dann ſogleich

$$\int \log z \cdot dz = z \cdot \log z - z = z(-1 + \log z).$$

Daſſelbe geht auch aus der im Texte vorſtehenden Formel 1.) hervor, wenn man $n = 1$ ſetzt.

§. 16.

Fortſetzung der Integration tranſcendenter Funktionen. — Integration einiger Exponential-Funktionen.

I. Zunächſt hat man (nach §. 5. N. 3.)

$$1) \qquad \int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{log\, a}.$$

Hernach kann man die Funktion $P \cdot dx$ integriren, ſo oft P eine algebraiſche Funktion von a^x iſt. Setzt man nämlich $a^x = u$, ſo hat man $a^x \cdot dx \cdot log\, a = du$, alſo $dx = \frac{du}{u \cdot log\, a}$ und P geht in P_u über; ſo daß man hat

$$2) \qquad \int P \cdot dx = \frac{1}{log\, a} \cdot \int \frac{P_u}{u} \cdot du.$$

So oft daher das letztere Integral gefunden werden kann, ſo oft läßt ſich auch das erſtere finden.

Beiſpiel. So würde man z. B. erhalten

$$\int \frac{a^x}{\sqrt{1-a^{2x}}} \cdot dx = \frac{1}{log\, a} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot du = \frac{1}{log\, a} \cdot \frac{1}{sin}(a^x).$$

II. Iſt dann $a^x x^n \cdot dx$ zu integriren, ſo integrirt man wieder theilweiſe, d. h. man wendet die Formel §. 4. N. 3.) an, indem man entweder $a^x = \psi_x$, oder $x^n = \psi_x$ ſetzt. Man erhält dann ſogleich, weil im erſtern Falle $\int \psi_x \cdot dx = \frac{a^x}{log\, a}$, im andern Falle dagegen $\int \psi_x \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ iſt,

$$1) \quad \int a^x x^n \cdot dx = \frac{a^x x^n}{log\, a} - \frac{n}{log\, a} \int a^x x^{n-1} \cdot dx;$$

$$2) \quad \int a^x x^n \cdot dx = \frac{a^x x^{n+1}}{n+1} - \frac{log\, a}{n+1} \int a^x x^{n+1} \cdot dx.$$

Die 1.) dient als Reduktions-Formel, wenn n poſitiv, die 2.) dagegen leiſtet daſſelbe, wenn n negativ iſt.

Beiſpiel 1. So findet man nach und nach, wenn die Formel 1.) wiederholt angewandt wird,

$$\int a^x x^3 \cdot dx = \frac{a^x}{\log a}\left(x^3 - \frac{3}{\log a}x^2 + \frac{6}{(\log a)^2}x - \frac{6}{(\log a)^3}\right);$$

und wenn n eine poſitive ganze Zahl iſt

$$\int a^x x^n \cdot dx = \frac{a^x}{\log a} \times \left\{x^n - \frac{n}{\log a}x^{n-1} + \frac{n^{2|-1}}{(\log a)^2}x^{n-2} - \frac{n^{3|-1}}{(\log a)^3}x^{n-3} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{n!}{(\log a)^n}\right\}.$$

Beiſpiel 2. Die Formel 2.), wenn ſie wiederholt angewandt wird, giebt ferner

$$\int \frac{a^x}{x^3} \cdot dx = -\frac{a^x}{2x^2} - \frac{a^x \log a}{2x} + \frac{(\log a)^2}{2}\int \frac{a^x}{x} \cdot dx,$$

wo wegen $a^x = e^x \cdot \log a$, das Integral von $\frac{a^x}{x} \cdot dx$ ſich auf das Integral von $\frac{e^x}{x} \cdot dx$ zurückführt, auf welches in der Anmerkung zu §. 15.) der ſogenannte Integral-Logarithme zurückgeführt wird.

Iſt aber n abermals eine poſitive ganze Zahl, ſo findet man, (durch wiederholte Anwendung der Formel 2.)

$$\int \frac{a^x}{x^n} \cdot dx = -a^x \times \left\{\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{\log a}{(n-1)^{2|-1}x^{n-2}} + \frac{(\log a)^2}{(n-1)^{3|-1}x^{n-3}} + \cdots + \frac{(\log a)^{n-2}}{(n-1)^{n-1|-1}x}\right\} + \frac{(\log a)^{n-1}}{(n-1)!}\int \frac{a^x}{x} \cdot dx.$$

Beiſpiel 3. Iſt n eine poſitive oder negative gebrochene Zahl, ſo kann man beide Formeln 1.) und 2.) ohne Ende fort anwenden, ſo daß man jedesmal eine unendliche Reihe bekommt. So z. B. giebt die Formel 1.) wiederholt angewandt

$$\int \frac{a^x}{\sqrt{x}} \cdot dx = \frac{a^x}{\log a \cdot \sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{2x \cdot \log a} + \frac{1 \cdot 3}{4x^2 \cdot (\log a)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{8x^3 \cdot (\log a)^3} + \cdots\right)$$

Wo aber die Reihe abgebrochen wird, da kommt immer noch ein Integral als Ergänzungs-Glied hinzu, welches jedoch weggelaſſen werden kann, ſo oft in einer Anwendung, wenn die Conſtante für dieſe Anwendung beſtimmt iſt, für den beſtimmten Werth von x der Werth dieſes (Ergänzungs-) Integrals als klein genug nachgewieſen werden kann.

Wollte man auf daſſelbe Beiſpiel die Formel 2.) wiederholt anwenden, ſo erhielte man

$$\int \frac{a^x}{\sqrt{x}} \cdot dx = 2a^x \sqrt{x}\left(1 - \frac{2x\log a}{1\cdot 3} + \frac{4x^2(\log a)^2}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{8x^3(\log a)^3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \cdots\right),$$

wo jedoch hinſichtlich des Ergänzungs-Integrals dieſelbe Bemerkung gemacht werden muß, wie kurz vorher.

III. Iſt $(P_x \cdot a^x) \cdot dx$ zu integriren, wo P_x irgend eine rationale ganze oder gebrochene Funktion von x vorſtellt, ſo kann man ſtatt a^x die ihr gleiche unendliche Reihe ſetzen und man erhält

$$\int P_x \cdot a^x \cdot dx = \int P_x \cdot dx + \frac{\log a}{1}\int xP_x \cdot dx + \frac{(\log a)^2}{2!}\int x^2 P_x \cdot dx + \frac{(\log a)^3}{3!}\int x^3 P_x \cdot dx + \frac{(\log a)^4}{4!}\int x^4 P_x \cdot dx + \cdots,$$

ſo daß das geſuchte Integral auf dieſe Integrale der rationalen algebraiſchen Funktionen zur Rechten zurückgebracht ſich ſieht. — Freilich muß man in den Anwendungen, wenn die Conſtante dem Falle der Anwendung gemäß beſtimmt iſt, erſt unterſuchen, ob dieſe für $\int P_x \cdot a^x \cdot dx$ erhaltene unendliche Reihe, für den beſtimmten Werth von x auch wirklich convergent iſt.

Beiſpiel 1. Auf dieſem Wege findet ſich

$$\int (x^n a^x) \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}\log a}{1\cdot(n+2)} + \frac{x^{n+3}(\log a)^2}{2!(n+3)} + \frac{x^{n+4}(\log a)^3}{3!(n+4)} + \cdots.$$

Sollte aber n negativ ganz ſeyn, z. B. $n = -r$, ſo würde eines dieſer Glieder die Form $\frac{x^0 \cdot (\log a)^r}{r!\,0}$ annehmen. Daſſelbe Glied iſt aber das Integral von dem Gliede $\frac{x^{-1}\cdot(\log a)^r}{r!}$ und giebt daher, unmittelbar integrirt, $\frac{(\log a)^r}{r!}\log x$, welches alſo an die Stelle von $\frac{x^0\cdot(\log a)^r}{r!\,0}$ geſetzt werden muß.

Beiſpiel 2. Man wendet dieſe Integration durch unendliche Reihen auch auf das Integral von $\frac{a^x}{x}\cdot dx$, auf welches ſich der Integral-Logarithme $\int \frac{1}{\log z}\cdot dz$ (nach Anmerkung zu §. 15.) zurückzieht, an. Man hat dann

$$\cdot\cdot dx = \log x + \frac{x \cdot \log a}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^2(\log a)^2}{2!} + \frac{1}{3}\frac{x^3(\log a)^3}{3!} + \frac{1}{4}\frac{x^4(\log a)^4}{4!} + \cdots,$$

ches, wenn man $a^x = z$ setzt, übergeht in

$$\frac{1}{\log z} \cdot dz = \log(\log z) + \frac{\log z}{1} + \frac{1}{2}\frac{(\log z)^2}{2!} + \frac{1}{3}\frac{(\log z)^3}{3!} + \frac{1}{4}\frac{(\log z)^4}{4!} + \cdots.$$

IV. Man versucht auch zuweilen eine Funktion, in wel- r e^x (oder a^x d. h. $e^x \cdot \log a$) vorkommt, dadurch zu inte- ren, daß man das Integral $= e^x \cdot z$ setzt, und z noch zu timmen sucht. — Hat man z. B. $\int \frac{e^x x}{(1+x)^2} \cdot dx = e^x \cdot z$ ge- t, und differenziirt man links und rechts, so ergiebt sich zur stimmung von z die Gleichung $\frac{x}{(1+x)^2} = \partial z_x + z$. — nn man nun aus letzterer Gleichung z finden (und wie z s einer solchen Gleichung gefunden wird, lehrt ein späteres pitel), findet man namentlich (sey es auch nur durch Ver- he), daß dieser letztern Gleichung durch $z = \frac{1}{1+x}$ (welche $_x = -\frac{1}{(1+x)^2}$ liefert) genügt wird, so hat man

$$\int \frac{e^x x}{(1+x)^2} \cdot dx = \frac{e^x}{1+x}$$

unden *).

§. 17.

itere Fortsetzung der Integration transcendenter Funktionen. — Integration trigonometrischer Funktionen.

Zu den Exponential-Funktionen gehören auch die trigono- trischen, in so fern $\sin x$ und $\cos x$ nichts anders als die ponential-Funktionen $\frac{1}{2i}(e^{xi} - e^{-xi})$ und $\frac{1}{2}(e^{xi} + e^{-xi})$

*) Häufig kommt man auf diesem Wege nicht anders zum Ziele, als man durch Versuche der Gleichung in z zu genügen sucht, in so fern nlich die systematische Auflösung derselben Gleichung die Kenntniß des r gesuchten Integrals wiederum voraussetzt.

Dieselben Resultate würde man aber auch sogleich bekommen, wenn man statt $sin\,bx$, $cos\,bx$ ihre Exponential-Ausdrücke setzen wollte.

VII. Im Allgemeinen kann man bei jeder zu integrirenden trigonometrischen Funktion von x, so wie dies bisher schon öfter geschehen ist, irgend einen Sinus, Kosinus, irgend eine Tangente etc. etc. von x, einem neuen Veränderlichen z gleich setzen, und häufig wird dadurch das Integral auf ein irrationales, zuweilen auch auf ein rationales zurückgeführt, welches nach den vorhergehenden Paragraphen gefunden werden kann. Auf diesem Wege findet sich z. B. indem man $sin\,x = z$ oder $cos\,x = y$ setzt,

$$\int \frac{1}{a+b\cdot cos\,x}\cdot dx = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\cdot log\,\frac{b+a\cdot cos\,x+\sqrt{b^2-a^2}\cdot sin\,x}{a+b\cdot cos\,x}$$

$$\text{auch} \quad = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{1}{cos}\left(\frac{b+a\cdot cos\,x}{a+b\cdot cos\,x}\right)\text{*)}.$$

§. 18.

Integration durch unendliche Reihen.

Wenn aber alle Versuche zur Integration einer gegebenen Funktion in endlicher (geschlossener) Form mißlingen, so sucht man das Integral mittelst unendlicher Reihen ausgedrückt zu erhalten.

I. Dazu kann man zunächst die allgemeine Integrations-Formel des §. 2.) gebrauchen.

II. Um aber bequemere Reihen zu bekommen, sucht man lieber die gegebene Funktion vor ihrer Integration in unendliche Reihen zu verwandeln, und integrirt dann jedes Glied dieser Reihe.

---

*) Auf dieses Integral kann man wieder $\int \frac{1}{p+q\cdot sin\,x^2}\cdot dx$ zurückführen, indem man $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cos\,2x$ statt $sin\,x^2$ schreibt, und dann $2x = y$ setzt.

Soll also $\int(sin(px+q))^2 \cdot dx$ gefunden werden, so nimmt man die Formel $(sin(px+q))^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2(px+q)$ und hat sogleich

7) $\int(sin(px+q))^2 \cdot dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4p} \cdot sin\, 2(px+q)$.

Eben so findet sich

8) $\int(cos(px+q))^2 \cdot dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4p} \cdot sin\, 2(px+q)$.

III. Ganze positive Potenzen von *sin* x und *cos* x (und dann auch von *sin*(px+q) und *cos*(px+q)) können dadurch integrirt werden, daß man sie in Kosinus und Sinus von Vielfachen der Bogen umwandelt. Für die Potenzen der Kosinus hat man die Formel

1) $2^{n-1} \cdot (cos\, x)^n = cos\, nx + n_1 \cdot cos(n-2)x + n_2 \cdot cos(n-4)x + n_3 \cdot cos(n-6)x + n_4 \cdot cos(n-8)x + \cdots$,

wenn man, im Falle n ungerade ist, bei dem mit *cos* x afficirten Gliede abbricht, dagegen, so oft n gerade ist, bei dem Gliede *cos* 0x oder 1 aufhört, dessen Koefficienten aber nur zur Hälfte nimmt*), während n_1, n_2, n_3, etc. etc. die Binomial-Koefficienten der n^{ten} Potenz eines Binomiums vorstellen, so daß z. B. $n_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ gedacht ist.

Für n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc. etc. erhält man hieraus:

$cos\, x = cos\, x$;

$2(cos\, x)^2 = cos\, 2x + 1$;

$4(cos\, x)^3 = cos\, 3x + 3cos\, x$;

---

*) Man erhält diese Formel, wenn man von $2cos\, x = e^{xi} + e^{-xi}$ I. Bd. §. 70. V. VI.) ausgeht, diese Gleichung zur n^{ten} Potenz erhebt, rechts den binomischen Lehrsatz anwendet, und in dieser Entwickelungs-Reihe immer diejenigen zwei Glieder zusammenfaßt, welche vom ersten und letzten Gliede gleich weit abstehen, welche also auch gleiche (Binomial-) Koefficienten haben. Diese zwei Glieder lassen sich nämlich immer in die Form $n_a[e^{(n-2a)i} + e^{-(n-2a)i}]$ zusammenfassen und geben dann $2n_a \cdot cos(n-2a)$, wiederum nach I. Bd. §. 70. V. VI.).

$8(cos\,x)^4 = cos\,4x + 4cos\,2x + 3;$
$16(cos\,x)^5 = cos\,5x + 5cos\,3x + 10cos\,x;$
$32(cos\,x)^6 = cos\,6x + 6cos\,4x + 15cos\,2x + 10;$
$64(cos\,x)^7 = cos\,7x + 7cos\,5x + 21cos\,3x + 35cos\,x;$
u. s. w. f.

Für die Potenzen der Sinus aber hat man die Formeln

2) wenn n ungerade ist

$2^{n-1}i^{n-1}\cdot(sin\,x)^n =$
$sin\,nx - n_1\,sin(n-2)x + n_2\,sin(n-4)x - n_3\,sin(n-6)x + \cdots;$

3) wenn n gerade

$2^{n-1}i^n\cdot(sin\,x)^n =$
$cos\,nx - n_1 cos(n-2)x + n_2 cos(n-4)x - n_3 cos(n-6)x + \cdots;$

sobald man nur zur Rechten keine negativen Bogen zuläßt, sondern die Reihe abbricht, so wie der letzte positive Bogen erschienen ist, während i die $\sqrt{-1}$ vorstellt, so daß für $n = 2\mu+1$ $i^{n-1} = i^{2\mu} = (-1)^\mu = \mp 1$, dagegen für $n = 2\mu$ $i^n = i^{2\mu} = (-1)^\mu = \mp 1$ wird. In der Formel 3.) darf man noch überdies von dem letzten Gliede nur die Hälfte nehmen *), wie die Entwickelung der Formel lehrt. —

Für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$ etc. etc. erhält man hieraus in's Besondere

$sin\,x = +sin\,x;$
$2(sin\,x)^2 = -cos\,2x + 1;$
$4(sin\,x)^3 = -sin\,3x + 3sin\,x;$
$8(sin\,x)^4 = +cos\,4x - 4cos\,2x + 3;$

*) Diese beiden Formeln 2.) und 3.) erhält man ganz auf dieselbe Weise wie die 1.) — Man geht nämlich von der Gleichung $2i\cdot sin\,x = e^{xi} - e^{-xi}$ aus, erhebt solche zur n^{ten} Potenz, wendet zur Rechten den binomischen Lehrsatz an, und kann dann jedesmal das Paar von Gliedern, welche gleich weit vom ersten und letzten Gliede abstehen, zusammenfassen. Solches Paar giebt einen Sinus, wenn n ungerade, einen Kosinus dagegen, wenn n gerade ist. Und ist n gerade, so giebt es jedesmal noch ein mittleres Glied, welches keinen Gefährten findet, so daß es als die Hälfte seines Doppelten dasteht.

$16(\sin x)^5 = +\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x;$
$32(\sin x)^6 = -\cos 6x + 6\cos 4x - 15\cos 2x + 10;$
$64(\sin x)^7 = -\sin 7x + 7\sin 5x - 21\sin 3x + 35\sin x;$
u. s. w. f.

Ist also z. B. zu integriren $(\cos x)^4 \cdot dx$, so hat man
$\int(\cos x)^4 \cdot dx = \frac{1}{4}\int\cos 4x \cdot dx + \frac{1}{2}\cos 2x \cdot dx + \int\frac{3}{8} \cdot dx$
$= \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x.$
Ist aber zu integriren $(\sin x)^3 \cdot dx$, so findet sich
$\int(\sin x)^3 \cdot dx = -\frac{1}{4}\int\sin 3x \cdot dx + \frac{3}{4}\int\sin x \cdot dx$
$= +\frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x.$

IV. Soll das Produkt $\sin x^m \cdot \cos x^n \cdot dx$ integrirt werden so stehen verschiedene Wege offen.

A. Setzt man nämlich $\sin x = z$, so hat man $\cos x = \sqrt{1-z^2} = (1-z^2)^{\frac{1}{2}}$ und $\cos x \cdot dx = dz$, also $dx = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot dz$; folglich wird

1) $$\int \sin x^m \cos x^n \cdot dx = \int z^m \cdot (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot dz.$$

Hätte man aber $\cos x = u$ gesetzt, so daß $-\sin x \cdot dx = du$, $\sin x = (1-u^2)^{\frac{1}{2}}$ und $dx = -(1-u^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot du$ geworden wäre, so würde man erhalten haben

2) $$\int \sin x^m \cos x^n \cdot dx = -\int u^n (1-u^2)^{\frac{m-1}{2}} \cdot du.$$

Jedes dieser beiden Integrale zur Rechten in 1.) und 2.) gehört nun zu denen, welche wir im §. 14.) bereits behandelt haben. — Sind aber m und n positive oder negative ganze Zahlen, und ist n ungerade, so ist das Integral in 1.) zur Rechten rational und kann ohne Weiteres integrirt werden; ist dagegen m ungerade, so wird das Integral in 2.) zur Rechten rational und sogleich (nach §§. 7.—11.) gefunden. — Sind aber m und n beide gerade Zahlen (positiv oder negativ), so führen die Reduktions-Formeln des §. 14. IV.), wenn solche wiederholt angewandt werden, das Integral sogleich auf $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ oder

Diese Reihe convergirt schnell, wenn x ziemlich groß ist; will man aber haben, daß die für dieses Integral zu findende Reihe dann schnell convergir wenn x von 1 nur wenig verschieden, also wenn $x-1$ sehr klein ist, so setze man $x-1=u$, so daß $x=1+u$, $x^2-1=2u+u^2$ wird, ordne $(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ d. h. $(2u+u^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Lehrsatz nach steigenden Potenzen von u, und integrire dann. Dies giebt

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\cdot dx = \left(1-\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{u}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{u^2}{4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\cdot\frac{u^3}{8}+\ldots\right)\sqrt{2u}$$

wo statt u noch $x-1$ gesetzt werden muß.

III. Da es aber überhaupt nur darauf ankommt, die zu integrirende Funktion in eine Reihe integrirbarer Glieder zu verwandeln, so wird man nicht in allen Fällen gerade nach Potenzen von x, oder nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ ordnen, sondern nur in integrirbare Glieder und mit dem Vorbedacht, daß man im Endresultate Reihen bekommt, welche für den besondere Zweck, den man gerade sich gegeben hat, bequem berechenbar sind.

Wollte man also z. B. $\frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx$ integriren (welches Integral zu den elliptischen Transcendenten gehört), und wollte man das Integral haben für den Fall, daß e sehr klein ist, so würde man $\sqrt{1-e^2x^2}$ nach steigenden Potenzen von e ordnen (mittelst des binomischen Lehrsatzes) und dann die einzelnen Glieder, welche von der Form $\frac{x^{2m}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot e^{2m}$ sind, nach dem Verfahren des §. 14.) Beispiel 1.) integriren. Man erhält dann

$$\int \frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = \frac{1}{sin}x+\tfrac{1}{2}e^2\left(\tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}-\tfrac{1}{2}\frac{1}{sin}x\right)$$
$$+\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}e^4\left[\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{sin}x\right]$$
$$+\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}e^6\left[\left(\frac{1}{6}x^5+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{sin}\right.$$
$$+ \text{ etc. etc. etc.}$$

Soll aber dasselbe Integral gefunden werden für den Fall, daß e von 1 nur sehr wenig verschieden ist, also daß $1-e$ sehr klein ist, so kann man $\frac{1-x}{1+x}=u$ setzen, so daß u sehr klein ist, die gegebene Funktion

$$\frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx \text{ umformen, dann hiervon mittelst des bino-}$$

…hen Lehrsatzes den zweiten Faktor nach Potenzen des sehr kleinen n ordnen, …nd man bekommt lauter Glieder von der Form

$$(\odot)\cdots \qquad \frac{\sqrt{1-ex}}{(1+x)^{\mu}\sqrt{1-x}}\cdot n^{\mu}$$

… integriren.

Und hätte man $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(a+x)}}\cdot dx$ zu integriren, so würde man $\frac{1}{\sqrt{a+x}} = (a+x)^{-\frac{1}{2}}$ nach Potenzen von x entwickeln, und dann lauter …ieder von der Form $B\frac{x^{\mu}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx$ zu integriren haben.

Sollte aber $\frac{1}{\sqrt{(2cx-x^2)(b-x)}}\cdot dx$ integrirt werden, so könnte man $\frac{1}{\sqrt{b-x}}$ oder $(b-x)^{-\frac{1}{2}}$ nach Potenzen von x entwickeln, und man …te dann lauter Glieder von der Form

$$B\frac{x^{\mu}}{\sqrt{2cx-x^2}}\cdot dx$$

… integriren, was nach den Beispielen zu §. 14.) geschieht.

Diese Beispiele gehören übrigens alle zu den elliptischen Transcendenten.

IV. Hat man aber eine Reihe von Gliedern zu integriren, welche sich auf diese Form bringen läßt, nämlich

$$(\odot)\cdots \quad (A_0+A_1U_x+A_2U_x^2+A_3U_x^3+A_4U_x^4+\cdots)V_x\cdot dx,$$

so sehe man zu, ob sich nicht $\frac{V_x}{1-aU_x}\cdot dx$ werde in endlicher Form integriren lassen, verwandle dann dieses Integral in eine Reihe, die nach ganzen Potenzen von a fortläuft, und setze zuletzt in dieser Reihe statt der Potenzen a^0, a^1, a^2, a^3, a^4 etc. etc. bezüglich die Koefficienten A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 etc. etc. und man hat das Integral der Reihe ⊙.).

Es ist nämlich das Integral der Reihe ⊙.) offenbar

$$= A_0\int 1\cdot V\cdot dx + A_1\int UV\cdot dx + A_2\int U^2V\cdot dx + A_3\int U^3V\cdot dx + \cdots.$$

Dagegen ist, wenn man statt $\frac{1}{1-aU}$ die ihr gleiche nach Potenzen von a geordnete Reihe setzt, offenbar auch

7) $\int cotg\, x \cdot dx = \int \frac{cos\, x}{sin\, x} \cdot dx = log\, sin\, x;$

8) $\int tg\, x \cdot dx = \int \frac{sin\, x}{cos\, x} \cdot dx = -log\, cos\, x;$

9) $\int cosec\, x \cdot dx = \int \frac{1}{sin\, x} \cdot dx = log\, tg\, \frac{1}{2}x;$

10) $\int sec\, x \cdot dx = \int \frac{1}{cos\, x} \cdot dx = log\, tg\, \frac{1}{2}(\pi + x);$

und

11) $\int \frac{dx}{sin\, x \cdot cos\, x} = log\, tg\, x$ *).

Als besondere in obigen Reduktions-Formeln enthal Fälle mag man auch noch hervorheben:

12) $\int tg\, x^m \cdot dx = \frac{tg\, x^{m-1}}{m-1} - \int tg\, x^{m-2} \cdot dx;$

13) $\int cotg\, x^m \cdot dx = -\frac{cotg\, x^{m-1}}{m-1} - \int cotg\, x^{m-2} \cdot dx$ **

§

*) Man erhält N. 7.), wenn man $sin\, x = z$, N. 8.) dag wenn man $cos\, x = z$ setzt und §. 4. N. 4.) anwendet. — Die N geht hervor, wenn man $cos\, x = z$ setzt; denn dann wird $-sin\, x \cdot dx =$ und $\frac{dx}{sin\, x} = -\frac{dz}{sin\, x^2} = -\frac{dz}{1-z^2} = \frac{dz}{z^2-1} = \frac{\frac{1}{2}dz}{z-1} - \frac{\frac{1}{2}dz}{z+1}$. halb wird $\int \frac{1}{sin\, x} \cdot dx = \frac{1}{2} log \frac{z-1}{z+1}$ oder auch, wenn man die Con $\frac{1}{2} log\,(-1)$ addirt, $= \frac{1}{2} log \frac{1-z}{1+z} = log \sqrt{\frac{1-cos\, x}{1+cos\, x}} = log\, tg\, \frac{1}{2}$ Die N. 10.) erhält man aus N. 9.), wenn man $\frac{1}{2}\pi - x = z$ setzt; direkt, wenn man $sin\, x = z$ setzt. — Die 11.) endlich geht aus N. 9.) hervor, wenn man bemerkt, daß $sin\, x \cdot cos\, x = \frac{1}{2} sin\, z$ ist, $2x = z$ gesetzt wird.

**) Zuweilen bekommt man ein Integral auf sich selber reducirt. z. B. giebt §. 4.) N. 3.), wenn man $\psi = cos\, x$ setzt, unmittelbar

$$\int sin\, x \cdot cos\, x \cdot dx = sin\, x^2 - \int sin\, x \cdot cos\, x \cdot dx.$$

Bringt man nun das Integral rechts auf die linke Seite, so erhält sogleich

$$\int sin\, x \cdot cos\, x \cdot dx = \frac{1}{2} sin\, x^2;$$

Zweites Kapitel.

Eigenschaften der besonderen und bestimmten Integrale. Der Taylor'sche und der Maclaurin'sche Lehrsatz mit dem Ergänzungs-Gliede.

§. 19.

I. Zu jeder für $\int X_x \cdot dx$ gefundenen Funktion ψ_x muß noch eine willkührliche Constante C addirt werden, wenn man einen Ausdruck haben will, welcher alle Integrale in sich schließt. In den Anwendungen muß man dann unter allen diesen verschiedenen, durch $\psi_x + C$ ausgedrückten Integralen dasjenige heraussuchen, welches noch einer, dem besonderen Falle der Anwendung eigenthümlichen Bedingung genügt; d. h. mit andern Worten, in jeder besonderen Anwendung muß diese willkührliche Constante noch näher und dieser Anwendung gemäß bestimmt werden.

Man bestimmt aber diese Constante C jedesmal dadurch, daß man, wenn y das gesuchte besondere Integral vorstellt, zu irgend einem Werth a von x, den zugehörigen Werth A von y kennt. Es ist nämlich dann, außer

1) $y = \psi_x + C$, auch noch 2) $A = \psi_a + C$;

und diese letztere Gleichung giebt C, so daß, wenn man diesen Werth von C in die erstere Gleichung $y = \psi_x + C$ substituirt, das gesuchte besondere Integral das nachstehende wird, nämlich:

3) $$y = \psi_x - \psi_a + A,$$

Dieſelben Reſultate würde man aber auch ſogleich bekommen, wenn man ſtatt $\sin bx$, $\cos bx$ ihre Exponential-Ausdrücke ſetzen wollte.

VII. Im Allgemeinen kann man bei jeder zu integrirenden trigonometriſchen Funktion von x, ſo wie dies bisher ſchon öfter geſchehen iſt, irgend einen Sinus, Koſinus, irgend eine Tangente etc. etc. von x, einem neuen Veränderlichen z gleich ſetzen, und häufig wird dadurch das Integral auf ein irrationales, zuweilen auch auf ein rationales zurückgeführt, welches nach den vorhergehenden Paragraphen gefunden werden kann. — Auf dieſem Wege findet ſich z. B. indem man $\sin x = z$ oder $\cos x = y$ ſetzt,

$$\int \frac{1}{a+b\cdot\cos x}\cdot dx = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\cdot log\frac{b+a\cdot\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\cdot\sin x}{a+b\cdot\cos x}$$

$$\text{auch} \quad = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{1}{\cos}\left(\frac{b+a\cdot\cos x}{a+b\cdot\cos x}\right) *).$$

§. 18.

Integration durch unendliche Reihen.

Wenn aber alle Verſuche zur Integration einer gegebenen Funktion in endlicher (geſchloſſener) Form mißlingen, ſo ſucht man das Integral mittelſt unendlicher Reihen ausgedrückt zu erhalten.

I. Dazu kann man zunächſt die allgemeine Integrations-Formel des §. 2.) gebrauchen.

II. Um aber bequemere Reihen zu bekommen, ſucht man lieber die gegebene Funktion vor ihrer Integration in unendliche Reihen zu verwandeln, und integrirt dann jedes Glied dieſer Reihe.

---

*) Auf dieſes Integral kann man wieder $\int \frac{1}{p+q\cdot\sin x^2}\cdot dx$ zurückführen, indem man $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$ ſtatt $\sin x^2$ ſchreibt, und dann $2x = y$ ſetzt.

Beiſpiel 1. So findet ſich, wenn $\int \frac{1}{a+x} \cdot dx$ geſucht wird,

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \frac{x^4}{a^5} - \frac{x^5}{a^6} + \cdots;$$

lglich, wenn man integrirt,

$$\alpha) \qquad \int \frac{1}{a+x} \cdot dx = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \cdots.$$

rdnet man aber die Reihe für $\frac{1}{a+x}$ nach fallenden Potenzen von x, mlich

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{x+a} = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^3} - \frac{a^3}{x^4} + \cdots,$$

erhält man noch

$$\beta) \qquad \int \frac{1}{a+x} \cdot dx = log\, x + \frac{a}{x} - \frac{a^2}{2x^2} + \frac{a^3}{3x^3} - \frac{a^4}{4x^4} + \cdots *),$$

---

*) Kann man $\int \frac{1}{a+x} \cdot dx = log\,(a+x)$ finden, ſo hat man für aſſelbe Integral zwei Ausdrücke, nämlich $log\,(a+x)$ und eine der beiden endlichen Reihen $\alpha.$) oder $\beta.$) oben, welche nur um eine Conſtante verſchieden ſeyn können. Beſtimmt man nachgehends in dem einen die Conſtante C ſo, daß beide für irgend einen beſtimmten Werth von x einander leich werden, ſo hat man eine für jedes x richtige Gleichung. So findet ich alſo zunächſt

$$log\,(a+x) = C + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \cdots$$

nd für $x = 0$ noch

$$log\, a = C;$$

ſo

$$1') \qquad log\,(a+x) = log\, a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \cdots.$$

Wollte man aber die Reihe $\beta.$) dazu verwenden, ſo hätte man anglich

$$(\delta') \cdots \quad log\,(a+x) = C + log\, x + \frac{a}{x} - \frac{a^2}{2x^2} + \frac{a^3}{3x^3} - \frac{a^4}{4x^4} + \cdots$$

nd für $x = 1$

$$log\,(1+a) = C + a - \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{3}a^3 - \tfrac{1}{4}a^4 + \cdots$$

. h. $C = 0$, weil die zur Rechten von C folgende, nach Potenzen von geordnete Reihe genau $log\,(1+a)$ iſt. Alſo hat man

$$2') \qquad log\,(a+x) = log\, x + \frac{a}{x} - \frac{a^2}{2x^2} + \frac{a^3}{3x^3} - \frac{a^4}{4x^4} + \cdots.$$

Man kann auch, um die Conſtante C zu beſtimmen, zuvor in der Gleichung $\delta'.$) $log\, x$ auf beiden Seiten ſubtrahiren, und man erhält

und während das erstere Integral (α.) für sehr kleine Werthe von x sc convergirt, ist dies bei dem zweiten (β.) für sehr große Werthe vo der Fall.

Beispiel 2. So findet sich, wenn $\int \frac{a}{a^2+x^2}\cdot dx$ gesucht wird,

$$\frac{a}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} - \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^4}{a^5} - \frac{x^6}{a^7} + \frac{x^8}{a^9} - \cdots;$$

also, wenn man integrirt,

α) $$\int \frac{a}{a^2+x^2}\cdot dx = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} - \frac{x^7}{7a^7} + \cdots.$$

Ordnet man aber die Reihe für $\frac{a}{a^2+x^2}$ nach fallenden Pot von x, so hat man

$$\frac{a}{a^2+x^2} = \frac{a}{x^2+a^2} = \frac{a}{x^2} - \frac{a^3}{x^4} + \frac{a^5}{x^6} - \frac{a^7}{x^8} + \cdots;$$

folglich wird abermals

β) $$\int \frac{a}{a^2+x^2}\cdot dx = -\frac{a}{x} + \frac{a^3}{3x^3} - \frac{a^5}{5x^5} + \frac{a^7}{7x^7} - \cdots$$ *).

$$log\left(1+\frac{a}{x}\right) = C + \frac{a}{x} - \frac{a^2}{2x^2} + \frac{a^3}{3x^3} - \cdots.$$

Setzt man dann x unendlich groß, so erhält man

$$0 = C.$$

*) Weiß man, daß $\int \frac{a}{a^2+x^2}\cdot dx = \frac{1}{tg}\frac{x}{a}$ ist, so hat man der aus α.)

$$\frac{1}{tg}\frac{x}{a} = C + \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} - \frac{x^7}{7a^7} + \cdots,$$

während hieraus für $x = 0$, $\frac{1}{tg}0 = C$ hervorgeht, so daß $C =$ nommen werden kann, wenn man den kleinsten Bogen haben will. D

3) $$\frac{1}{tg}\frac{x}{a} = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} - \frac{x^7}{7a^7} + \cdots.$$

Nimmt man die Reihe β.), so erhält man zunächst

$$\frac{1}{tg}\frac{x}{a} = C - \frac{a}{x} + \frac{a^3}{3x^3} - \frac{a^5}{5x^5} + \frac{a^7}{7x^7} - \cdots.$$

Nimmt man nun hier x unendlich-groß, so hat man rechts b während links der Bogen steht, dessen Tangente unendlich-groß wird also $= \frac{1}{2}\pi$ ist, wenn man den kleinsten dieser Bogen nimmt. Also

4) $$\frac{1}{tg}\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\pi - \frac{a}{x} + \frac{a^3}{3x^3} - \frac{a^5}{5x^5} + \frac{a^7}{7x^7} - \cdots.$$

$$= \varphi_a + y_a \cdot dx + y_{a+dx} \cdot dx + y_{a+2dx} \cdot dx + y_{a+3dx} \cdot dx + y_{a+4dx} \cdot dx + \cdots + y_{b-2dx} \cdot dx + y_{b-dx} \cdot dx.$$

Also ist $\varphi_b - \varphi_a$ offenbar die Summe aller unendlich-vielen unendlich-kleinen Zuwachse $y \cdot dx$, welche φ_a nach und nach erlitten hat, um endlich bis zu φ_b anzuwachsen*). — So erklärt es sich, warum man das Summenzeichen $\int$ zur Bezeichnung eines Integrals gewählt hat; und da b auch ganz beliebig seyn, mithin selbst durch das unbestimmte x ersetzt werden kann, so sind ferner hierdurch auch die obigen Redens-Arten erläutert, sobald man statt des Wortes „Integral" das gleichbedeutende „Summe von Differentialien" gesetzt sich denkt. Der nächste Paragraph soll aber diesen wichtigen Satz, auf welchen hier hingedeutet ist, streng wissenschaftlich entwickeln.

§. 20.

Ist $a < b$, und wird die Differenz $b - a$ in unendlich-viele gleiche Theile getheilt gedacht und jeder Theil durch dx bezeichnet; und soll die Summe der unendlich-vielen Produkte $y_x \cdot dx$ gefunden werden für alle die unendlich-vielen von a bis b hin stetig neben einander liegenden d. h. um dieses unendlich-kleine dx von einander verschiedenen Werthe von x, — so ist solche Summe allemal

$$= \int_{b \div a} y \cdot dx \quad \text{oder} \quad = \int_a^b y \cdot dx,$$

d. h. $= \varphi_b - \varphi_a$, wenn $\int y \cdot dx = \varphi_x$ sich findet; sobald nur y für alle Werthe von x zwischen a und b bestimmte Werthe hat, und namentlich nicht die Form $\frac{1}{0}$ annimmt**).

*) Daß diese Zuwachse auch zum Theil oder alle negativ seyn können, versteht sich von selbst.

**) Derselbe Satz steht für ganze (rationale) Funktionen von x bereits im I. Bd. §. 111.) *entwickelt.*

Diese Reihe convergirt schnell, wenn x ziemlich groß ist; will man eine haben, daß die für dieses Integral zu findende Reihe dann schnell convergirt, wenn x von 1 nur wenig verschieden, also wenn $x-1$ sehr klein ist, so setze man $x-1=u$, so daß $x=1+u$, $x^2-1=2u+u^2$ wird, ordne $(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ d. h. $(2u+u^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Lehrsatze nach steigenden Potenzen von u, und integrire dann. Dies giebt

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\cdot dx=\left(1-\frac{1}{2\cdot3}\cdot\frac{u}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}\cdot\frac{u^2}{4}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}\cdot\frac{u^3}{8}+\ldots\right)\sqrt{2u},$$

wo statt u noch $x-1$ gesetzt werden muß.

III. Da es aber überhaupt nur darauf ankommt, die zu integrirende Funktion in eine Reihe integrirbarer Glieder zu verwandeln, so wird man nicht in allen Fällen gerade nach Potenzen von x, oder nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ ordnen, sondern nur in integrirbare Glieder und mit dem Vorbedacht, daß man im Endresultate Reihen bekommt, welche für den besonderen Zweck, den man gerade sich gegeben hat, bequem berechenbar sind.

Wollte man also z. B. $\frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx$ integriren (welches Integral zu den elliptischen Transcendenten gehört), und wollte man das Integral haben für den Fall, daß e sehr klein ist, so würde man $\sqrt{1-e^2x^2}$ nach steigenden Potenzen von e ordnen (mittelst des binomischen Lehrsatzes) und dann die einzelnen Glieder, welche von der Form $\frac{x^{2m}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot e^{2m}$ sind, nach dem Verfahren des §. 14.) Beispiel 1.) integriren. Man erhält dann

$$1)\quad \int\frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx=\frac{1}{sin}x+\tfrac{1}{2}e^2\left(\tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}-\tfrac{1}{2}\frac{1}{sin}x\right)$$
$$+\frac{1\cdot1}{2\cdot4}e^4\left[\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{1}{sin}x\right]$$
$$+\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}e^6\left[\left(\frac{1}{6}x^5+\frac{1\cdot3}{4\cdot6}x^3+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{1}{sin}x\right]$$
$$+\text{ etc. etc. etc.}$$

Soll aber dasselbe Integral gefunden werden für den Fall, daß e von der 1 nur sehr wenig verschieden ist, also daß $1-e$ sehr klein ist, so kann man $\frac{1-e}{e}=n$ setzen, so daß n sehr klein ist, die gegebene Funktion in $\frac{\sqrt{e}\cdot\sqrt{1-ex}}{\sqrt{1-x}}\sqrt{\frac{n}{1+x}}$ umformen, dann hiervon mittelst des binomi-

Anmerkung. Man kann auch in der Gleichung I.) des 20.) nach und nach statt h die verschiedenen Werthe

$$\varepsilon,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4,\ \cdots$$

zu gleicher Zeit statt x nach und nach bezüglich die Werthe $a+\varepsilon$, $a+\varepsilon+\varepsilon_1$, $a+\varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_2$, $\cdots$ setzen, (während $\varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n=b-a$ nimmt) und zuletzt alle Gleichungen addiren. Man erhält dann wiederum genähert

$$\int_{b\div a} y\cdot dx=\varepsilon\cdot y_a+\varepsilon_1\cdot y_{a+\varepsilon}+\varepsilon_2\cdot y_{a+\varepsilon+\varepsilon_1}+\cdots+\varepsilon_n\cdot y_{b-\varepsilon_n}.$$

Dieses Verfahren würde dann vortheilhaft werden können, wenn die Werthe von y einzelne Stellen haben, an denen sie bedeutend rascher abnehmen und wachsen, als an andern, weil man an diesen Stellen die Werthe der verschiedenen ε um so kleiner nehmen kann, wodurch eine größere Genauigkeit erzielt wird.

§. 22.

Nimmt man in den Integrations-Formeln des §. 4.) die mit $x=a$ anfangenden Integrale, so nehmen sie die nachstehende Form an, nämlich

$$\int_{x\div a} A\cdot\varphi_x\cdot dx=A\cdot\int_{x\div a}\varphi\cdot dx;$$

$$\int_{x\div a}(\varphi_x\pm\psi_x)\cdot dx=\int_{x\div a}\varphi_x\cdot dx\pm\int_{x\div a}\psi_x\cdot dx;$$

$$\int_{x\div a}(\varphi_x\cdot\psi_x)\cdot dx=\varphi_x\int_{x\div a}\psi_x\cdot dx-\int_{x\div a}(\partial\varphi_x\int_{x\div a}\psi\cdot dx)\cdot dx.$$

Nimmt man aber in dieser dritten Formel statt $\int\psi\cdot dx$ nicht das mit $x=a$ anfangende Integral, sondern irgend ein anderes besonderes Integral, welches durch π_x bezeichnet seyn mag, so nimmt diese dritte Formel folgende Form an:

$$\text{I.}\quad \int_{x\div a}(\varphi_x\cdot\psi_x)\cdot dx=(\varphi_x\cdot\pi_x-\varphi_a\cdot\pi_a)-\int_{x\div a}(\pi_x\cdot\partial\varphi_x)\cdot dx,$$

wo

$$\pi_x=\int\psi\cdot dx \quad \text{ist.}$$

Fängt in der Gleichung 4.) des §. 4.), nämlich in

$$\int\varphi\cdot dx=\int(\varphi\cdot\partial x_z)\cdot dz,$$

das Integral nach z mit $z=a$ an, so muß das Integral nach x, mit $x=\alpha$ anfangen, wenn α der für $z=a$ hervorgehende Werth von x ist. Man hat also

$$\text{II.}\qquad \int_{x\div\alpha}\varphi_x\cdot dx=\int_{z\div a}(\varphi\cdot\partial x_z)\cdot dz,$$

$$\int \frac{V}{1-aU}\cdot dx = \int V\cdot dx + a\int UV\cdot dx + a^2\int U^2V\cdot dx + a^3\int U^3V\cdot dx + \cdots$$

und daraus fällt das Gesagte in die Augen.

Wollte man also die Reihe integriren, auf welche man in dem Beispiele zu III.) gestoßen ist, nämlich

$$\left(A_0 + A_1\frac{n}{1+x} + A_2\frac{n^2}{(1+x)^2} + A_3\frac{n^3}{(1+x)^3} + \cdots\right)\frac{\sqrt{1-ex}}{\sqrt{1-x}}\cdot dx,$$

so dürfte man nur statt U jetzt $n(1+x)^{-1}$, und statt V jetzt $\frac{\sqrt{1-e}}{\sqrt{1-}}$ setzen, und es käme dann alles nur darauf an, die Funktion

$$\frac{\sqrt{1-ex}}{\sqrt{1-x}(1-a(1+x)^{-1})} \text{ d. h. } \frac{\sqrt{1-ex}}{\sqrt{1-x}} + \frac{a}{1-a+x}\cdot\frac{\sqrt{1-ex}}{\sqrt{1-x}}$$

zu integriren, welche Integration nach §. 12.) III.) durchgesetzt werden kann.

Zweites Kapitel.

Eigenschaften der besonderen und bestimmten Integrale. Der Taylor'sche und der Maclaurin'sche Lehrsatz mit dem Ergänzungs-Gliede.

§. 19.

I. Zu jeder für $\int X_x \cdot dx$ gefundenen Funktion ψ_x muß noch eine willkührliche Constante C addirt werden, wenn man einen Ausdruck haben will, welcher alle Integrale in sich schließt. In den Anwendungen muß man dann unter allen diesen verschiedenen, durch $\psi_x + C$ ausgedrückten Integralen dasjenige heraussuchen, welches noch einer, dem besonderen Falle der Anwendung eigenthümlichen Bedingung genügt; d. h. mit andern Worten, in jeder besonderen Anwendung muß diese willkührliche Constante noch näher und dieser Anwendung gemäß bestimmt werden.

Man bestimmt aber diese Constante C jedesmal dadurch, daß man, wenn y das gesuchte besondere Integral vorstellt, zu irgend einem Werth a von x, den zugehörigen Werth A von y kennt. Es ist nämlich dann, außer

1) $y = \psi_x + C$, auch noch 2) $A = \psi_a + C$;

und diese letztere Gleichung giebt C, so daß, wenn man diesen Werth von C in die erstere Gleichung $y = \psi_x + C$ substituirt, das gesuchte besondere Integral das nachstehende wird, nämlich:

3) $$y = \psi_x - \psi_a + A,$$

welche Form umgekehrt ſogleich wieder zu $x = a$ $y = A$ liefert.

Da nämlich die Conſtante C von x unabhängig iſt behält ſie für jeden andern Werth von x denſelben Werth, ſie bei irgend einem Werthe a von x gehabt hat. Jedoch dies letztere nur ſo lange, als nicht die Stetigkeit der Funkti X oder y unterbrochen wird. Wird nämlich z. B. $X =$ ſowohl für $x = \alpha$, als auch für $x = \beta$ (wenn $X = \frac{f_x}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ ſeyn ſollte), tritt aber dieſer Fall keinen der Werthe von x zwiſchen α und β ein; und liegt lich a zwiſchen α und β, — ſo wird die Conſtante C für Werthe von x zwiſchen α und β, denſelben Werth beha den ſie für $x = a$ gehabt hat; es iſt aber vorauszuſ daß, während y derſelben Aufgabe d. h. demſelben Falle Anwendung entſpricht, die Conſtante C einen andern Werth nehmen werde, ſo oft man y für Werthe von x haben welche außerhalb dieſer durch α und β begrenzten ſtetigen R der Werthe von x liegen ſollten; und zwar einen andern W für die reellen Werthe von x, welche dem α vorangehen, vielleicht wiederum einen andern Werth für die reellen We von x, welche dem β folgen (wenn $\alpha < \beta$ vorausgeſetzt i den iſt). — Wir werden auf dieſen wichtigen Punkt, auf chen in der Regel zu wenig oder gar nicht aufmerkſam gem wird, hier nicht weiter eingehen, und verweiſen nur noch das Beiſpiel in der Anmerkung 2.) zu §. 27.), im näch Kapitel.

Es iſt das allgemeine Integral y von $x^m \cdot dx$ offenbar au drückt durch

$$y = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C;$$

ſoll aber $y = A$ werden für $x = a$, ſo erhält man

$$y = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} + A.$$

und soll y für $x = a$ der Null gleich werden, so hat man

$$y = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$$

II. Wird in einem allgemeinen Integrale die Constante C der Bedingung gemäß bestimmt, daß der Werth desselben, wenn $x = a$ gesetzt wird, der Null gleich werden soll, so sagt man: „das Integral fange mit $x = a$ an," oder auch „es sey von $x = a$ bis $x = x$ genommen," oder endlich „es sey zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = x$ genommen."

Ein so genommenes Integral ist allemal ein besonderes (vergl. §. 3.).

Soll also von $x^m \cdot dx$ das mit $x = a$ anfangende Integral genommen werden, so erhält man solches

$$= \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$$

Man wird aber ein solches Integral nur für alle diejenigen Werthe von x gelten lassen, welche dem a stetig und so lange vorangehen, oder stetig und so lange folgen, bis man zu einem Werthe von x gelangt, für welche die Stetigkeit der Werthe von ψ_x oder X_x unterbrochen wird, weil von da ab die Constante einen andern Werth annehmen kann (nach I.).

III. Wird in einem solchen besonderen Integrale $\int X_x \cdot dx$, welches mit $x = a$ anfängt, statt x noch ein bestimmter Werth b gesetzt, so nimmt das Integral einen völlig bestimmten Werth an, und hört auf eine Funktion von x zu seyn. Dieser bestimmte Werth heißt ein bestimmtes Integral, und man sagt von selbigem: „es höre mit $x = b$ auf," oder auch „es sey von $x = a$ bis $x = b$ genommen;" oder endlich „es sey zwischen den Grenz-Werthen a und b von x, genommen."

Dieser Werth b wird im Allgemeinen größer wie a gedacht, kann aber auch $< a$ seyn. Dagegen muß er unter den, dem a stetig anliegenden Werthen von x sich befinden, innerhalb welcher die Constante C einen und denselben Werth be-

hält, weil außerdem der Werth des bestimmten Integrals unrichtiger seyn könnte.

IV. Ist aber φ_x irgend ein besonderes Integral $X_x \cdot dx$, so ist

1) $\varphi_x + C$ das allgemeine,
2) $\varphi_x - \varphi_a$ das mit $x = a$ anfangende,
3) $\varphi_b - \varphi_a$ das zwischen den Grenzen $x = a$ $x = b$ genommene Integral.

Diese verschiedenen Integrale und Werthe bezeichnen aber der Reihe nach durch

1) $\int X \cdot dx$; 2) $\int_{x+a} X \cdot dx$ oder $\int_a^x X \cdot d$

und 3) $\int_{b+a} X \cdot dx$ oder $\int_a^b X \cdot dx$.

Bei diesem letztern, zwischen a und b genommenen gral von X nach x, setzen wir also namentlich voraus, X selbst für keinen der, zwischen a und b liegenden W von x, und auch nicht für $x = a$ oder $x = b$, die $\frac{1}{0}$ annehme.

Anmerkung. Zur geschichtlichen Erläuterung dieser bens-Arten dienen folgende Betrachtungen: Ist nän $\int y \cdot dx = \varphi_x$, also $\partial\varphi_x = y$, so ist der, zu dem unendl kleinen Zuwachse dx von x gehörige unendlich-kleine Zuw $d\varphi$ von φ, allemal ausgedrückt durch $y \cdot dx$ d. h. durch $y_x \cdot dx$ Geht man also von dem Werthe φ_a aus, und denkt man die Werthe von x, von a an nach und nach um die unendl kleinen Stücke dx wachsend, so ist der nächste Werth von offenbar $= \varphi_a + y_a \cdot dx$, der nun folgende Werth von φ_x fenbar $= \varphi_a + y_a \cdot dx + y_{a+dx} \cdot dx$; u. s. w. s. — Zu sey $y = b$ geworden, so ist der jetzige Werth von φ_x u lich φ_b, offenbar

$$= \varphi_a + y_a \cdot dx + y_{a+dx} \cdot dx + y_{a+2dx} \cdot dx + y_{a+3dx} \cdot dx + y_{a+4dx} \cdot dx + \cdots + y_{b-2dx} \cdot dx + y_{b-dx} \cdot dx.$$

Also ist $\varphi_b - \varphi_a$ offenbar die Summe aller unendlich-vielen unendlich-kleinen Zuwachse $y \cdot dx$, welche φ_a nach und nach erlitten hat, um endlich bis zu φ_b anzuwachsen *). — So erklärt sich, warum man das Summenzeichen $\int$ zur Bezeichnung eines Integrals gewählt hat; und da b auch ganz beliebig seyn, mithin selbst durch das unbestimmte x ersetzt werden kann, so sind ferner hierdurch auch die obigen Redens-Arten erläutert, sobald man statt des Wortes „Integral" das gleichbedeutende „Summe von Differentialien" gesetzt sich denkt. Der nächste Paragraph soll aber diesen wichtigen Satz, auf welchen hier hingedeutet ist, streng wissenschaftlich entwickeln.

§. 20.

Ist $a < b$, und wird die Differenz $b - a$ in unendlich-viele gleiche Theile getheilt gedacht und jeder Theil durch dx bezeichnet; und soll die Summe der unendlich-vielen Produkte $y_x \cdot dx$ gefunden werden für alle die unendlich-vielen von a bis b hin stetig neben einander liegenden d. h. um dieses unendlich-kleine dx von einander verschiedenen Werthe von x, — so ist solche Summe allemal

$$= \int_{b-a} y \cdot dx \quad \text{oder} \quad = \int_a^b y \cdot dx,$$

d. h. $= \varphi_b - \varphi_a$, wenn $\int y \cdot dx = \varphi_x$ sich findet; sobald nur y für alle Werthe von x zwischen a und b bestimmte Werthe hat, und namentlich nicht die Form $\frac{1}{0}$ annimmt **).

*) Daß diese Zuwachse auch zum Theil oder alle negativ seyn können, versteht sich von selbst.

**) Derselbe Satz steht für ganze (rationale) Funktionen von x bereits im I. Bd. §. 111.) entwickelt.

Denn es ist

$$\partial\varphi_x = y_x,\ \partial^2\varphi_x = \partial y_x,\ \partial^3\varphi_x = \partial^2 y_x \text{ etc. etc.};$$

folglich, nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$\text{I.}\quad \varphi_{x+h} - \varphi_x = y_x \cdot h + \partial y_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^2 y_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots.$$

Denkt man sich nun hier $h = dx = \frac{b-a}{n}$, indem man unter n eine ganze, aber unendlich-große Zahl versteht; — setzt man in die vorstehende Gleichung nach und nach a, a+h, a+2h, a+3h, a+4h ···· zuletzt a+(n−1)h d. h. b−h statt x und addirt man alle daraus hervorgehenden Gleichungen, so erhält man, wenn zur Rechten dx statt h geschrieben wird

$$\text{II.}\quad \varphi_b - \varphi_a = \Sigma y_{a+c.dx} \cdot dx + \Sigma \partial y_{a+c.dx} \cdot \frac{dx^2}{2!} + \Sigma \partial^2 y_{a+c.dx} \cdot \frac{dx^3}{3!} + \cdots,$$

wo das Summen-Zeichen Σ sich über alle die Glieder erstreckt, welche aus dem, hinter demselben stehenden Ausdrucke hervorgehen, wenn man statt c nach und nach 0, 1, 2, 3, 4 und alle ganzen Zahlen bis zuletzt n−1, setzt. Da nun in dieser Reihe zur Rechten jedes folgende Glied gegen das vorhergehende unendlich-klein ist, so bleibt bloß (nach I. Bd. §§. 50. und 159.)

$$\text{III.}\quad \begin{cases} \varphi_b - \varphi_a = \Sigma y_{a+c.dx} \cdot dx \\ \text{oder} \\ \int_{b-a} y \cdot dx = \Sigma y_{a+c.dx} \cdot dx \end{cases}$$

wo $y_{a+c\,dx}$ alle stetig neben einander liegenden Werthe von y_x vorstellt, welche zwischen y_a und y_b liegen, unter der Voraussetzung jedoch, daß keiner derselben die Form $\frac{1}{0}$ (oder *log* 0, oder sonst eine im Kalkul unzulässige Form) annimmt, sondern jeder derselben bestimmt und nicht unendlich-groß ist.

Anmerkung. Setzt man in der Gleichung III.) noch ∂y_x, $\partial^2 y_x$ etc. etc. statt y, so erhält man, in so fern $\int \partial y_x \cdot dx = y$, $\int \partial^2 y_x \cdot dx = \partial y_x$ etc. etc. ist,

IV. $$y_b - y_a = \Sigma \partial y_{a+c \cdot dx} \cdot dx;$$

V. $$\partial y_b - \partial y_a = \Sigma \partial^2 y_{a+c \cdot dx} \cdot dx;$$

u. s. w. s. — Und alle diese Gleichungen sind vollkommen genau, so lange man dx unendlich-klein sich denkt.

§. 21.

Man kann sich auch der Formel I.) des §. 20.), und des analogen Verfahrens bedienen, um Näherungs-Werthe eines bestimmten Integrals $\int_{b+a} y \cdot dx$ zu berechnen, wenn es nicht möglich ist $\int y \cdot dx$ selbst, als Funktion von x, für die Rechnung bequem herzustellen.

Setzt man nämlich in der Formel I.) des §. 20.) statt h nicht das unendlich-kleine dx, sondern nur das sehr kleine $\varepsilon = \frac{b-a}{n}$, so daß n nicht unendlich-groß, sondern nur sehr groß ist, so erhält man, wenn man wiederum nach und nach a, $a+\varepsilon$, $a+2\varepsilon$, $a+3\varepsilon$, ... $a+(n-1)\varepsilon$ oder $b-\varepsilon$ statt x setzt, und dann alle Gleichungen addirt,

1) $$\int_{b+a} y \cdot dx = \varepsilon \cdot \Sigma y_{a+c \cdot \varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \cdot \Sigma \partial y_{a+c \cdot \varepsilon} + \frac{\varepsilon^3}{3!} \cdot \Sigma \partial^2 y_{a+c \cdot \varepsilon} + \cdots.$$

Läßt man nun hier ε^2, ε^3 etc. etc. außer Acht, so hat man näherungsweise:

I. $$\int_{b+a} y \cdot dx = \varepsilon \cdot \Sigma y_{a+c \cdot \varepsilon},$$

wo man statt c nach und nach 0, 1, 2, 3 ... bis $n-1$ setzen und alle diese n verschiedenen Werthe von y summiren muß, während $\varepsilon = \frac{b-a}{n}$ ist.

Setzt man nun in I.) statt y nach einander ∂y_x und $\partial^2 y_x$, so erhält man, ebenfalls genähert,

$$\text{I.}\quad \int_a^b y\cdot dx = y_a\cdot\frac{b-a}{1} - \delta y_a\cdot\frac{(b-a)^2}{2!} + \delta^2 y_a\cdot\frac{(b-a)^3}{3!} +$$

$$- \delta^{n-2} y_a\cdot\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} + [\delta^{n-1} y_x]_{a+\beta(b-a)}\cdot\frac{(b-a)}{n!}$$

Wird aber zuerst in $(\ )$ $-h$ statt h substituirt und dann statt x und $b-a$ statt h, so erhält man noch:

$$\text{II.}\quad \int_a^b y\cdot dx = y_b\cdot\frac{b-a}{1} - \delta y_b\cdot\frac{(b-a)^2}{2!} + \delta^2 y_b\cdot\frac{(b-a)^3}{3!} +$$

$$\pm \delta^{n-2} y_b\cdot\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \mp [\delta^{n-1} y_x]_{b-\beta(b-a)}\cdot\frac{(b-a)}{n!}$$

während in beiden Formeln β zwischen 0 und 1 liegt und [illegible] bekannt bleibt, so daß der Koefficient von $\frac{(b-a)^n}{n!}$ jedes[illegible] zwischen dem größten und kleinsten Werthe liegt, den δ^n [illegible] annimmt, wenn statt x nach und nach alle Werthe von a [illegible] b hin gesetzt werden.

In den Anwendungen dieser Formeln kann man zwischen [illegible] und b noch beliebig viele Zwischen-Werthe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ [illegible] sich denken, und dann nach und nach die Integrale zwisch[illegible] den Grenzen a und α_1, dann zwischen α_1 und α_2, u. s. [illegible] zuletzt zwischen den Grenzen α, und b, jedes nach einer di[illegible] Formeln I.) oder II.) berechnen, und alle diese Resultate addi[illegible] um zuletzt $\int_a^b y\cdot dx$ selbst zu haben (nach §. 24. I.). Die [illegible] zelnen Reihen sind dann deshalb schneller convergent, weil [illegible] nach Potenzen der beliebig klein genommenen Differenzen α_1 [illegible] $\alpha_2-\alpha_1$, $\alpha_3-\alpha_2$, $\cdots$ $b-\alpha$, fortgehen. — Auch kann [illegible] alle letzteren Differenzen einander gleich und $=\alpha$ nehmen, [illegible] daß alle Reihen nach Potenzen eines und desselben kleinen [illegible] thes α fortlaufen.

Anmerkung. Man kann auch in der Gleichung I.) des §. 20.) nach und nach statt h die verschiedenen Werthe

$$\varepsilon,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4,\ \cdots$$

und zu gleicher Zeit statt x nach und nach bezüglich die Werthe a, $a+\varepsilon$, $a+\varepsilon+\varepsilon_1$, $a+\varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_2$, $\cdots$ setzen, (während man $\varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n=b-a$ nimmt) und zuletzt alle Gleichungen addiren. Man erhält dann wiederum genähert

$$\int_{a\div b} y\cdot dx = \varepsilon\cdot y_a+\varepsilon_1\cdot y_{a+\varepsilon}+\varepsilon_2\cdot y_{a+\varepsilon+\varepsilon_1}+\cdots+\varepsilon_n\cdot y_{b-\varepsilon_n}.$$

Dieses Verfahren würde dann vortheilhaft werden können, wenn die Werthe von y einzelne Stellen haben, an denen sie bedeutend rascher abnehmen und wachsen, als an andern, weil man an diesen Stellen die Werthe der verschiedenen ε um so kleiner nehmen kann, wodurch eine größere Genauigkeit erreicht wird.

§. 22.

Nimmt man in den Integrations-Formeln des §. 4.) die mit $x=a$ anfangenden Integrale, so nehmen sie die nachstehende Form an, nämlich

1) $\int_{x\div a} A\cdot\varphi_x\cdot dx = A\cdot\int_{x\div a}\varphi\cdot dx;$

2) $\int_{x\div a}(\varphi_x\pm\psi_x)\cdot dx = \int_{x\div a}\varphi_x\cdot dx\pm\int_{x\div a}\psi_x\cdot dx;$

3) $\int_{x\div a}(\varphi_x\cdot\psi_x).dx = \varphi_x\int_{x\div a}\psi_x\cdot dx-\int_{x\div a}(\partial\varphi_x\int_{x\div a}\psi\cdot dx)\cdot dx.$

Nimmt man aber in dieser dritten Formel statt $\int\psi\cdot dx$ nicht das mit $x=a$ anfangende Integral, sondern irgend ein anderes besonderes Integral, welches durch π_x bezeichnet seyn mag, so nimmt diese dritte Formel folgende Form an:

I. $\int_{x\div a}(\varphi_x\cdot\psi_x)\cdot dx = (\varphi_x\cdot\pi_x-\varphi_a\cdot\pi_a)-\int_{x\div a}(\pi_x\cdot\partial\varphi_x)\cdot dx,$

wo $\pi_x=\int\psi\cdot dx$ ist.

Fängt in der Gleichung 4.) des §. 4.), nämlich in

$$\int\varphi\cdot dx = \int(\varphi\cdot\partial x_z)\cdot dz,$$

das Integral nach z mit $z=a$ an, so muß das Integral nach x, mit $x=\alpha$ anfangen, wenn α der für $z=a$ hervorgehende Werth von x ist. Man hat also

II. $\int_{x\div\alpha}\varphi_x\cdot dx = \int_{z\div a}(\varphi\cdot\partial x_z)\cdot dz,$

Drittes Kapitel.

Rektifikation der Kurven überhaupt und Quadratur der ebenen Kurven.

§. 27.

I. Iſt ECMDF (Fig. 1.) eine durch die Gleichung

$$y = y_x$$

gegebene Kurve; und ſoll der Inhalt ACDB beſtimmt werden, zwiſchen dem Bogen CMD, dem Stücke AB der Abſciſſen-Axe OX, und den mit der Ordinaten-Axe OY parallelen und auf AB ſenkrechten Geraden AC und BD, ſo findet man ohne Weiteres

$$\text{Inhalt } ACMDBA = \int_{b-a} y_x \cdot dx,$$

wenn a und b die Abſciſſen-Werthe der Punkte A und B vorſtellen, ſobald nur, wie in der Figur vorausgeſetzt worden iſt, zwiſchen $x = a$ und $x = b$ alle Ordinaten-Werthe poſitiv ſind, und die Kurve von $x = a$ an bis zu $x = b$ hin nicht ihre Stetigkeit unterbricht.

Denn, denkt man ſich zunächſt den beſondern Fall, daß zwiſchen $x = a$ und $x = b$, die Ordinaten fortwährend wachſen, ſo kann man den Raum $AB = b - a$ in unendlich viele, unendlich kleine Theile zerlegen, deren jeder durch dx bezeichnet ſeyn mag. Denkt man ſich nun über jedem dieſer Theile als Grundlinie, mit den zu den Endpunkten dieſer Theile gehörigen Ordinaten, als Höhen, Rechtecke gebildet, wie ſolche die Fig. 1.) ſehen läßt, ſo iſt augenfällig die Summe der äußern Rechtecke $> ACMDBA$, und die Summe der innern Rechtecke $< ACMDBA$. Da nun dx die gemeinſchaftliche Grundlinie aller dieſer Rechtecke iſt, ſo iſt die Summe der Inhalte der innern Rechtecke

$$= y_a \cdot dx + y_{a+dx} \cdot dx + y_{a+2dx} \cdot dx + \cdots + y_{b-dx} \cdot dx;$$

alſo iſt, weil dx unendlich klein iſt (nach §. 20.) dieſelbe Summe

$$= \int_{b-a} y_x \cdot dx.$$

Anmerkung. Man sieht zugleich, daß die letztere
hauptung unrichtig seyn würde, wenn b und a selbst
Funktionen von x wären, daß daher die Formel II.) nur
wahr ist, wenn man b und a ganz unabhängig von x,
eben so β und α ganz unabhängig von y vorausſetzt.

Eben so sieht man, daß die, Behufs des Beweises
gesetzten Gleichungen die Bedingung einschließen, daß f für
Paar der zusammengehörigen Werthe von x und y, inner
der Grenz-Werthe derselben ihre Stetigkeit unterbricht, also
nicht $=\frac{1}{0}$ wird *).

§. 24.

Außerdem sind noch folgende Sätze wichtig.

I. Ein bestimmtes Integral zwischen den Grenzen a

*) Gauß gründet auf diesen Umstand einen Beweis des Satzes
jede höhere Gleichung $F_x = 0$ einen Wurzel-Werth x von der Form p·
oder $r \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin\varphi \cdot i$ habe, sobald man unter i die $\sqrt{-1}$ versteht
substituirt nämlich in $F_x = 0$ statt x diese Form $r \cdot \cos\varphi + r \cdot si$
und zerfällt dadurch die Gleichung $F_x = 0$ in zwei Gleichungen

$$f_{r,\varphi} = 0 \quad \text{und} \quad \varkappa_{r,\varphi} = 0.$$

Um nun zu beweisen, daß es reelle Werthe von r und φ giebt,
letzteren beiden Gleichungen genügen, wählt er eine Funktion von der

$$\frac{\varkappa_{r,\varphi}}{(f^2+\varkappa^2)^2} \cdot dr \cdot d\varphi,$$

welche sich nach r und nach φ integriren läßt, und integrirt nun
zwischen 0 und R, wo R groß genug und positiv gewählt ist, nach
zwischen 0 und 360°; und zwar einmal zuerst nach r und dann n
hernach aber zuerst nach φ und dann nach r. Da er nun das zweit
nicht dasselbe heraus bekommt, was das erste Mal, so schließt er, d
Nenner $f^2+\varkappa^2$ innerhalb der Grenz-Werthe 0 und R von r, und
halb der Grenz-Werthe 0 und 360° von φ, der Null gleich werde,
also zwischen 0 und R einen Werth von r, und zwischen 0 und 360°
Werth von φ gebe, welche $f^2+\varkappa^2=0$, welche also auch einzeln
und $\varkappa=0$ machen. W. Z. E. W. (Man vgl. Commentat. G
recent. Vol. III.).

bedeutet, welcher zwischen dem größten und kleinsten Werthe von $\partial^n f_x$, die von $x=0$ an für alle stetig wachsenden Werthe von x, bis zu $x=x$ hin sich ergeben, liegt; so daß also $[\partial^n f_x]_{\vartheta x}$ das vorstellt, was aus $\partial^n f_x$ wird, wenn man ϑx statt x setzt, während ϑ zwischen 0 und 1 liegt, übrigens völlig unbekannt ist.

Ferner findet man

$$\text{II.}\quad f_{x+h} = f_x + \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots + \partial^{n-1} f_x \cdot \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + [\partial^n f_x]_{x+\vartheta h} \cdot \frac{h^n}{n!},$$

wo $[\partial^n f_x]_{x+\vartheta h}$ einen der Werthe bedeutet, welcher für $\partial^n f_x$ erhalten werden, wenn man statt x alle Werthe zwischen x und $x+h$ setzt, so daß also wieder $[\partial^n f_x]_{x+\vartheta h}$ den Werth vorstellt, welchen $\partial^n f_x$ annimmt, wenn man $x+\vartheta h$ statt x setzt, während ϑ zwischen 0 und 1 liegt, übrigens unbekannt bleibt *).

Um dies zu finden, nehme man von dem allgemeinern Maclaurin'schen Lehrsatze (I. Bd. §. 156.) nur die n ersten Glieder, bezeichne die Summe aller übrigen Glieder durch E_x und suche nun aus dieser Gleichung E_x zu finden. Differenziirt man aber die so erhaltene Gleichung, nämlich

$$1)\quad E_x = f_x - f_\alpha - \partial f_\alpha (x-\alpha) - \partial^2 f_\alpha \frac{(x-\alpha)^2}{2!} \cdots - \partial^{n-1} f_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}$$

n mal hinter einander nach x, so erhält man nach und nach ∂E_x, $\partial^2 E_x$, $\partial^3 E_x \cdots$, zuletzt $\partial^{n-1} E_x$, alle so daß diese Ableitungen, wie E_x selbst, für $x=\alpha$ der Null gleich werden. Und ganz zuletzt findet sich

$$2)\quad \partial^n E_x = \partial^n f_x.$$

Integrirt man also $\partial^n f_x$ n mal hinter einander und so, daß jedes neue Integral mit $x=\alpha$ anfängt, so bekommt man nach und nach wieder $\partial^{n-1} E_x$, $\partial^{n-2} E_x$, u. s. w. s. und zuletzt E_x. — Man kann aber diese Integration auf zweifache Weise vornehmen; das eine Mal wird man genau

*) Derselbe Satz ist im I. Bd. §. 111.) für ganze Funktionen von x, und für den besondern und einfachsten Fall, wo $n=1$ ist, bereits entwikkelt zu finden.

2) $$\int_0^x f_{ax} \cdot dx = \frac{1}{a} \int_0^x f_x \cdot dx,$$

wenn unter f_{ax} das verſtanden wird, was aus f_x hervorgeht, ſobald ax ſtatt x geſetzt wird.

Denn ſolches geht aus dem Satze des §. 22. III) hervor, wenn $x \pm a = z$, oder $ax = z$ ſetzt.

V. Wenn in dem Integral

$$\int_a^b \varphi\psi \cdot dx$$

der Faktor ψ für alle Werthe von x zwiſchen a und b immer poſitiv bleibt, und φ_g, φ_k bezüglich den größten und kleinſten Werth vorſtellen, welchen φ für alle Werthe von x zwiſchen a und b annehmen kann, ſo iſt allemal

$$\int_a^b \varphi\psi \cdot dx < \varphi_g \cdot \int_a^b \psi \cdot dx \quad \text{und} \quad > \varphi_k \cdot \int_a^b \psi \cdot dx \text{ *).}$$

Denn es iſt nach der Vorausſetzung für jeden Werth von e, der zwiſchen a und b liegt,

$$\varphi_e \cdot \psi_e < \varphi_g \cdot \psi_e \quad \text{und} \quad \varphi_e \cdot \psi_e > \varphi_k \cdot \psi_e;$$

und deshalb folgt die Wahrheit der Behauptung unmittelbar aus §. 20.).

§. 25.

Nun iſt man auch in den Stand geſetzt, bei dem Taylor'ſchen und Maclaurin'ſchen Lehrſatze die Grenzen zu beſtimmen, zwiſchen denen die Summe aller übrigen Glieder liegen muß, wenn die Reihen bei irgend einem Gliede abgebrochen werden und reelle Werthe haben.

Man findet nämlich in dieſem Falle

I. $$f_x = f_0 + \partial f_0 \cdot x + \partial^2 f_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + \cdots + \partial^{n-1} f_0 \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + [\partial^n f_x]_{\vartheta x} \cdot \frac{x^n}{n!},$$

wenn f_0, ∂f_0, $\partial^2 f_0$, etc. etc. die Werthe von f_x, ∂f_x, $\partial^2 f_x$, etc. etc. für $x = 0$ vorſtellen, während $[\partial^n f_x]_{\vartheta x}$ einen Werth

*) Derſelbe Satz iſt für (rationale) ganze Funktionen von x bereits im I. Bd. §. 111.) zu finden.

bedeutet, welcher zwischen dem größten und kleinsten Werthe von $\partial^n f_x$, die von $x = 0$ an für alle stetig wachsenden Werthe von x, bis zu $x = x$ hin sich ergeben, liegt; so daß also $[\partial^n f_x]_{\vartheta x}$ das vorstellt, was aus $\partial^n f_x$ wird, wenn man ϑx statt x setzt, während ϑ zwischen 0 und 1 liegt, übrigens völlig unbekannt ist.

Ferner findet man

$$\text{II.}\quad f_{x+h} = f_x + \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots + \partial^{n-1} f_x \cdot \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + [\partial^n f_x]_{x+\vartheta h} \cdot \frac{h^n}{n!},$$

wo $[\partial^n f_x]_{x+\vartheta h}$ einen der Werthe bedeutet, welcher für $\partial^n f_x$ erhalten werden, wenn man statt x alle Werthe zwischen x und $x+h$ setzt, so daß also wieder $[\partial^n f_x]_{x+\vartheta h}$ den Werth vorstellt, welchen $\partial^n f_x$ annimmt, wenn man $x+\vartheta h$ statt x setzt, während ϑ zwischen 0 und 1 liegt, übrigens unbekannt bleibt *).

Um dies zu finden, nehme man von dem allgemeinern Maclaurin'schen Lehrsatze (I. Bd. §. 156.) nur die n ersten Glieder, bezeichne die Summe aller übrigen Glieder durch E_x und suche nun aus dieser Gleichung E_x zu finden. Differenziirt man aber die so erhaltene Gleichung, nämlich

$$1)\quad E_x = f_x - f_\alpha - \partial f_\alpha (x-\alpha) - \partial^2 f_\alpha \frac{(x-\alpha)^2}{2!} \cdots - \partial^{n-1} f_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}$$

n mal hinter einander nach x, so erhält man nach und nach ∂E_x, $\partial^2 E_x$, $\partial^3 E_x \cdots$, zuletzt $\partial^{n-1} E_x$, alle so daß diese Ableitungen, wie E_x selbst, für $x = \alpha$ der Null gleich werden. Und ganz zuletzt findet sich

$$2)\quad \partial^n E_x = \partial^n f_x.$$

Integrirt man also $\partial^n f_x$ n mal hinter einander und so, daß jedes neue Integral mit $x = \alpha$ anfängt, so bekommt man nach und nach wieder $\partial^{n-1} E_x$, $\partial^{n-2} E_x$, u. s. w. s. und zuletzt E_x. — Man kann aber diese Integration auf zweifache Weise vornehmen; das eine Mal wird man genau

*) Derselbe Satz ist im I. Bd. §. 111.) für ganze Funktionen von x, und für den besondern und einfachsten Fall, wo $n = 1$ ist, bereits entwikkelt zu finden.

I. $\int_{b\div a} y\cdot dx = y_a\cdot\frac{b-a}{1} + \partial y_a\cdot\frac{(b-a)^2}{2!} + \partial^2 y_a\cdot\frac{(b-a)^3}{3!} + \cdots$

$$+\partial^{n-2} y_a\cdot\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} + [\partial^{n-1} y_x]_{a+\vartheta(b-a)}\cdot\frac{(b-a)^n}{n!}$$

Wird aber zuerst in (I.) $-h$ statt h substituirt und dann statt x und $b-a$ statt h, so erhält man noch:

II. $\int_{b\div a} y\cdot dx = y_b\cdot\frac{b-a}{1} - \partial y_b\cdot\frac{(b-a)^2}{2!} + \partial^2 y_b\cdot\frac{(b-a)^3}{3!} + \cdots$

$$\pm\partial^{n-2} y_b\cdot\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \mp [\partial^{n-1} y_x]_{b-\vartheta(b-a)}\cdot\frac{(b-a)^n}{n!}$$

während in beiden Formeln ϑ zwischen 0 und 1 liegt und unbekannt bleibt, so daß der Koefficient von $\frac{(b-a)^n}{n!}$ jedesmal zwischen dem größten und kleinsten Werthe liegt, den $\partial^{n-1} y_x$ annimmt, wenn statt x nach und nach alle Werthe von a bis b hin gesetzt werden.

In den Anwendungen dieser Formeln kann man zwischen a und b noch beliebig viele Zwischen-Werthe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots \alpha_r$ sich denken, und dann nach und nach die Integrale zwischen den Grenzen a und α_1, dann zwischen α_1 und α_2, u. s. f. zuletzt zwischen den Grenzen α_r und b, jedes nach einer dieser Formeln I.) oder II.) berechnen, und alle diese Resultate addiren, um zuletzt $\int_{b\div a} y\cdot dx$ selbst zu haben (nach §. 24. I.). Die einzelnen Reihen sind dann deshalb schneller convergent, weil sie nach Potenzen der beliebig klein genommenen Differenzen $\alpha_1 - a$, $\alpha_2 - \alpha_1$, $\alpha_3 - \alpha_2$, $\cdots$ $b - \alpha_r$ fortgehen. — Auch kann man alle letzteren Differenzen einander gleich und $= \alpha$ nehmen, so daß alle Reihen nach Potenzen eines und desselben kleinen Werthes α fortlaufen.

9) $$\begin{cases} \frac{1}{(n-1)!}[\partial^n f_x]_g \int_{x+\alpha}(x-z)^{n-1}\cdot dz \\ \text{und} \\ \frac{1}{(n-1)!}[\partial^n f_x]_k \int_{x+\alpha}(x-z)^{n-1}\cdot dz, \end{cases}$$

wenn $[\partial^n f_x]_g$ und $[\partial^n f_x]_k$, wofür man auch $[\partial^n f_x]_g$ und $[\partial^n f_x]_k$ schreiben kann, den größten und kleinsten der von $x=\alpha$ an bis zu $x=x$ hin liegenden Werthe von $\partial^n f_x$ vorstellen.

Weil aber

$$\int(x-z)^{n-1}\cdot dz = -\frac{(x-z)^n}{n}+C,$$

also

$$\int_{x+\alpha}(x-z)^{n-1}\cdot dz = \frac{(x-\alpha)^n}{n}$$

ist, so reduciren sich die obigen Grenzen in 9.), zwischen denen das Ergänzungs-Glied E_x liegt, auf diese

10) $$[\partial^n f_x]_g\cdot\frac{(x-\alpha)^n}{n!} \quad \text{und} \quad [\partial^n f_x]_k\cdot\frac{(x-\alpha)^n}{n!};$$

und dadurch sind die beiden Sätze dieses Paragraphen außer Zweifel gestellt, weil der zweite aus der hiesigen Gleichung hervorgeht, wenn man $\alpha+h$ statt x, statt α aber zuletzt wieder x schreibt; während der erste Satz aus dem hier erwiesenen unmittelbar hervorgeht, wenn man bloß 0 statt α schreibt.

Diese von Lagrange gegebenen Grenzen der Taylor'schen und Maclaurin'schen Reihe sind aber für die Analysis und ihre Anwendungen von unberechenbarer Wichtigkeit.

§. 26.

Ist $$\int y\cdot dx = f_x,$$

so nimmt der Taylor'sche Lehrsatz mit dem Ergänzungs-Gliede (z. B. der Satz §. 25. II.) diese Form an:

$$\text{C)}\cdots\quad f_{x+h}-f_x = y_x\cdot\frac{h}{1}+\partial y_x\cdot\frac{h^2}{2!}+\partial^2 y_x\cdot\frac{h^3}{3!}+\cdots$$
$$+\partial^{n-2}y_x\cdot\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}+[\partial^{n-1}y_x]_{x+\vartheta h}\cdot\frac{h^n}{n!},$$

Setzt man nun hier a statt x und b—a statt h, so geht diese Gleichung über in:

I. $\int_{b\div a} y\cdot dx = y_a\cdot\frac{b-a}{1}+\delta y_a\cdot\frac{(b-a)^2}{2!}+\delta^2 y_a\cdot\frac{(b-a)^3}{3!}+\cdots$

$$+\delta^{n-2}y_a\cdot\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}+[\delta^{n-1}y_x]_{a+\vartheta(b-a)}\cdot\frac{(b-a)^n}{n!}$$

Wird aber zuerst in (*.) $-h$ statt h substituirt und dann b statt x und $b-a$ statt h, so erhält man noch:

II. $\int_{b\div a} y\cdot dx = y_b\cdot\frac{b-a}{1}-\delta y_b\cdot\frac{(b-a)^2}{2!}+\delta^2 y_b\cdot\frac{(b-a)^3}{3!}+\cdots$

$$\pm\delta^{n-2}y_b\cdot\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}\mp[\delta^{n-1}y_x]_{b-\vartheta(b-a)}\cdot\frac{(b-a)^n}{n!}$$

während in beiden Formeln ϑ zwischen 0 und 1 liegt und unbekannt bleibt, so daß der Koefficient von $\frac{(b-a)^n}{n!}$ jedesmal zwischen dem größten und kleinsten Werthe liegt, den $\delta^{n-1}y_x$ annimmt, wenn statt x nach und nach alle Werthe von a bis b hin gesetzt werden.

In den Anwendungen dieser Formeln kann man zwischen a und b noch beliebig viele Zwischen-Werthe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots \alpha_r$ sich denken, und dann nach und nach die Integrale zwischen den Grenzen a und α_1, dann zwischen α_1 und α_2, u. s. f. zuletzt zwischen den Grenzen α_r und b, jedes nach einer dieser Formeln I.) oder II.) berechnen, und alle diese Resultate addiren, um zuletzt $\int_{b\div a} y\cdot dx$ selbst zu haben (nach §. 24. I.). Die einzelnen Reihen sind dann deshalb schneller convergent, weil sie nach Potenzen der beliebig klein genommenen Differenzen α_1-a, $\alpha_2-\alpha_1$, $\alpha_3-\alpha_2$, $\cdots$ $b-\alpha_r$ fortgehen. — Auch kann man alle letzteren Differenzen einander gleich und $=\alpha$ nehmen, so daß alle Reihen nach Potenzen eines und desselben kleinen Werthes α fortlaufen.

VI.

Zweite Reihe

der

Anwendungen der höhern Analysis.

Drittes Kapitel.

Rektifikation der Kurven überhaupt und Quadratur der ebenen Kurven.

§. 27.

I. Iſt ECMDF (Fig. 1.) eine durch die Gleichung

$$y = y_x$$

gegebene Kurve; und ſoll der Inhalt ACDB beſtimmt werden, zwiſchen dem Bogen CMD, dem Stücke AB der Abſciſſen-Axe OX, und den mit der Ordinaten-Axe OY parallelen und auf AB ſenkrechten Geraden AC und BD, ſo findet man ohne Weiteres

$$\text{Inhalt ACMDBA} = \int_{b-a} y_x \cdot dx,$$

wenn a und b die Abſciſſen-Werthe der Punkte A und B vorſtellen, ſobald nur, wie in der Figur vorausgeſetzt worden iſt, zwiſchen $x = a$ und $x = b$ alle Ordinaten-Werthe poſitiv ſind, und die Kurve von $x = a$ an bis zu $x = b$ hin nicht ihre Stetigkeit unterbricht.

Denn, denkt man ſich zunächſt den beſondern Fall, daß zwiſchen $x = a$ und $x = b$, die Ordinaten fortwährend wachſen, ſo kann man den Raum $AB = b - a$ in unendlich viele, unendlich kleine Theile zerlegen, deren jeder durch dx bezeichnet ſeyn mag. Denkt man ſich nun über jedem dieſer Theile als Grundlinie, mit den zu den Endpunkten dieſer Theile gehörigen Ordinaten, als Höhen, Rechtecke gebildet, wie ſolche die Fig. 1.) ſehen läßt, ſo iſt augenfällig die Summe der äußern Rechtecke $>$ ACMDBA, und die Summe der innern Rechtecke $<$ ACMDBA. Da nun dx die gemeinſchaftliche Grundlinie aller dieſer Rechtecke iſt, ſo iſt die Summe der Inhalte der innern Rechtecke

$$= y_a \cdot dx + y_{a+dx} \cdot dx + y_{a+2dx} \cdot dx + \cdots + y_{b-dx} \cdot dx;$$

alſo iſt, weil dx unendlich klein iſt (nach §. 20.) dieſelbe Summe

$$= \int_{b-a} y_x \cdot dx.$$

Da nun das erſte äußere Rechteck dem zweiten innern, das zweite äußere dem dritten innern, u. ſ. w. f. gleich iſt, ſo iſt die Summe der äußern Rechtecke, um das letzte Rechteck $y_b \cdot dx$ größer, dagegen um das erſte Rechteck $y_a \cdot dx$ kleiner als die Summe der innern Rechtecke; folglich iſt die Summe der äußern Rechtecke

$$= \int_{b \div a} y_x \cdot dx + (y_b - y_a) \cdot dx.$$

Weil aber der zweite Summand dieſer Summe, nämlich $(y_b - y_a) \cdot dx$, unendlich klein iſt, gegen den erſten Summanden, ſo iſt dieſe Summe der Inhalte der äußern Rechtecke ebenfalls (nach I. Bd. §. 50.)

$$= \int_{b \div a} y_x \cdot dx.$$

Und daher iſt der Inhalt ACMDBA, weil er immer zwiſchen der Summe der äußern und der Summe der innern Rechtecke liegt, ebenfalls

$$= \int_{b \div a} y_x \cdot dx.$$

Und da im Falle der Fig. 2.), wo die Ordinaten fortwährend abnehmen, ganz dieſelben Schlüſſe (mit wenigen Abänderungen) angewandt werden können, ſo gilt der Satz auch dann noch.

Und weil der Inhalt ACMDBA in Fig. 3.) in die beiden Inhalte ACMP und PMDB zerlegt gedacht werden kann, wo PM die größeſte der zwiſchen $x = a$ und $x = b$ liegenden Ordinaten iſt, ſo folgt, wenn $OP = \alpha$ geſetzt wird,

$$\text{Inhalt ACMP} = \int_{\alpha \div a} y_x \cdot dx$$

und

$$\text{Inhalt PMDB} = \int_{b \div \alpha} y_x \cdot dx;$$

folglich, wenn man beide Gleichungen addirt, nach §. 24. I.)

$$\text{Inhalt ACMDB} = \int_{b \div a} y_x \cdot dx.$$

Endlich kann man die Richtigkeit des Satzes auch noch nachweiſen, wenn zwiſchen $x = a$ und $x = b$ noch mehreremale die Ordinaten vom Wachſen zum Abnehmen, und vom Abnehmen zum Wachſen übergehen ſollten, ſobald nur alle Ordinaten-Werthe zwiſchen $x = a$ und $x = b$ poſitiv ſind.

II. Iſt die Gleichung der Kurve $y = y_x$ ſo, daß ſie von $x = OH = \alpha$ an bis $x = OE = \beta$ hin (Fig. 3.) lauter poſitive Werthe von y, dagegen von $x = OE = \beta$ an bis $x = OF = \gamma$ hin lauter negative Werthe von y liefert, ſo iſt zwiſchen E und F die poſitive Ordinate durch $-y$ vorgeſtellt, und der Inhalt ENF findet ſich daher

$$= \int_{\gamma \div \beta} (-y_x) \cdot dx = -\int_{\gamma \div \beta} y_x \cdot dx.$$

In dieſem Falle würde alſo $\int_{\gamma \div \beta} y_x \cdot dx$ den Inhalt ENF

nicht, ſondern eine negative Zahl geben, deren abſolutes Glied der der Inhalt ENF ſeyn würde.

Und da (nach §. 24. I.)

$$\int_{\gamma+\alpha} y_x \cdot dx = \int_{\beta+\alpha} y_x \cdot dx + \int_{\gamma+\beta} y_x \cdot dx$$

iſt, ſo würde $\int_{\gamma+\alpha} y_x \cdot dx$ die Differenz ausdrücken, zwiſchen dem Inhalte HME und dem Inhalte ENF, d. h. die Differenz HME — ENF.

III. Wäre noch eine zweite Kurve C′M′D′ gegeben durch die Gleichung $y' = y'_x$ (Fig. 4. oder Fig. 5.), während die erſtere Kurve CMD noch immer durch die Gleichung $y = y_x$ gegeben ſeyn mag, ſo hätte man noch immer, wenn $OA = a$, $OB = b$ geſetzt wird,

1) Inhalt $ACMDB = \int_{b+a} y_x \cdot dx$;

und in Fig. 4.)

2) Inhalt $AC'M'D'B = \int_{b+a} y'_x \cdot dx$;

dagegen in Fig. 5.), weil daſelbſt alle y' negativ ſind

3) Inhalt $AC'M'D'B = -\int_{b+a} y'_x \cdot dx$,

wo, wie ſich von ſelbſt verſteht, jeder Inhalt poſitiv iſt.

Subtrahirt man nun 2.) von 1.) in Fig. 4.), oder addirt man 3.) zu 1.) in Fig. 5.), ſo erhält man jedesmal

(⊙) ··· Inhalt $CC'M'D'DM = \int_{b+a} (y_x - y'_x) \cdot dx$;

und dieſelbe Formel gilt offenbar auch noch, wenn die Fälle der Figg. 6. oder 7.) eintreten ſollten, ja ſelbſt dann noch, wenn die Fig. 8.) ſtatt hat, wie ſich ſehr einfach nachweiſen läßt, wenn das bisher Geſagte weiter verfolgt wird; ſo lange man nur $y_x - y'_x$ poſitiv vorausſetzt.

IV. Endlich erleiden alle dieſe Formeln durchaus keine Aenderung, wenn a negativ ſeyn ſollte, d. h. wenn die Koordinaten-Axe OY zwiſchen AC und BD zu liegen käme. Und eben ſo wenig ändern ſich dieſe Formeln, wenn a und b zugleich negativ ſind, d. h. wenn die Ordinaten-Axe OY rechts von BD zu liegen kommen ſollte, ſobald nur $b > a$ d. h.

b—a positiv bleibt, weil dann die Grundlinie dx der einzelnen Rechtecke doch immer positiv ist, und weil nach §. 2 unter allen Umständen das Integral $\int_{b+0} y \cdot dx$ die Summe der unendlich vielen Produkte

$$y_a \cdot dx + y_{a+dx} \cdot dx + y_{a+2dx} \cdot dx + \cdots + y_{b-dx} \cdot dx$$

vorstellt.

V. Die Formel III. ⊙.) wird besonders dann auch angewandt, wenn die zweite, durch $y' = y'_x$ gegebene Kurve, nicht anders als ein zweiter Zweig einer und derselben Kurve sein sollte, d. h. wenn die Gleichung $y = y_x$ zu einem Werthe von x, zwei verschiedene Werthe von y liefern sollte, von denen der größere durch y, der kleinere aber durch y' bezeichnet sein kann, so daß $y - y'$ positiv bleibt.

Dies alles mag nun durch einige Beispiele näher erörtert werden.

Beispiel 1. Ist (Fig. 9.) MOM' die durch die Gleichung

$$y^2 = px \quad \text{oder} \quad y = \sqrt{px}$$

gegebene Parabel, so ist, wenn OA = a, und OP = x gesetzt wird,

1) Inhalt $OPM = \int_{x+0} \sqrt{px} \cdot dx = \frac{2}{3} x \cdot \sqrt{px}$ *) $= \frac{2}{3} xy$ **).

Dagegen ist, weil der andere Werth von y, nämlich $y' = -\sqrt{px}$ wird,

2) Inhalt $MOM' = \int_{x+0} (\sqrt{px} - (-\sqrt{px})) \cdot dx = 2 \int_{x+0} \sqrt{px} \cdot dx$.

Ferner findet sich

3) Inhalt $ACMP = \int_{x+a} \sqrt{px} \cdot dx = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} (x^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}})$.

Würde man in derselben Parabel lieber x in y ausdrücken, so wäre ihre Gleichung

$$x = \frac{1}{p} y^2;$$

und

---

*) Es ist nämlich $\sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}$, also

$$\int \sqrt{px} \cdot dx = p^{\frac{1}{2}} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}};$$

und weil dieser Ausdruck für $x = 0$ selbst der Null gleich wird, so ist auch

$$\int_{x+0} \sqrt{px} \cdot dx = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x \cdot \sqrt{px}.$$

**) Der Inhalt OPM ist also $\frac{2}{3}$ von dem Inhalte des Rechtecks OPMQ.

und dann fände ſich

4) Inhalt $OQM = \int_{y\div 0} \frac{1}{p} y^2 \cdot dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p} y^3 = \frac{1}{2} xy$;

und, wenn $OB = b$ geſetzt wird,

5) Inhalt $BCMQ = \int_{y\div b} \frac{1}{p} y^2 \cdot dy = \frac{1}{3p}(y^3 - b^3)$,

wobei man bemerken mag, daß a und b zuſammengehörige Koordinaten-Werthe der Parabel für den Punkt C ſind, daß man alſo noch die Gleichung

$$b^2 = pa$$

hat, vermöge welcher b in a, oder a in b ausgedrückt werden kann.

Beiſpiel 2. Iſt $OE = r$ der Radius und O der Mittel-Punkt eines Kreiſes CMDE (Fig. 10.), ſo iſt, wenn x und y die aus O genommenen Koordinaten-Werthe (OP und PM) eines beliebigen Punktes M deſſelben vorſtellen, die Gleichung dieſes Kreiſes

$$y^2 = r^2 - x^2 \quad \text{oder} \quad y = \sqrt{r^2 - x^2};$$

und man hat, wenn $OA = a$ und $OB = b$ geſetzt wird,

1) Inhalt $OFMP = \int_{x\div 0} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$;

2) Inhalt $ACMP = \int_{x\div a} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$;

3) Inhalt $ACMDB = \int_{b\div a} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$;

4) Inhalt $PME = \int_{r\div x} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$;

5) Inhalt $OFME = \int_{r\div 0} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$;

6) Inhalt $GMP = \int_{x\div(-r)} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$;

7) Inhalt $GFEG = \int_{r\div(-r)} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$;

u. ſ. w. f.

Alles kommt nun darauf an, $\int \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$ zu finden. Dies geſchieht entweder indem man (nach §. 12.) dieſe irrationale Funktion rational macht, oder indem man die Reduktions-Formeln des §. 13.) anwendet. Man kann, will man das letztere thun, zuerſt $\frac{r^2 - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ ſtatt $\sqrt{r^2 - x^2}$ ſchreiben; hernach kann man nach dem Verfahren, welches bei §. 13. N. 2.) angewandt worden iſt, $x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$ differenziiren. Man erhält dann

$$\partial(x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}) = \frac{r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 2\frac{r^2 - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Folglich iſt, wenn man durch 2 dividirt, und integrirt

$$\int \frac{r^2 - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{1}{2} r^2 \cdot \int \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx,$$

d. h. nach §. 5. N. 11.) oder §. 6. N. 18.)

$$\int \sqrt{r^2-x^2}\cdot dx = \tfrac{1}{2}x\cdot\sqrt{r^2-x^2} - \tfrac{1}{2}r^2\cdot\frac{1}{\cos}\frac{x}{r}.$$

Subſtituirt man nun dieſes Reſultat in die Formeln 1.—7.), ſo

ſich, weil $\frac{1}{\cos}0 = \frac{1}{2}\pi$ iſt,

1') Inhalt OFMP $= \tfrac{1}{2}x\cdot\sqrt{r^2-x^2} + \tfrac{1}{4}r^2\pi - \tfrac{1}{2}r^2\cdot\frac{1}{\cos}\frac{x}{r}$ *).

2') Inhalt ACMP

$$= \tfrac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2} - \tfrac{1}{2}a\sqrt{r^2-a^2} + \tfrac{1}{2}r^2\cdot\frac{1}{\cos}\frac{a}{r} - \tfrac{1}{2}r^2\cdot\frac{1}{c}$$

3') Inhalt ACMDB

$$= \tfrac{1}{2}b\sqrt{r^2-b^2} - \tfrac{1}{2}a\sqrt{r^2-a^2} + \tfrac{1}{2}r^2\cdot\frac{1}{\cos}\frac{a}{r} - \tfrac{1}{2}r^2\cdot\frac{1}{c}$$

Ferner, weil $\frac{1}{\cos}1 = 0$ iſt,

4') Inhalt PME $= -\tfrac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2} + \tfrac{1}{2}r^2\cdot\frac{1}{\cos}\frac{x}{r}$ **),

5') Inhalt OFME $= \tfrac{1}{4}r^2\cdot\frac{1}{\cos}0 = \tfrac{1}{4}r^2\cdot\tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{8}r^2\pi$.

Endlich noch, weil $\frac{1}{\cos}(-1) = \pi$ iſt,

6') Inhalt GMP $= \tfrac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2} - \tfrac{1}{2}r^2\cdot\frac{1}{\cos}\frac{x}{r} + \tfrac{1}{2}r^2\cdot\pi$.

Zuletzt, weil $\frac{1}{\cos}1 = 0$ und $\frac{1}{\cos}(-1) = \pi$ iſt,

7') Inhalt GFE $= -\tfrac{1}{2}r^2\cdot\frac{1}{\cos}1 + \tfrac{1}{2}r^2\cdot\frac{1}{\cos}(-1) = \tfrac{1}{2}r^2\pi$.

---

*) Es drückt $\frac{1}{4}r^2\pi$ den Quadranten OFME aus. Ferner iſt
nichts anders als der Winkel MOE im Bogen für den Radius 1
drückt; alſo iſt $\frac{1}{2}r^2\cdot\frac{1}{\cos}\frac{x}{r}$ der Inhalt des Sektors MOE. End
$\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{r^2-x^2} = \frac{1}{2}xy = \triangle$OMP. Folglich konnte man das Reſult
ohne Integration, aus der Euklid. Geometrie ableiten.

**) Es iſt $\frac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2} = \frac{1}{2}x\cdot y = \triangle$OMP

und $\frac{1}{2}r^2\cdot\frac{1}{\cos}\frac{x}{r}$ = Inhalt des Sektors OMEO;

alſo hätte man auch dieſes Reſultat unmittelbar aus der Euklidiſchen
metrie erhalten können, ohne die Integral-Rechnung zu Hülfe n
zu müſſen.

So findet sich also der Inhalt des ganzen Kreises $= r^2\pi$, wie in der Euklidischen Geometrie *).

Beispiel 3. Soll der Inhalt der durch die Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2) \quad \text{oder} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$$

gegebenen Ellipse OMDB (Fig. 11.) gefunden werden, so hat man

$$\text{Inhalt OMP} = \int_{x\dot{+}0} \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}\cdot dx = \frac{b}{a}\int_{x\dot{+}0}\sqrt{2ax - x^2}\cdot dx.$$

Es ist aber $\int_{x\dot{+}0}\sqrt{2ax - x^2}\cdot dx$ der Inhalt ONP des Kreises, welcher den Radius $CO = CB = a$ und mit der Ellipse den Mittelpunkt C gemein hat. Folglich ist

$$\text{Inhalt OMP} = \frac{b}{a} \times \text{Inhalt ONP}.$$

Nun ist der Inhalt ONP oder vielmehr

$$\int_{x\dot{+}0}\sqrt{2ax - x^2}, = \tfrac{1}{2}a^2\cdot\frac{1}{\cos}\frac{a-x}{a} - \tfrac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax - x^2};$$

folglich ist

$$\text{Inhalt OMP} = \tfrac{1}{2}ab\cdot\frac{1}{\cos}\frac{a-x}{a} - \tfrac{1}{2}\frac{b}{a}(a-x)\sqrt{2ax - x^2}.$$

Also ist auch, wenn $x = a$ gesetzt wird, und weil $\frac{1}{\cos}0 = \frac{1}{2}\pi$ ist,

$$\text{Inhalt OCD} = \tfrac{1}{4}ab\pi.$$

Der Inhalt der ganzen Ellipse ist daher $= ab\pi$ **).

---

*) Da das Integriren immer mühsam ist, so bedient man sich zuweilen solcher geometrischen Betrachtungen, um ein Integral ohne zu integriren zu finden. Soll z. B. $\int\sqrt{2ax - x^2}\cdot dx$ gefunden werden, so erinnere man sich, daß $y = \sqrt{2ax - x^2}$ die Gleichung eines Kreises ist, der den Radius a hat, daß also $\int_{x\dot{+}0}\sqrt{2ax - x^2}\cdot dx$ den Inhalt GNQ des Kreises (Fig. 10.) ausdrückt, wenn $GQ = x$ gesetzt wird. Nun ist aber Inhalt GNQ = Sektor $GNO - \triangle NOQ$; und zu gleicher Zeit ist der Winkel NOG im Bogen für den Radius 1 ausgedrückt, $= \frac{1}{\cos}\frac{OQ}{ON} = \frac{1}{\cos}\frac{a-x}{a}$, folglich Bog. $NG = a\cdot\frac{1}{\cos}\frac{a-x}{a}$ und Sektor $NOGN = \frac{1}{2}a^2\cdot\frac{1}{\cos}\frac{a-x}{a}$. Ferner ist $\triangle NOQ = \frac{1}{2}OQ\cdot QN = \frac{1}{2}(a-x)\cdot\sqrt{2ax - x^2}$; folglich findet sich auf diesem Wege

$$\int\sqrt{2ax - x^2}\cdot dx = \tfrac{1}{2}a^2\cdot\frac{1}{\cos}\frac{a-x}{a} - \tfrac{1}{2}(a-x)\cdot\sqrt{2ax - x^2}.$$

**) Es ist $OMP = \frac{b}{a}\cdot ONP$ und $\triangle CMP = \frac{b}{a}\triangle CNP$; folglich

Beiſpiel 4. Suchen wir noch den Inhalt der durch die Gleichung

$$y = \frac{c}{x}$$

gegebenen Hyperbel (Fig. 12.). — Hier wird

$$\int y \cdot dx = \int \frac{c}{x} \cdot dx = c \cdot log\, x.$$

Sucht man nun den Inhalt ACDB von $x = -OA = a$ an, $x = -OB = b$ hin, ſo erhält man (nach II.)

$$\text{Inhalt ACDB} = \int_{b+a} -y \cdot dx = c \cdot log\, a - c \cdot log\, b = c \cdot log \frac{a}{b},$$

wo a und b beide negativ ſind, wo alſo $\frac{a}{b}$ poſitiv iſt.

Soll dagegen der Inhalt EFHG, von $x = OE = \alpha$ an bis $x = OG = \beta$ hin gefunden werden, ſo erhält man

$$\text{Inhalt EFHG} = c \cdot log\, \beta - c \cdot log\, \alpha = c \cdot log \frac{\beta}{\alpha},$$

wo immer die natürlichen Logarithmen zu verſtehen ſind.

Iſt $\alpha < 1$, ſo iſt $log\, \alpha$ negativ; alſo iſt dann derſelbe Inhalt größer als $log\, \beta$. Dagegen iſt derſelbe Inhalt $< log\, \beta$, wenn $\alpha > 1$. Für $\alpha = 1$ iſt derſelbe Inhalt $= log\, \beta$.

Wollte man den Inhalt finden zwiſchen OY und GH, d. h. von x an, bis $x = OG = \beta$ hin, ſo würde man ſelbigen erhalten

$$= c \cdot log\, \beta - c \cdot log\, 0;$$

und dies zeigt an, daß dieſer Inhalt unendlich groß iſt. Dies letztere ſieht man aber dann erſt am deutlichſten ein, wenn man zuerſt α ſehr klein etwa $= \frac{1}{n}$ nimmt, wo n recht groß und zuletzt unendlich groß gedacht werden kann. Dann findet ſich derſelbe Inhalt $= c \cdot log\,(n\beta)$; ſolcher mit n zugleich unendlich groß. — Dies kann nicht auffallen, da OY Aſymptote der Hyperbel iſt, letztere alſo nie mit OY ſich ſchneidet, wenn auch beide einander unendlich nahe rücken.

Im nächſten Beiſpiele werden wir aber ſehen, daß es Fälle geben kann, wo der Inhalt zwiſchen einer Aſymptote und einer Ordinate doch einen endlichen beſtimmten Werth hat.

Beiſpiel 5. Es ſey gegeben die Gleichung

$$y^3 = \frac{a^2}{x^2} \qquad \text{oder} \qquad y = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{2}{3}},$$

---

auch, wenn man addirt

$$\text{Sektor OCM} = \frac{b}{a} \times \text{Sektor OCN}$$
$$= \tfrac{1}{2} b \times \text{Bog. ON}.$$

so giebt solche die Kurve, wie sie in Fig. 13.) zu sehen ist, wo OY und OX zwei Asymptoten sind, während die beiden Zweige links und rechts von OY einander congruent sind. Soll nun der Inhalt zwischen OY und PM gefunden werden, während $OP = x$ ist, so erhält man zunächst

$$\int y \cdot dx = \int a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}} \cdot dx = 3a^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{a^2 x};$$

folglich, ist

$$\text{Inhalt } YOPM = \int_{x \div 0} y \cdot dx = 3\sqrt[3]{a^2 x} = 3xy;$$

d. h. dieser Inhalt ist nicht unendlich-groß, sondern hat einen völlig bestimmten Werth, und zwar ist er drei mal so groß, als das von x und y gebildete Rechteck OPMQ.

Weil aber y, wenn auch nicht zwischen den Grenz-Werthen von x, aber doch an der Grenze, nämlich für $x = 0$, den Werth $\frac{1}{0}$ annimmt, die Kurve also ihre Stetigkeit an dieser Stelle unterbricht, so braucht das so eben gefundene Resultat doch noch der Bestätigung. Zu dem Ende suche man den Inhalt QMAB, welcher zwischen den Grenz-Werthen von y, nämlich $y = OQ = y$ und $y = OA = \beta$ liegt. Man findet

$$\text{Inhalt } QMAB = \int_{\beta \div y} x_y \cdot dy = \int_{\beta \div y} \frac{a}{y^{\frac{1}{3}}} \cdot dy;$$

weil aber $\int \frac{a}{y^{\frac{1}{3}}} \cdot dy = a \int y^{-\frac{1}{3}} \cdot dy = -2\frac{a}{\sqrt[3]{y}}$ wird, so findet sich weiter

$$\text{Inhalt } QMAB = 2\frac{a}{\sqrt[3]{y}} - 2\frac{a}{\sqrt[3]{\beta}}.$$

Nimmt man hier $\beta = \infty$, und addirt man das Rechteck $OPMQ = xy$ noch hinzu, so erhält man

$$\text{Inhalt } YOPM = 2\frac{a}{\sqrt[3]{y}} + xy;$$

und dies giebt genau den auch oben gefundenen Ausdruck, sobald statt y sein Werth $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$, und statt $\sqrt[3]{y}$ ihr Werth $\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$ gesetzt wird.

Sucht man den Inhalt CDOY, zwischen $x = -OC = \alpha$ und $x = 0$, so erhält man

$$\text{Inhalt } DCOY = \int_{0 \div \alpha} y \cdot dx = -3\sqrt[3]{a^2 \alpha};$$

welcher Ausdruck deshalb positiv ist, weil α, folglich auch die Kubikwurzel aus $a^2\alpha$ einen negativen Werth hat. Addirt man diese beiden hier gefundenen Inhalte, so ergiebt sich noch

$$\text{Inhalt } DCPM = 3\sqrt[3]{a^2 x} - 3\sqrt[3]{a^2 \alpha}.$$

Daſſelbe hätte man auch erhalten, wenn man dieſen Inhalt $DCPM = \int_{x+\alpha} y_x \cdot dx$ genommen hätte. Dasmal iſt alſo der Inhalt zwiſchen $x = \alpha$ und $x = x$ doch noch $\int_{x+\alpha} y_x \cdot dx$, obgleich zwiſchen $x = -OC = \alpha$ und $x = OP = x$ ein Werth von x (nämlich $x = 0$) liegt, für welchen $y = \frac{1}{0}$ wird.

Beiſpiel 6. Nimmt man dagegen die Kurve

$$y = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{4}{3}},$$

ſo kann man ſie, was die Aſymptoten und die äußere Form anlangt, ebenfalls durch die Fig. 13.) vorſtellen. Nun iſt aber

$$\int y \cdot dx = a^{\frac{4}{3}} \int x^{-\frac{4}{3}} \cdot dx = -3 \frac{a^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = -3a \sqrt[3]{\frac{a}{x}}.$$

Deshalb iſt jetzt

$$\text{Inhalt } YOPM = \int_{x+0} y \cdot dx = 3a \sqrt[3]{\frac{a}{0}} - 3a \sqrt[3]{\frac{a}{x}};$$

folglich iſt jetzt dieſer Inhalt unendlich-groß, wie man deutlicher erſieht, wenn man die zweite Grenze von x nicht Null, ſondern $= \frac{1}{n}$ nimmt, zuletzt aber n unendlich-groß ſich denkt *).

Beiſpiel 7. Nimmt man die Kurve (Fig. 17.), welche durch die Gleichung

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

gegeben iſt, ſo findet ſich

$$\int y \cdot dx = \frac{1}{tg} x, \quad \text{auch} \quad = \frac{1}{cos} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Iſt nun $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $-OC = \gamma$ und $-OD = \delta$, ſo findet ſich

---

*) Wollte man hier den Inhalt CDPM dadurch finden, daß man ihn $= \int_{x+\alpha} y \cdot dx$ nimmt, ſo würde man ihn

$$= 3a \sqrt[3]{\frac{a}{\alpha}} - 3a \sqrt[3]{\frac{a}{x}}$$

erhalten, während er unendlich-groß iſt. Wir ſind aber auch nicht berechtigt, dieſen Inhalt $= \int_{x+\alpha} y \cdot dx$ zu ſetzen, weil y zwiſchen dieſen Grenz-Werthen von x, einmal (für $x = 0$) die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, die Kurve alſo ihre Stetigkeit unterbricht.

$$\cdot dx = \int \varphi_x \cdot dx + \frac{1}{1-\mu} \cdot (x-a)^{1-\mu} \cdot \psi_x - \frac{1}{1-\mu} \int (x-a)^{1-\mu} \cdot \partial\psi_x \cdot dx,$$

ß diese Formel, wenn man sie einmal unter der Voraussetzung betrachtet, ß $\mu < 1$ ist, dann auch indem man $\mu > 1$ voraussetzt, läßt die Wahrheit r Behauptung schon deutlich erkennen.

Anmerkung 2. Man kann auch die Inhaltsbestimmung s dem Gesichtspunkte betrachten, daß man sagt: die Inhalte r Flächenfiguren (Fig. 2.) OEMP und ACMP, welche von r, zum Abscissen-Werthe OP = x gehörigen Ordinate MP = y grenzt werden, sind verschiedene Funktionen von x, die jedoch r um den constanten (d. h. von x = OP unabhängigen) Theil OCA, von einander verschieden sind, deren Ableitung nach x so jedesmal eine und dieselbe ist, so nämlich daß, wenn man gend einen dieser Inhalte durch f_x bezeichnet, dann

$$\partial f_x = y$$

rd, wie wir im I. Bd. §. 174.) bereits gesehen haben.

Aus $\partial f_x = y$ folgt aber

$$f_x = \int y \cdot dx = \psi_x + C,$$

nn ψ_x irgend ein besonderes Integral von $y \cdot dx$ ist. Ist nn ψ_x völlig bestimmt und gefunden, so muß noch die Conante C so bestimmt werden, daß $\psi_x + C$ gerade denjenigen der halte OEMP oder ACMP ausdrückt, den man finden wollte. oll aber z. B. der Inhalt ACMP gefunden werden, während OA = a gegeben ist, so muß die gesuchte Funktion f_x oder $\psi_x + C$ so seyn, daß ihr Werth der Null gleich wird, sobald man a statt x setzt. Also hat man nothwendig, $\psi_a + C = 0$, d. h. $C = -\psi_a$, so daß

$$f_x = \psi_x - \psi_a$$

wird.

Nimmt man das Beispiel 6.) noch einmal vor, wo die Kurve (Fig. 13.) rch die Gleichung

$$y = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{4}{3}}$$

geben ist, und wo man also den Inhalt f_x zunächst wie folgt erhält, nämlich

wo aber beide $\frac{1}{\cos}$ negativ genommen werden müssen, so daß der

Inhalt auch

$$= \frac{1}{\cos} \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} - \frac{1}{\cos} \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}$$

geschrieben werden kann, sobald man sich vornimmt, statt der $\frac{1}{\cos}$ lau

positive Werthe zu setzen.

Dieser Bemerkungen muß man aber allemal eingedenk seyn, so

das Integral, welches den Inhalt ausdrücken soll, ein mehrdeutiger

druck wird.

Anmerkung 1. So oft man den Inhalt der durch

Gleichung

$$y = \varphi_x + \frac{\psi_x}{(x-a)^\mu}$$

gegebenen Kurve zwischen den Grenzen $x = \alpha$ und $x = \beta$

ben will, zwischen denen a liegt, so daß y zwischen diesen Gr

zen einmal, nämlich für $x = a$, die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, d

Kurve also ihre Stetigkeit unterbricht, so oft ist der Inhalt doch

noch immer

$$= \int_{\beta \div \alpha} y \cdot dx, \quad \text{wenn} \quad \mu < 1 \text{ ist},$$

dagegen $= \infty$, wenn $\mu > 1$ ist, während in diesem letztern Falle

das Integral $\int_{\beta \div \alpha} y \cdot dx$ den Inhalt endlich, folglich unrichtig

angeben würde.

Und namentlich ist der Inhalt, von der zu $x = a$ gehöri-

gen Asymptote ab, allemal noch

$$= \int_{\beta \div a} y \cdot dx \quad \text{und endlich, wenn} \quad \mu < 1,$$

dagegen $= \infty$, wenn $\mu > 1$ seyn sollte. Dabei haben wir aber

stillschweigend vorausgesetzt, daß φ_x und ψ_x ganz beliebige

Funktionen von x sind, welche jedoch für keinen der Werthe

von x, von α bis β hin, ihre Stetigkeit unterbrechen.

Die vorhergehenden Beispiele 5.) und 6.) liefern die Muster des hier

zu gebenden allgemeinen Beweises. Außerdem kann man den zweiten Theil

von y theilweise integriren, so daß man erhält

$$\int y \cdot dx = \int \varphi_x \cdot dx + \frac{1}{1-\mu} \cdot (x-a)^{1-\mu} \cdot \psi_x - \frac{1}{1-\mu} \int (x-a)^{1-\mu} \cdot \partial\psi_x \cdot dx,$$

und diese Formel, wenn man sie einmal unter der Voraussetzung betrachtet, daß $\mu < 1$ ist, dann auch indem man $\mu > 1$ voraussetzt, läßt die Wahrheit der Behauptung schon deutlich erkennen.

Anmerkung 2. Man kann auch die Inhaltsbestimmung aus dem Gesichtspunkte betrachten, daß man sagt: die Inhalte, der Flächenfiguren (Fig. 2.) OEMP und ACMP, welche von der, zum Abscissen-Werthe $OP = x$ gehörigen Ordinate $MP = y$ begrenzt werden, sind verschiedene Funktionen von x, die jedoch nur um den constanten (d. h. von $x = OP$ unabhängigen) Theil ECOCA, von einander verschieden sind, deren Ableitung nach x also jedesmal eine und dieselbe ist, so nämlich daß, wenn man irgend einen dieser Inhalte durch f_x bezeichnet, dann

$$\partial f_x = y$$

wird, wie wir im I. Bd. §. 174.) bereits gesehen haben.

Aus $\partial f_x = y$ folgt aber

$$f_x = \int y \cdot dx = \psi_x + C,$$

wenn ψ_x irgend ein besonderes Integral von $y \cdot dx$ ist. Ist nun ψ_x völlig bestimmt und gefunden, so muß noch die Constante C so bestimmt werden, daß $\psi_x + C$ gerade denjenigen der Inhalte OEMP oder ACMP ausdrückt, den man finden wollte. Soll aber z. B. der Inhalt ACMP gefunden werden, während $OA = a$ gegeben ist, so muß die gesuchte Funktion f_x oder $\psi_x + C$ so seyn, daß ihr Werth der Null gleich wird, sobald man a statt x setzt. Also hat man nothwendig, $\psi_a + C = 0$, d. h. $C = -\psi_a$, so daß

$$f_x = \psi_x - \psi_a$$

wird.

Nimmt man das Beispiel 6.) noch einmal vor, wo die Kurve (Fig. 13.) durch die Gleichung

$$y = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{4}{3}}$$

gegeben ist, und wo man also den Inhalt f_x zunächst wie folgt erhält, nämlich

$$f_x = -3a\sqrt[3]{\frac{a}{x}} + C;$$

und ſucht man den Inhalt von CD an, während $-OC = a$ gegeben i ſo erhält man

$$C = 3a\sqrt[3]{\frac{a}{a}}, \quad \text{alſo} \quad f_x = 3a\sqrt[3]{\frac{a}{a}} - 3a\sqrt[3]{\frac{a}{x}},$$

ſo oft x den Punkten des Zweiges DNL zukommt. Sobald aber x Punkten des andern Zweiges BMH zukommt, ſo gilt dieſe Conſtante mehr, ſondern es wird dann $C = \infty$, ſo oft man den Inhalt von CD genommen haben will, weil ſolcher dann allemal unendlich groß wird, wir im Beiſpiel 6.) geſehen haben *).

Betrachten wir noch die durch die Gleichung

$$y = -\frac{1}{x}$$

gegebene Hyperbel (Fig. 14.). Für ſie wird der Inhalt

$$f_x = -\log x + C;$$

und ſoll der Inhalt von AB an genommen ſeyn, während $-OA = a$ g geben iſt, ſo hat man

$$0 = -\log a + C \quad \text{oder} \quad C = \log a,$$

ſo daß der Inhalt $= \log a - \log x = \log \frac{a}{x}$ wird. Dasmal iſt Conſtante C imaginär, nämlich der natürliche Logarithme der negativen Zahl a; allein da für alle Punkte im Zweige BMH die Werthe von x negativ ſind, ſo iſt $\log x$ ebenfalls jedesmal imaginär. Dieſe beiden imaginären Logarithmen in Verbindung, geben dann den reellen Inhalt $\log \frac{a}{x}$, in ſo fern $\frac{a}{x}$ wiederum poſitiv iſt.

§. 28.

Iſt eine Kurve OMB (Fig. 15.) durch eine Gleichung zwiſchen Polar-Koordinaten gegeben, iſt z. B. Winkel $OFM = v$ und $FM = r$ und die Kurve OMB gegeben durch die Gleichung

$$r = r_v,$$

während v im Bogen für den Radius 1 ausgedrückt wird, —

*) Dies iſt ein Beiſpiel, wo die Conſtante einen andern Werth annimmt, ſobald die Reihe der Werthe von y ihre Stetigkeit unterbricht. In Anwendungen auf trigonometriſche Unterſuchungen kommen aber viel inſtruktivere Fälle der Art vor.

Beispiel 1. Sucht man den Bogen der durch die Gleichung

$$y = px^n$$

gebenen Kurve, wo n ganz oder gebrochen seyn kann, so findet man $\frac{dy}{dx} = npx^{n-1}$, folglich

$$s = \int_{x+a} \sqrt{1 + n^2p^2x^{2n-2}} \cdot dx.$$

Ist z. B. $2n-2=1$, also $n=\frac{3}{2}$, so wird

$$s = \int_{x+a} \sqrt{1+n^2p^2x} \cdot dx = \frac{8}{27p^2}\left(\sqrt{1+\tfrac{9}{4}p^2x} - \sqrt{1+\tfrac{9}{4}p^2a}\right)^{*)},$$

o dies ist der Bogen der durch die Gleichung $y = px^{\frac{3}{2}}$ oder $y^2 = p^2x^3$ gebenen und gewöhnlich Parabel der dritten Ordnung genannten, Kurve.

Für die gewöhnliche Parabel ist $n=2$ und für sie wird daher der ogen

$$s = \int_{x+a} (1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot dx.$$

Dieses Integral reducirt sich nach den Formeln des §. 13.) auf

$$\tfrac{1}{2}x(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+4p^2x^2}} \cdot dx,$$

rend das letztere Integral (im §. 6.) bereits

$$= \frac{1}{2p} \cdot log\left(2px + \sqrt{1+4p^2x^2}\right)$$

unden worden ist. Man hat daher für $a=0$

$$s = \tfrac{1}{2}x\sqrt{1+4p^2x^2} + \frac{1}{4p} \cdot log\left(2px + \sqrt{1+4p^2x^2}\right).$$

Für n negativ, also für die Hyperbeln der verschiedenen Ordnungen kann das Integral nicht in endlicher Form gefunden werden **).

Beispiel 2. Für die durch die Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

gebene Ellipse, wird, wenn man $\frac{a^2-b^2}{a^2} = e^2$ setzt, der Bogen

---

*) Diese Kurven werden Parabeln höherer Ordnung genannt, so lange n positiv ist; sie heißen aber Hyperbeln höherer Ordnung, wenn n negativ, also $-n$ positiv ist.

**) Eine Kurve heißt gewöhnlich quadrirbar oder rektificirbar, wenn die Integrale, welche den Flächen-Inhalt oder den Bogen geben, in endlicher Form gefunden werden können; im entgegengesetzten Falle ist sie „nicht quadrirbar" oder „nicht rektificirbar". Wir legen hier auf diesen Unterschied gar keinen Werth und halten alle Kurven für quadrirbar, auch alle für rektificirbar; denn die sogenannten Ausdrücke in endlicher Form sind oft nichts anders als unendliche Reihen, wie z. B. a^x, $\sin x$, $\sqrt{1+x}$, etc. etc.

§. 29.

Wird der Bogen CM einer Kurve OCM gesucht (Fig. welche entweder durch die Gleichung $y = y_x$ zwischen OP = und PM = y, oder durch die Gleichung $r = r_v$ zwischen W kel OFM = v und FM = r gegeben ist, so findet sich sol wenn OA = a und Winkel OFC = α gesetzt wird, unmitte nach I. Bd. §. 174.) und nach dem §. 20. d. II. Bd.), n lich so:

1) $\quad$ Bogen $CM = \int_{x \div a} \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx$

und auch

2) $\quad$ Bogen $CM = \int_{v \div \alpha} \sqrt{\partial r_v^2 + r^2} \cdot dv.$

Ist aber die Kurve eine doppelt gekrümmte und durch die den Gleichungen $y = y_x$ und $z = z_x$ gegeben, welche sich drei auf einander senkrechte Koordinaten-Axen OX, OY OZ beziehen, so ist der zwischen den zu $x = a$ und $x = x$ hörigen Endpunkten liegende Bogen s dieser Kurve so:

3) $\quad s = \int_{x \div a} \sqrt{1 + \partial y_x^2 + \partial z_x^2} \cdot dx.$

Ist nämlich in einer Kurve doppelter Krümmung M der Punkt, d Koordinaten-Werthe x, y, z sind, und N der nächst anliegende Pu dessen Koordinaten-Werthe $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ sind, so ist MN unendlich kleine Zuwachs des Bogens s, der durch ds bezeichnet we kann. Diese Linie MN oder ds, als Gerade angesehen, ist aber der Li nach (nach I. Bd. §. 135.), weil dx, dy, dz die Differenzen der Koo naten-Werthe ihrer Endpunkte sind, ausgedrückt durch

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

während $dy = \partial y_x \cdot dx$ und $dz = \partial z_x \cdot dx$ ist, so daß

$$ds = \sqrt{1 + \partial y_x^2 + \partial z_x^2} \cdot dx$$

wird. Die Summe aller dieser Elementchen ds von $x = a$ an bis $x = x$ hin, ist aber der gesuchte Bogen s von $x = a$ an bis zu $x =$ hin, also ist nach §. 20.)

$$s = \int_{x \div a} \sqrt{1 + \partial y_x^2 + \partial z_x^2} \cdot dx.$$

d. h. $$s = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} \cdot r,$$

wenn man den Bogen da anfangen läßt, wo $r = 0$ ist, d. h. für $v = -\infty$.

Diese Spirale macht also unendlich viele Windungen, für welche $r < 1$ und v negativ, und dann noch unendlich viele Windungen, in welchen $r > 1$ ist und v positiv. Die Länge der erstern unendlich vielen Windungen bis zu dem Punkte hin, wo $r = 1$, ist aber endlich und $= \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$.

§. 30.

Eine wichtige Bemerkung über die Rektifikation.

Es ist wichtig zu bemerken, daß weder die Theorie noch die Anwendung der Rektifikation der Kurven, **sobald man rechtwinkliche Koordinaten-Axen gebraucht**, der ebenen Trigonometrie bedürfen. Die gesammte Analysis bedarf derselben auch nicht. Folglich kann man die Rektifikation der Kurven vornehmen, ohne von der ebenen Trigonometrie nur eine Ahnung zu haben. Man trägt die gesammte Arithmetik, Algebra, Analysis des Endlichen und Differential- und Integral-Rechnung, mit einem Worte, den gesammten Kalkul vor, ohne das Daseyn einer Geometrie überhaupt nur zu kennen. Man kommt in der Analysis des Endlichen bei Gelegenheit der Auffindung des $log(p+q\cdot i)$ zu den beiden Reihen

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \text{ in inf.}$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \text{ in inf.}$$

die man unter den Namen *sin* x und *cos* x einer nähern und gründlichen Untersuchung unterwirft, ganz so wie wir dies im ersten Bande dieser Schrift gethan haben. Man gelangt so zur sogenannten **analytischen** Trigonometrie, welche keine Geometrie voraussetzt oder kennt, welche aber die Zahl $\pi = 3{,}14159\cdots$ einführt, und zwar als die kleinste ihrer Art, der die Eigenschaft zukommt, daß $sin\,\frac{1}{2}\pi = 1$ wird, d. h. daß die Reihe für *sin* x den Werth 1 annimmt, so oft man statt x die Zahl $\frac{1}{2}\pi$ setzt.

$$s = \int_{x+a} \frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx.$$

Dieſes Integral kann nur näherungsweiſe gefunden werden und wir im §. 18.) bereits eine unendliche Reihe gefunden, welche, wenn klein iſt, und wenn x nicht größer als 1 gedacht wird, ſehr ſchnell conv

Beiſpiel 3. Suchen wir die Länge der doppelt gekrümmten welche, auf die Ebenen XOY und XOZ projicirt, bezüglich die Gleichungen

$$y^2 = p^2x^3 \quad \text{und} \quad z^2 = q^2x^3$$

gegebenen Parabeln der dritten Ordnung liefert.

Hier iſt

$$y = px^{\frac{3}{2}}, \quad \text{alſo} \quad \delta y_x = \tfrac{3}{2}px^{\frac{1}{2}};$$

und

$$z = qx^{\frac{3}{2}}, \quad \text{alſo} \quad \delta z_x = \tfrac{3}{2}qx^{\frac{1}{2}}.$$

Demnach iſt

$$s = \int_{x+a} \sqrt{1+\tfrac{9}{4}(p^2+q^2)x} \cdot dx$$

$$= \frac{8}{27(p^2+q^2)}\left([1+\tfrac{9}{4}(p^2+q^2)x]^{\frac{3}{2}} - [1+\tfrac{9}{4}(p^2+q^2)\right.$$

Beiſpiel 4. Iſt die Gleichung

$$r = av^n$$

der Spiralen gegeben, wo r und v Polar-Coordinaten ſind, ſo h

$$\delta r_v = nav^{n-1};$$

alſo

$$r^2 + \delta r_v^2 = a^2v^{2n-2}(v^2+n^2)$$

und

$$s = \int_{v+\alpha} av^{n-1}\sqrt{n^2+v^2} \cdot dv = a\int_{v+\alpha} v^{n-1}(n^2+v^2)^{\frac{1}{2}} \cdot dv.$$

Für den beſonderen Fall, wo $n = 1$ iſt, findet man alſo

$$s = \int_{v+\alpha} a(1+v^2)^{\frac{1}{2}} \cdot dv;$$

und dieſes Integral wird nach §. 13.) und §. 6.) ohne Weiteres gef

Beiſpiel 5. Für die durch die Gleichung

$$r = e^{av}, \quad \text{oder} \quad v = \frac{1}{a} log\, r$$

gegebene logarithmiſche Spirale wird

$$\delta r_v = a \cdot e^{av}$$

folglich

$$\sqrt{r^2+\delta r_v^2} = e^{av}\cdot\sqrt{1+a^2};$$

Demnach iſt

$$s = \sqrt{1+a^2}\cdot\int_{v+\alpha} e^{av}\cdot dv = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\cdot(e^{av} - e^{a\alpha}),$$

h. $$s = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} \cdot r,$$

an man den Bogen da anfangen läßt, wo $r = 0$ ist, d. h. für $= -\infty$.

Diese Spirale macht also unendlich viele Windungen, für welche $r < 1$ und v negativ, und dann noch unendlich viele Windungen, in welchen > 1 ist und v positiv. Die Länge der erstern unendlich vielen Windungen bis zu dem Punkte hin, wo $r = 1$, ist aber endlich und $= \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$.

§. 30.

Eine wichtige Bemerkung über die Rektifikation.

Es ist wichtig zu bemerken, daß weder die Theorie noch die Anwendung der Rektifikation der Kurven, **sobald man schtwinkliche Koordinaten-Axen gebraucht**, der ebenen Trigonometrie bedürfen. Die gesammte Analysis bedarf derselben auch nicht. Folglich kann man die Rektifikation der Kurven vornehmen, ohne von der ebenen Trigonometrie nur eine Ahnung zu haben. Man trägt die gesammte Arithmetik, Algebra, Analysis des Endlichen und Differential- und Integral-Rechnung, mit einem Worte, den gesammten Kalkul vor, ohne das Daseyn einer Geometrie überhaupt nur zu kennen. Man kommt in der Analysis des Endlichen bei Gelegenheit der Auffindung des $log(p+q\cdot i)$ zu den beiden Reihen

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \text{ in inf.}$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \text{ in inf.}$$

die man unter den Namen *sin* x und *cos* x einer nähern und gründlichen Untersuchung unterwirft, ganz so wie wir dies im ersten Bande dieser Schrift gethan haben. Man gelangt so zur sogenannten **analytischen** Trigonometrie, welche keine Geometrie voraussetzt oder kennt, welche aber die Zahl $\pi = 3{,}14159\cdots$ einführt, und zwar als die kleinste ihrer Art, der die Eigenschaft zukommt, daß $sin\, \frac{1}{2}\pi = 1$ wird, d. h. daß die Reihe für *sin* x den Werth 1 annimmt, so oft man statt x die Zahl $\frac{1}{2}\pi$ setzt.

Daß dieſe Zahl π die Länge des Halbkreiſes iſt, in dem K
deſſen Radius $= 1$, weiß man natürlich nicht, da von Geo
trie, alſo auch vom Kreiſe gar nicht die Rede ſeyn ſoll.

Hat man aber den geſammten Kalkul entwickelt, wie d
auch hier geſchehen iſt, ſobald man die geometriſch
Kapitel überſchlägt und als nicht vorhanden anſi
ſo kann man zur Euklidiſchen Geometrie übergehen, aber
die einfachſten Sätze vom Dreieck, vom rechtwinklichen Dr
in's Beſondere, und vom Rechteck hinſtellen; dann rechtwink
Koordinaten-Axen vorführen und den Theil der Elemente
analytiſchen Geometrie, der bloß ſolche Axen vorausſetzt (
namentlich mit Uebergehung der ſchiefen Axen und der Po
Koordinaten), um in dieſen Elementen ſogleich die Qua
tur und die Rektifikation der Kurven vorzutragen, ſo wie ſol
in den vorliegenden §§. 27. und 28. N. 1.) geſchehen iſt,
Weglaſſung aller Polar-Koordinaten, und aller Beiſpiele.

Iſt dies geſchehen, ſo ſtellt man ſich die Aufgabe: E
Kreisbogen zu rektificiren, d. h. die Länge eines Kreisbogens
berechnen. — Iſt r der Radius des Kreiſes, ſo iſt, wenn
OX und OY Fig. 10.) als die rechtwinklichen Axen ſich d
worauf die Koordinaten-Werthe x und y des Kreiſes ſich
ziehen, die Gleichung des Kreiſes dieſe:

$$y^2 = r^2 - x^2 \quad \text{oder} \quad y = \sqrt{r^2 - x^2};$$

alſo iſt

$$\partial y_x = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad \text{und} \quad \sqrt{1 + \partial y_x^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}};$$

folglich iſt, wenn Bogen EM durch s bezeichnet wird, und w
x und y dem Punkte M angehören

$$s = \int_{r \div x} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx.$$

Nun iſt aber nach §. 6. N. 18.)

$$\int \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx = -r \cdot \frac{1}{cos} \frac{x}{r};$$

fi

), in so fern $\frac{1}{cos} 1 = 0$ ist,

$$\int_{r+x} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx = r \cdot \frac{1}{cos} \frac{x}{r};$$

Bogen CM oder $s = r \cdot \frac{1}{cos} \frac{x}{r}$,

überall unter dem Zeichen $\frac{1}{cos}$ der kleinste (nicht nega- Werth dieses vieldeutigen Ausdrucks verstanden wird.

Denkt man sich nun den besondern Fall, wo der Radius gedacht wird, so findet sich, wenn nun der Bogen EM σ bezeichnet wird

Bogen EM oder $\sigma = \frac{1}{cos} x$,

$$cos\, \sigma = x.$$

: letztere Gleichung zeigt uns also, daß der th der Kosinus-Reihe

$$1 - \frac{\sigma^2}{2!} + \frac{\sigma^4}{4!} - \frac{\sigma^6}{6!} + \cdots \text{ in inf.}$$

ual der Geraden OP oder x gleich ist, in dem Kreise Radius 1, so oft statt σ der Bogen EM dieses Kreises wird. Und da $x^2 + y^2 = 1$ ist, und die Sinus- und us-Reihen die Eigenschaft haben, daß

$$sin\, \sigma^2 + cos\, \sigma^2 = 1$$

folgt auch noch

$$sin\, \sigma = y\ ^*);$$

der Werth der Sinus-Reihe $\sigma - \frac{\sigma^3}{3!} + \frac{\sigma^5}{5!} - \cdots$

---

*) Eigentlich folgt $x = \pm sin\, \sigma$. Weil aber für σ sehr klein und $sin\, \sigma$ und y zugleich positiv werden, so folgt, daß nur das + Zeichts zu nehmen ist.

iſt genau die Länge der Senkrechten MP oder dem Kreiſe, deſſen Radius 1 iſt, wenn nur ſtatt σ der EM deſſelben Kreiſes ſubſtituirt wird.

Und da in den Gleichungen I.) und II.) x und y die Koordinaten ſelbſt, ſondern die Koordinaten-Werth ſtellen, ſo folgt noch, daß die Werthe der Sinus- und K Reihen eines jeden beliebig großen Bogens σ, allemal de dinaten-Werthen des Endpunktes M des Bogens σ alſo bald poſitiv, bald negativ, bald Null ſind, d. h. ge ſind, wie dies in den gewöhnlichen Vorträgen über Ele Trigonometrie als Definition der Sinus und Koſinus de kel feſtgeſetzt wird.

Iſt aber dies feſtgeſtellt, ſo darf man nur noch dur Definition feſtſetzen, daß man unter dem Sinus oder K irgend eines Winkels, derſelbe mag ſpitz oder ſtumpf haben ſeyn, allemal den Sinus oder Koſinus des ihm Kreiſe, deſſen Radius 1 iſt, zugehörigen Bogens v wolle, — und die Grundlage der ebenen Trigonom gelegt, und die Paar Sätze derſelben, nebſt allen ihren gen Anwendungen können nun ohne Weiteres aufgeſtellt ganz ſo wie wir im I. Bande dieſer Schrift und zwar §§. 62. 63.) es vorausgeſagt haben.

Würde aber dieſer Gang in irgend einem Lehrbuch quent durchgeführt, wie wir dieſes in dem „Verſuch ein kommen conſequenten Syſtems der Mathematik“ beabſ (von welchem 7 Theile bereits längſt erſchienen ſind, w die letztern 5 Theile noch nachgeliefert werden müſſen), ſ den wenigſtens alle die Schwierigkeiten oder Lücken, jeder Vortrag der Elementar-Trigonometrie hat und n dig haben muß, gänzlich beſeitigt erſcheinen. Doch hier davon. Durch das ſo eben Geſagte haben wir wenigſt Lücke ausgefüllt, welche wir im „Lehrbuch für den geſa

Da nun (nach I. Bd. §§. 170. 171.) ∂y_x die trigonometrische Tangente des Winkels ist, den die Tangente MT der Kurve mit der Abscissen-Axe macht, so folgt aus 8.), daß letzterer Winkel $= \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}v$ ist, daß also die Tangente MT auf der Sehne MD senkrecht steht, und namentlich in A und G, wo $v = 0$ oder $= 2\pi$ ist, auf der Abscissen-Axe AX senkrecht steht, dagegen in der Mitte zwischen A und G, d. h. in F also in E, wo $v = \pi$ ist, mit der Abscissen-Axe parallel läuft. — Die Sehne MD ist also die Normale für den Punkt M.

Sucht man den Krümmungshalbmesser ϱ der Cykloide für irgend eine Stelle, so nimmt man aus §. 170. oder §. 171. d. I. Bd.)

9) $$\varrho = \frac{(1+\partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x}, \text{ oder } = \frac{(\partial x_v^2 + \partial y_v^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x_v \cdot \partial^2 y_v - \partial y_v \cdot \partial^2 x_v}$$

und bedient sich lieber des letztern Ausdrucks. Zu dem Ende muß man die Gleichungen 6.) und 7.) noch einmal nach allem v differenziiren, um zu erhalten

10) $\partial^2 x_v = r \cdot \sin v$ und 11) $\partial^2 y_v = r \cdot \cos v$.

Diese Werthe aus 6.), 7.), 10.) und 11.) in die 9.) substituirt, geben nun

12) $$\varrho = r \cdot \frac{2^{\frac{3}{2}}(1-\cos v)^{\frac{3}{2}}}{1-\cos v} = 4r \cdot \sin \tfrac{1}{2}v = 2 \times \text{Sehne MD}.$$

Der Krümmungshalbmesser an M ist also jedesmal doppelt so groß als die Normale bis zur Abscissen-Axe.

Sucht man die Abgewickelte der Cykloide (nach I. Bd. §. 185.), so findet man, daß solche eine mit der gegebenen congruente Cykloide ist, welche nur gegen die Abscissen-Axe eine andere Lage hat.

Der Bogen AM $= s$ der Cykloide wird ausgedrückt durch

$$s = \int_{x \div 0} \sqrt{1+\partial y_x^2} \cdot dx = \int_{v \div 0} \sqrt{1+\partial y_x^2} \cdot \partial x_v \cdot dv$$

d. h.

$$s = \int_{v\dot{+}0} \sqrt{\partial x_v^2 + \partial y_v^2} \cdot dv = 2r \int_{v\dot{+}0} sin\, \tfrac{1}{2}v \cdot dv,$$

d. h.

13) $s = 4r(1 - cos\, \tfrac{1}{2}v)$.

Daher ist die Hälfte AME des ganzen Bogens AEG (wo dann $v = \pi$ und $cos\, \tfrac{1}{2}\pi = 0$ ist) dem 4fachen Radius, und der ganze Bogen AEG dem 4fachen Durchmesser des Erzeugungskreises gleich *).

Wollte man aber den Flächeninhalt AMNS der Cykloide berechnen, so müßte man den Flächeninhalt AMNR finden, und von dem Rechtecke ARNS subtrahiren. Ist nun $AR = NS = \beta$, so ist

$$\text{Inhalt AMNRA} = \int_{\beta\dot{+}0} x_y \cdot dy$$

$$= -\int_{\beta\dot{+}0} \sqrt{2ry - y^2} \cdot dy + r \cdot \int_{\beta\dot{+}0} \frac{1}{cos} \frac{r-y}{r} \cdot dy.$$

Das erstere dieser beiden Integrale findet sich nach §. 13.) und §. 6.); das andere, indem man theilweise integrirt, d. h. die Formel §. 4. N. 3.) anwendet, und $\psi = 1$ nimmt, so daß

---

*) Ist für den Punkt M′, $FP' = x'$, $P'M' = y'$, $EM' = s'$, $Em = u$ und der zugehörige Winkel $v = v'$, so ist (nach N. 13.)

$$s' = s - 4r = -4r \cdot cos\, \tfrac{1}{2}v'$$

und $u = 2r - y'$. Nun ist aber nach N. 2.)

$$cos\, v' = 1 - \frac{y'}{r},$$

also

$$cos\, \tfrac{1}{2}v'^2 = \frac{1 + cos\, v'}{2} = 1 - \frac{y'}{2r} = \frac{2r - y'}{2r} = \frac{u}{2r}.$$

Also ist auch

$$s'^2 = 16r^2 \cdot cos\, \tfrac{1}{2}v'^2 = 8ru$$

d. h. $s'^2 = 8r \cdot u$.

Diese Gleichung zwischen $Em = u$ und dem Bogen $EM' = s'$ hat die Form der Gleichung der Parabel und ist sehr bequem zur Berechnung eines jeden Bogenstückes.

$$\varphi = \frac{1}{\cos}\frac{r-y}{r}, \quad \text{also} \quad \partial\varphi_y = \frac{1}{\sqrt{2ry-y^2}}$$

wird. Man erhält dann

$$\int \frac{1}{\cos}\frac{r-y}{y}\cdot dy = y\cdot\frac{1}{\cos}\frac{r-y}{y} - \int \frac{y}{\sqrt{2ry-y^2}}\cdot dy,$$

und dieses Integral kann dann nach §. 12.) vollends gefunden werden.

$$s = \int_{v+0} \sqrt{\partial x_v^2 + \partial y_v^2} \cdot dv = 2r \int_{v+0} sin\, \tfrac{1}{2}v \cdot dv,$$

d. h.

13) $s = 4r(1 - cos\, \tfrac{1}{2}v)$.

Daher ist die Hälfte AME des ganzen Bogens AEG (weil dann $v = \pi$ und $cos\, \tfrac{1}{2}\pi = 0$ ist) dem 4fachen Radius, und der ganze Bogen AEG dem 4fachen Durchmesser des Erzeugungskreises gleich *).

Wollte man aber den Flächeninhalt AMNS der Cykloide berechnen; so müßte man den Flächeninhalt AMNR finden, und von dem Rechtecke ARNS subtrahiren. Ist nun $AR = NS = \beta$; so ist

$$\text{Inhalt } AMNRA = \int_{\beta+0} x_y \cdot dy$$

$$= -\int_{\beta+0} \sqrt{2ry - y^2} \cdot dy + r \cdot \int_{\beta+0} \frac{1}{cos} \frac{r-y}{r} \cdot dy.$$

Das erstere dieser beiden Integrale findet sich nach §. 13.) und §. 6.); das andere, indem man theilweise integrirt, d. h. die Formel §. 4. N. 3.) anwendet, und $\psi = 1$ nimmt, so daß

---

*) Ist für den Punkt M', $FP' = x'$, $P'M' = y'$, $EM' = s'$, $Em = u$ und der zugehörige Winkel $v = v'$, so ist (nach N. 13.)

$$s' = s - 4r = -4r \cdot cos\, \tfrac{1}{2}v'$$

und $u = 2r - y'$. Nun ist aber nach N. 2.)

$$cos\, v' = 1 - \frac{y'}{r},$$

also

$$cos\, \tfrac{1}{2}v'^2 = \frac{1 + cos\, v'}{2} = 1 - \frac{y'}{2r} = \frac{2r - y'}{2r} = \frac{u}{2r}.$$

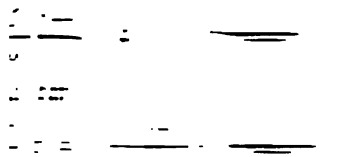
Also ist auch

$$s'^2 = 16r^2 \cdot cos\, \tfrac{1}{2}v'^2 = 8ru$$

d. h.

$$s'^2 = 8r \cdot u.$$

Diese Gleichung zwischen $Em = u$ und dem Bogen $EM' = s'$ hat die Form der Gleichung der Parabel und ist sehr bequem zur Berechnung eines jeden Bogenstückes.



us einer
n kann,
rper und
alls noch
en von x,
leichungen
Dieſer, ſenk-
brgrenzen;
ukrechte Or-
us, daß der
$z''_{x,y}$, welche
ei ihn in der
berflächen hat,
und von dieſer
und $y'' = y''_x$
letztere gleichſam
Dieſe letzt erwähn-
Linien der Fläche
man erhält dann
dieſer Fläche $z = 0$
ieſe Gleichung nach y
en gedachten x, zwei
en werden **Ebenen**, die
Funktionen y'_x und y''_x
und $y'' = px + q$ ge-
orſtellen. — Und ſind end-
ängig, ſo iſt der Körper in
mit XOZ parallele und von
benen begrenzt.

$x = x''$ an bis zu $x = x'$
xe OX in unendlich viele Theile
zeichnet, und durch die Endpunkte
te ebene Schnitte gelegt, ſo zer-
lich viele, unendlich dünne Schei-

Viertes Kapitel.

Kubatur der Körper und Quadratur ihrer Oberflächen.

§. 32.

Kubatur der Körper.

I. Iſt eine krumme Fläche, alſo der durch ſie begrenzte Körper mittelſt einer Gleichung zwiſchen den auf drei rechtwinkliche Axen OX, OY, OZ bezogenen Koordinaten-Werthen x, y und z gegeben, welche durch

$$z = z_{x,y}$$

vorgeſtellt ſeyn mag, ſo giebt dieſe Gleichung zu gleicher Zeit den auf OX ſenkrechten, zu einem beſtimmten Werth von x gehörigen Durchſchnitt, wenn man in ihr ſtatt x dieſen beſtimmten Werth geſetzt ſich denkt und die Gleichung als eine Gleichung zwiſchen z und y anſieht, wo y parallel mit OY und z parallel mit OZ in der Ebene des Schnittes genommen gedacht werden. — Nun iſt der Flächen-Inhalt dieſes Schnittes, von $y = y''$ bis $y = y'$ genommen und ſo weit er auf der einen, poſitiven Seite der Ebene XOY liegt (nach §. 20.)

$$= \int_{y''}^{y'} z \cdot dy = f,$$

dagegen

$$= \int_{y''}^{y'} (z' - z'') \cdot dy = F,$$

wenn z' und z'' die Ordinaten-Werthe der Grenzen dieſes Schnittes in der Richtung der z vorſtellen (nach §. 27. N. III. ⊙.). Dabei können z' und z'' die beiden Werthe von z ſeyn, welche aus der gegebenen Gleichung $z = z_{x,y}$ hervorgehen; es kann

aber auch nur z' ein ſolcher Werth ſeyn, während z'' aus einer andern gegebenen Gleichung $z'' = z''_{x,y}$ beſtimmt ſeyn kann, welche eine andere Fläche vorſtellt, von welcher der Körper und folglich auch der Schnitt in der Richtung der z ebenfalls noch begrenzt iſt. Sind y' und y'' noch gegebene Funktionen von x, etwa $y' = y'_x$ und $y'' = y''_x$, ſo ſtellen dieſe Gleichungen zwei Kurven in der Ebene XOY vor, welche jeden dieſer, ſenkrecht auf OX gelegten Schnitte in der Ebene XOY begrenzen; und da jeder Schnitt ſelbſt durch eine, auf XOY ſenkrechte Ordinate begrenzt wird, ſo ſetzt dieſe Annahme voraus, daß der Körper außer den Flächen $z' = z'_{x,y}$ und $z'' = z''_{x,y}$, welche ihn in der Richtung der z begrenzen, noch zwei ihn in der Richtung der y, begrenzende allgemeine Cylinderflächen hat, welche auf der Ebene XOY ſenkrecht ſtehen, und von dieſer Ebene in den durch die Gleichungen $y' = y'_x$ und $y'' = y''_x$ gegebenen Kurven geſchnitten werden, ſo daß letztere gleichſam die Grund-Flächen dieſer Cylinder bilden. Dieſe letzt erwähnten Kurven können auch die Durchſchnitts-Linien der Fläche $z = z_{x,y}$ mit der Ebene XOY ſeyn, und man erhält dann die Werthe von y' und y'', wenn man in dieſer Fläche $z = 0$ ſetzt, d. h. aus $0 = z_{x,y}$, wenn man dieſe Gleichung nach y auflöſt und dann für y zu jedem gegeben gedachten x, zwei Werthe findet. — Dieſe Cylinder-Flächen werden **Ebenen**, die auf XOY ſenkrecht ſtehen, ſo oft die Funktionen y'_x und y''_x durch die Gleichungen $y' = ax + b$ und $y'' = px + q$ gegeben ſind, welche **gerade** Linien vorſtellen. — Und ſind endlich y' und y'' von x ganz unabhängig, ſo iſt der Körper in der Richtung der y durch zwei, mit XOZ parallele und von XOZ um y' und y'' entfernte Ebenen begrenzt.

Denkt man ſich nun von $x = x''$ an bis zu $x = x'$ hin, die Länge $x' - x''$ der Axe OX in unendlich viele Theile getheilt und jeden durch dx bezeichnet, und durch die Endpunkte dieſer Theile auf OX ſenkrechte ebene Schnitte gelegt, ſo zerlegt ſich der Körper in unendlich viele, unendlich dünne Schei-

Anmerkung. Wir enthalten uns weiterer Beispiele, d hier nicht nöthig erscheinen; und wir enthalten uns auch d Formeln, durch welche die Oberfläche in Polar-Koordinat ausgedrückt wird. Wer recht ausführliche Untersuchungen hier über kennen lernen will, findet sie im 2ten Theile des „Leh buchs der Mechanik." Berlin 1837 bei Enslin. Kap. VI.

VII.

Höhere Analysis.

Dritte Abtheilung.

Fortsetzung der Integral-Rechnung nebst Anwendungen.

würde, wenn sie vollständig, d. h. wenn $r'' = 0$ wäre *). — Dann drückt aber das Integral

$$\int_{\varphi'\div\varphi''}\left[\tfrac{1}{3}(r'^3 - r''^3)\cdot \sin\varphi\cdot d\theta\right]\cdot d\varphi$$

den Inhalt der durch alle diese abgekürzten Pyramiden, die zu demselben θ gehören, gebildeten keilförmigen Scheibe aus, welche in einer Richtung durch die beiden Flächen $r'_{\varphi,\theta}$ und $r''_{\varphi,\theta}$, in der zweiten Richtung aber durch die Werthe $\varphi = \varphi'$ und $\varphi = \varphi''$ begrenzt wird. — Zuletzt drückt das Integral

$$(\odot)\cdots \qquad \int_{\theta'\div\theta''}\left(\int_{\varphi'\div\varphi''}\tfrac{1}{3}(r'^3 - r''^3)\sin\varphi\cdot d\varphi\right)\cdot d\theta$$

den Inhalt des ganzen Körpers aus, wie er außer den eben angeführten Grenzen, auch noch von den durch $\theta = \theta'$ und $\theta = \theta''$ gegebenen Ebenen begrenzt wird. Dabei können φ' und φ'' auch noch Funktionen von θ oder auch, was gewöhnlicher der Fall ist, nach θ constant seyn.

Beispiel 1. Denkt man sich den durch Umdrehung einer Geraden $y = px$ um die Axe OX gebildeten senkrechten Kegel, so ist sein körperlicher Inhalt (nach II.)

$$= \pi\cdot\int_{x'\div x''} y^2\cdot dx = \pi p^2\int_{x'\div x''} x^2\cdot dx = \tfrac{1}{3}\pi p^2(x'^3 - x''^3).$$

Ist $x'' = 0$, also x' die Höhe des Kegels und px' der Radius der Grundfläche, so ist der Inhalt der Grundfläche $= \pi p^2 x'^2$; also der Inhalt des ganzen Kegels bis zur Spitze $= \pi p^2 x'^2 \times \frac{1}{3}x' = \frac{1}{3}\pi p^2 x'^3$; und dies Resultat der Euklidischen Geometrie stimmt ganz mit dem oben erhaltenen Resultat, sobald in selbigem $x'' = 0$ gesetzt wird.

Beispiel 2. Denkt man sich den Cylinder, welcher durch Umdrehung der Geraden $y = p$ um die Axe OX erzeugt wird, so ist sein Inhalt

---

*) Die Grundflächen der beiden Pyramiden, deren Differenz diese abgekürzte Pyramide ist, sind zwar unendlich-kleine Kugel-Vierecke, die man aber als Rechtecke ansehen und berechnen kann. Die Dimensionen des einen, größern dieser Rechtecke sind nun $r'\cdot d\varphi$ und $r'\cdot\sin\varphi\cdot d\theta$; dessen Inhalt ist also $= r'^2\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi\cdot d\theta$. Der Inhalt des andern Rechtecks ist aus demselben Grunde $= r''^2\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi\cdot d\theta$. Die Höhen dieser Pyramiden bis zur Spitze O derselben sind r' und r''; daher ist der körperliche Inhalt beider $= \frac{1}{3}r'^3\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi\cdot d\theta$ und $= \frac{1}{3}r''^3\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi\cdot d\theta$. — Daher ist der Inhalt ihrer Differenz $= \frac{1}{3}(r'^3 - r''^3)\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi\cdot d\theta$; genau so wie oben.

$$= \pi \int_{x'+x''} y^2 \cdot dx = \pi p^2 \int_{x'+x''} 1 \cdot dx = \pi p^2 (x' - x'').$$

Daſſelbe giebt auch die Euklidiſche Geometrie, wenn man bedenkt, daß $x' - x''$ die Höhe dieſes Cylinders und πp^2 deſſen Grundfläche iſt.

Beiſpiel 3. Denkt man ſich die durch die Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

gegebene Ellipſe um die Axe OX gedreht, ſo entſteht ein Umdrehungs-Ellipſoid, deſſen körperlicher Inhalt (nach II.), wenn man $x'' = 0$ nimmt,

$$= \pi \int_{x'+0} \left(2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2\right) \cdot dx = \pi \left(\frac{b^2}{a}x'^2 - \frac{b^2}{3a^2}x'^3\right)$$

iſt. Setzt man noch $x' = 2a$, ſo ergiebt ſich hieraus der Inhalt des ganzen Ellipſoids

$$= \tfrac{4}{3} ab^2 \pi.$$

Und wird zuletzt noch $b = a$, ſo daß das Ellipſoid in eine Kugel übergeht, ſo erhält man deren Inhalt

$$= \tfrac{4}{3} a^3 \pi,$$

während a der Radius der Kugel iſt. — Dies letztere ſtimmt aber genau mit dem aus der Euklidiſchen Geometrie bekannten Reſultate überein.

Beiſpiel 4. Suchen wir den Inhalt deſſelben Umdrehungs-Ellipſoids, geben wir aber die Mittelpunkts-Gleichung der Umdrehungs-Ellipſe, nämlich

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

ſo liegt O im Mittel-Punkte. Will man nun den Inhalt des ganzen Ellipſoids haben, ſo muß $x' = a$ und $x'' = -a$ genommen werden. Man erhält dann

$$\int y^2 \cdot dx = \frac{b^2}{a^2} \int (a^2 - x^2)\, dx = \frac{b^2}{a^2}(a^2 x - \tfrac{1}{3}x^3);$$

folglich iſt der Inhalt des halben Ellipſoids $= \frac{2}{3} ab^2 \pi$; alſo der Inhalt des ganzen $= \frac{4}{3} ab^2 \pi$; genau ſo wie vorher.

Beiſpiel 5. Es ſoll der Inhalt des durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gegebenen Ellipſoids gefunden werden. — Solches iſt, ſo lange nicht zwei der drei Halbmeſſer a, b, c einander gleich werden, kein Umdrehungs-Ellipſoid, und man muß daher nun den Inhalt nach der Formel I. 2.) berechnen.

Es iſt aber hier

$$z = c \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

alſo

$$z' = +c \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad \text{und} \quad z'' = -c \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

$$\int(z'-z'')\cdot dy = 2c\cdot\int\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\cdot dy$$

§. 13. und §. 6.)

$$= cy\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} - bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\cdot\frac{1}{cos}\left(1-\frac{ay}{b\sqrt{a^2-x^2}}\right).$$

Will man nun den Inhalt F des ganzen Querschnitts haben, wie er die ellipsoidische Oberfläche begrenzt wird, so sind y' und y'' die beiden Werthe von y, welche aus der Gleichung des Ellipsoids für $z=0$ ergehen; d. h. es ist

$$y' = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad \text{und} \quad y'' = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Nun wird aber, — weil $\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ an diesen beiden Grenzen null gleich wird, und $\frac{1}{cos}$ an denselben beiden Grenzen in $\frac{1}{cos}0$ geht, welcher einmal $=-\frac{1}{2}\pi$ und das andere Mal $=+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden muß *), — der Inhalt F des Querschnittes

$$= bc\pi\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) **).$$

---

*) Der Querschnitt besteht aus zwei congruenten halben Ellipsen. Nimmt erst $y' = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ und $y''=0$, so bekommt man die eine e, und diese doppelt genommen, giebt den ganzen Querschnitt. Dies wiederum zu obigem Resultate.

**) Die Gleichung dieses Querschnitts zwischen y und z ist

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = \frac{a^2-x^2}{a^2}$$

$$\frac{a^2y^2}{b^2(a^2-x^2)}+\frac{a^2z^2}{c^2(a^2-x^2)} = 1.$$

eicht man dies mit der Gleichung der Ellipse

$$\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2} = 1,$$

Inhalt $= b'c'\pi$ ist, so hat man

$$b' = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$c' = \frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

ies giebt denselben Inhalt wie oben.

Deshalb ist nun der Inhalt des ganzen Ellipsoids, weil $x' = +a$ und $x'' = -a$ genommen werden muß,

$$= bc\pi \int_{x'+x''} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \cdot dx = \tfrac{4}{3} abc\pi.$$

Ist $a = b = c$, so geht das Ellipsoid in eine Kugel, und der Inhalt wiederum in $\tfrac{4}{3} a^3 \pi$ über.

§. 33.

Quadratur der krummen Oberflächen.

I. Ist eine krumme Oberfläche gegeben durch die auf rechtwinkliche Koordinaten-Axen OX, OY, OZ bezogene Gleichung

$$z = z_{x,y},$$

so kann man unendlich viele Ebenen legen senkrecht auf OX und unendlich viele senkrecht auf OY, so daß erstere um dx, letztere um dy von einander abstehen. Dadurch zerlegt sich die Oberfläche in lauter unendlich-kleine, mithin als eben anzusehende vierseitige Figuren, deren Projektion auf XOY ein Rechteck ist, welches den Inhalt $dx \cdot dy$ hat.

Betrachtet man nun eines dieser Vierecke E, an der durch x, y gegebenen Stelle, so macht solches mit der Ebene XOY einen Winkel, den auch die Normale an dieser Stelle mit der OZ macht und dessen Kosinus daher (nach I. Bd. §. 176.)

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2}}$$

ist. Ferner hat man die Projektion $dx \cdot dy$, so oft man E mit diesem Kosinus multiplicirt. Folglich ist

$$E = \sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2} \cdot dx \cdot dy.$$

Dann ist aber (nach §. 20.)

$$(\odot) \cdots \qquad \int_{y'+y''} (dx \cdot \sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2}) \cdot dy$$

oder

$$dx \cdot \int_{y'+y''} \sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2} \cdot dy$$

der Inhalt des Streifens, welcher die Oberfläche der Scheibe bildet, die durch die beiden zu $x = x$ und $x = x + dx$ gehö

hörigen, auf OX senkrechten Querschnitte gebildet wird; denn eser Inhalt ist die Summe aller der unendlich vielen Vierecke , welche zu demselben x gehören.

Integrirt man nun noch einmal und dasmal nach x, daß man

$$(\mathfrak{C})\cdots \quad \int_{x'\div x''}\left(\int_{y'\div y''}\sqrt{1+\partial z_x^{\,2}+\partial z_y^{\,2}}\cdot dy\right)\cdot dx$$

hält, so hat man (nach §. 20.) die Summe aller dieser Strei- n von $x = x''$ an bis zu $x = x'$ hin, d. h. den Inhalt r ganzen Oberfläche des Körpers, zwischen den bestimmten renzen.

II. Ist die gegebene Fläche eine Umdrehungs-Fläche, welche rch Umdrehung der durch

$$y = y_x$$

gebenen Kurve, um OX herum, entsteht, so findet sich der kere Streifen auch ohne Integration, weil er als ein von der ndrehung der Tangente an die Umdrehungs-Kurve gebildeter gekürzter Kegelmantel berechnet werden kann, dessen Seite $\sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{1+\partial y_x^{\,2}}\cdot dx$ ist, so daß der Inhalt $2\pi y\cdot\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}}\cdot dx$ wird, weil die Unendlich-Kleinen höhe- Ordnung weggelassen werden müssen. Darum ist nun der halt der ganzen Umdrehungs-Oberfläche zwischen den beiden $x = x'$ und $x = x''$ gehörigen, auf OX senkrechten Ebenen

$$(\mathfrak{o})\cdots \quad = 2\pi\int_{x'\div x''} y\cdot\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}}\cdot dx.$$

Beispiel. Der Mantel des Kegels, der durch Umdrehung der Geraden

$$y = px$$

steht, ist also, weil $\partial y_x = p$ wird,

$$= 2\pi\int_{x'\div x''} p\sqrt{1+p^2}\cdot x\cdot dx$$

$$= \pi x'^2 p\sqrt{1+p^2} - \pi x''^2 p\sqrt{1+p^2}.$$

$x'' = 0$ wird also der ganze Kegel-Mantel von dessen Spitze O an zur Grundfläche, deren Radius px' ist (so daß x' die Höhe und $\sqrt{p^2x'^2+p^2x'^2}$ d. h. $x'\cdot\sqrt{1+p^2}$ die Seite dieses Kegels ist), $\pi x'^2 p\sqrt{1+p^2}$, und dasselbe Resultat giebt auch die Euklidische Geo- rie.

Anmerkung. Wir enthalten uns weiterer Beispiele, die hier nicht nöthig erscheinen; und wir enthalten uns auch der Formeln, durch welche die Oberfläche in Polar-Koordinaten ausgedrückt wird. Wer recht ausführliche Untersuchungen hierüber kennen lernen will, findet sie im 2ten Theile des „Lehrbuchs der Mechanik." Berlin 1837 bei Enslin. Kap. VI.

VII.

Höhere Analysis.

Dritte Abtheilung.

Fortsetzung der Integral-Rechnung nebst Anwendungen.

Aus der Gleichung 1.) findet man nun sogleich

3) $$f = \int M \cdot dx$$
$$= log\, x - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} + \tfrac{1}{2} log \frac{-y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} + C_y;$$

und substituirt man diesen Werth statt f in die Gleichung 2.), so giebt solche

4) $$\partial C_y = \frac{1}{2y}, \quad \text{also} \quad C_y = \tfrac{1}{2} log\, y + const.$$

Mithin ist das gesuchte Integral f das nachstehende:

5) $$log\, x - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} + \tfrac{1}{2} log \frac{-y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} + \tfrac{1}{2} log\, y,$$

oder, wenn man alle drei Logarithmen vereinigt,

$$f = -y \cdot \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} + \tfrac{1}{2} log\, xy(-y+\sqrt{x^2+y^2}) + const.$$

§. 37.

Eine totale Differential-Gleichung $\varphi_{x,y,\partial y_x \text{ etc. etc.}} = 0$ heißt **integrirt**, sobald man eine Gleichung $f = 0$ mit einer neuen unbestimmten Constante c gefunden hat, so, daß wenn man aus $f = 0$ und $\partial f_{(x)} = 0$, diese Constante c eliminirt, die entstehende Differential-Gleichung mit der gegebenen $\varphi = 0$ zusammenfällt. — Die Gleichung $f = 0$ mit der willkührlichen Constante c, heißt das **allgemeine** Integral von $\varphi = 0$.

1) So findet sich z. B. von der Gleichung
$$3xy^2 - y^2 + (xy - 2x^3) \cdot \partial y_x = 0,$$
das allgemeine Integral
$$x^3 - xy + cy^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x^3 - xy}{y^2} + c = 0.$$

2) So findet sich von der Gleichung
$$x + y \cdot \partial y_x + z \cdot \partial z_x = 0,$$
das allgemeine Integral
$$x^2 + y^2 + z^2 = c.$$

3) So ist aber auch von der Gleichung
$$3x^2 - y - x \cdot \partial y_x + \frac{xy - x^3}{\partial y_x} \cdot \partial^2 y_x = 0,$$
das allgemeine Integral
$$x^3 - xy - c \cdot \partial y_x = 0.$$

etc. etc. nach jedem dieser letztern Veränderlichen, so hat man Partial-Differential-Funktionen und Partial-Differential-Gleichungen.

Zunächst soll (in diesem Kapitel) nur von den totalen Differential-Funktionen und den totalen Differential-Gleichungen die Rede seyn. Jede Funktion, welche gar keine angezeigten Differential-Koefficienten enthält, also was wir bisher schlechtweg eine Funktion nannten, kann von nun an im Gegensatz der Differential-Funktionen eine Ur-Funktion genannt werden.

§. 35.

Eine totale Differential-Funktion, wie etwa

$$\frac{1}{y}\cdot\partial^2 y_x - \frac{1}{y^2}\cdot\partial y_x^2 + x\cdot\partial y_x + ay + b^x \quad \text{oder} \quad \varphi$$

heißt integrirt, sobald man eine (Differential- oder Ur-) Funktion f der nächst niedrigern Ordnung gefunden hat, welche, wenn man sie nach allem x differenziirt, genau die gegebene Funktion φ wieder hervorbringt, ohne daß für y eine bestimmte Funktion von x gesetzt wird, also während y eine völlig unbestimmte Funktion von x vorstellt.

Es muß also für unser Beispiel, wenn ∂y_x durch y' bezeichnet wird, das Integral f so seyn, daß

$$1)\quad \partial(f_{x,y,y'})_{(x)} = \frac{1}{y}\cdot\partial^2 y_x - \frac{1}{y^2}\cdot\partial y_x^2 + x\cdot\partial y_x + ay + b^x.$$

d. h., weil (nach I. Bd. §. 154bis.)

$$\partial f_{(x)} = \partial f_x + \partial f_y\cdot\partial y_x + \partial f_{y'}\cdot\partial y'_x \quad \text{und} \quad \partial y'_x = \partial^2 y_x$$

ist, daß

$$2)\quad \partial f_x + \partial f_y\cdot\partial y_x + \partial f_{y'}\cdot\partial^2 y_x = \frac{1}{y}\cdot\partial^2 y_x - \frac{1}{y^2}\cdot\partial y_x^2 + x\cdot\partial y_x + ay + b^x$$

werde, für jede Funktion von x, welche unter y_x gedacht werden mag.

Soll aber in der Gleichung 2.) alles links genau so stehen, wie rechts, während y, also auch ∂y_x, $\partial^2 y_x$ völlig unbestimmt und willkührlich gedacht werden, so müssen die Koefficienten von $\partial^2 y_x$ links und rechts einander gleich seyn; d. h. es muß seyn

$$3)\quad \partial f_{y'} = \frac{1}{y},$$

Daher auch (nach §. 1.)

4) $$f = \int \frac{1}{y} \cdot dy'$$

oder (nach §. 3. I.) $$= \frac{y'}{y} + C = \frac{\partial y_x}{y} + C,$$

wo C nach y' constant, d. h. ohne y' seyn muß, aber noch die, von y' unabhängig gedachten x und y enthalten kann *).

Um nun dieses $C_{x,y}$ noch zu bestimmen, hat man zu beachten, daß der Gleichung 1.) oder 2.) genügt werden muß, daß also noch (wenn die mit $\partial^2 y_x$ multiplicirte 3.) von der 2.) subtrahirt wird)

5) $$\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x = -\frac{1}{y^2} \cdot \partial y_x^2 + x \cdot \partial y_x + ay + b^x$$

werden muß. Nun giebt aber die Gleichung 4.)

6) $$\partial f_x = \partial C_x \quad \text{und} \quad \partial f_y = -\frac{\partial y_x}{y^2} + \partial C_y.$$

Substituirt man daher diese Werthe in die Gleichung 5.), so erhält man

7) $$\partial C_x + \partial C_y \cdot \partial y_x = x \cdot \partial y_x + ay + b^x,$$

aus dieser Gleichung muß nun C oder $C_{x,y}$ gefunden werden.

Wendet man aber auf diese Gleichung zur Bestimmung von C, dieselben Schlüsse an, die man auf die Gleichung 2.) zur Bestimmung von f angewandt hat, so hat man wieder

8) $$\partial C_y = x, \quad \text{also} \quad C = \int x \cdot dy = xy + C',$$

wo C' nach y constant seyn muß, also nur noch x enthalten darf. Substituirt man diesen Werth statt C in die 7.) und bemerkt man, daß $\partial C_x = y + \partial C'_x$ wird, so ergiebt sich

9) $$\partial C'_x = (a-1)y + b^x,$$

und diese Gleichung dient nun noch zur Bestimmung von C'. — Weil aber C' kein y enthalten darf, so kann auch $\partial C'_x$ kein y enthalten; folglich enthält die Gleichung 9.) einen Widerspruch, so lange nicht $a-1=0$, d. h. $a=1$ ist. Dieser Widerspruch zeigt an, daß dasmal die gegebene Funktion kein Integral in dem Sinne hat, in welchem es hier gesucht wurde, nämlich während y jede unbestimmte Funktion von x vorstellen soll **).

---

*) Die Formel

$$\partial f_{(x)} = \partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x + \partial f_{y'} \cdot \partial y'_x$$

ist im I. Bd. §. 154bis.) erwiesen, und aus jenem Beweise geht hervor, daß in den Ausdrücken ∂f_x, ∂f_y, $\partial f_{y'}$ die Veränderlichen x, y, y' als von einander ganz unabhängig angesehen werden sollen, und daß in diesem Sinne die Ableitungen zu nehmen sind, damit die Formel selbst richtig sey.

**) Setzt man nämlich statt y irgend eine bestimmte und bekannte Funktion von x, und statt ∂y_x, $\partial^2 y_x$ ihre entsprechenden Werthe, so wird φ

Sollte aber $a=1$ vorausgesetzt werden, so würde die Gleichung 9.) jetzt bloß

$$\partial C'_x = b^x$$

und sogleich $$C = \frac{b^x}{log\, b} + c$$

geben, während c nach y', nach y und auch noch nach x constant, übrigens beliebig gedacht werden muß.

Aus diesen Betrachtungen geht folgendes hervor:

1) Die Aufgabe: „eine gegebene Differential-Funktion zu integriren" ist nicht immer möglich, und in dem vorliegenden Beispiele nur möglich, wenn $a=1$ seyn sollte.

2) Ist aber die Aufgabe selbst möglich, so erfordert ihre Lösung, wie dieses Beispiel zeigt, bloß wiederholte Integrationen entwickelt gegebener Funktionen, z. B. nach y', nach y, und nach x, letztere als eben so viele von einander ganz unabhängige Veränderliche angesehen, so daß, wenn die Integration nach einem derselben (mittelst der Lehren des ersten Kapitels) erfolgt, die übrigen als eben so viele Constanten angesehen werden müssen.

Namentlich hat sich hiernach gefunden das Integral von

$$\frac{y\cdot\partial^2 y_x - \partial y_x{}^2 + xy^2\cdot\partial y_x + y^3 + b^x}{y^2} \quad \text{nach x,}$$

$$= \frac{\partial y_x}{y} + xy + \frac{b^x}{log\, b} + c;$$

d. h. diese letztere Funktion giebt, wenn man sie nach allem x differenziirt, zum Differential-Koefficienten genau die gegebene Differential-Funktion wieder, während unter y eine ganz unbestimmte Funktion von x gedacht wird.

Ist aber die Aufgabe möglich, so sagt man, „die gegebene Differential-Funktion sey integrabel"; im entgegengesetzten Falle wird sie „nicht integrabel" genannt.

---

eine bloße explicite Funktion von x, die allemal ein Integral hat, wenn solches auch nicht immer in endlicher Form existiren sollte.

§. 36.

Ist die zu integrirende Differential-Funktion selber noch zwar der Form nach bestimmt, aber im Uebrigen unbestimmt, so kann man zuletzt (wie in dem vorigen Beispiel die besondere Gleichung $a = 1$) **allgemeine** Gleichungen bekommen, welche erfüllt seyn müssen, wenn die Funktion integrabel seyn soll. Diese Gleichungen führen dann den Namen: „**Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität**". — Sind diese Gleichungen erfüllt, so ist das Integral in dem Sinne des §. 35.) möglich, d. h. die Funktion ist integrabel; — außerdem nicht.

Versucht man es und integrirt man die Differential-Funktion

I. $$M_{x,y} + N_{x,y} \cdot \partial y_x$$

auf dem im §. 35.) vorgezeichneten Wege, so erhält man als Bedingungs-Gleichung der Integrabilität, die Gleichung

(♂) ··· $$\partial M_y = \partial N_x.$$

Ist nämlich $f_{x,y}$ das gesuchte Integral, so hat man

$$\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x = M + N \cdot \partial y_x,$$

also auch

1) $\partial f_x = M$ und 2) $\partial f_y = N$.

Aus $\partial f_y = N$ folgt nun $f = \int N \cdot dy + C_x$; oder, wenn

3) $$\int N \cdot dy = v$$

gesetzt wird, so daß v irgend ein besonderes Integral von N nach y vorstellt,

4) $$f = v_{x,y} + C_x.$$

Substituirt man nun dies in die Gleichung 1.), so erhält man

$$\partial v_x + \partial C_x = M, \text{ oder } \partial C_x = M - \partial v_x,$$

woraus

5) $$C_x = \int (M - \partial v_x) \cdot dx + c$$

sich ergiebt, wenn nur in $M - \partial v_x$ kein y mehr vorkommt, weil sonst die Gleichung 5.) einen Widerspruch enthalten und dann anzeigen würde, daß $M + N \cdot \partial y_x$ dasmal **nicht integrabel**

sey. Es muß daher $M - \partial v_x$ nach y differenzirt, Null geben; d. h. es muß

$$\partial M_y - \partial^{1,1} v_{x,y} \quad \text{oder} \quad \partial M_y - \partial(\partial v_y)_x$$

der Null gleich seyn, und dies ist die Bedingungs-Gleichung δ') in so fern (nach 3.) $\partial v_y = N$ ist.

Ist also die Gleichung δ') erfüllt, so geben die 4.) und die 5.) das Integral f vollständig, und solches nimmt (wegen 5.) noch eine Constante c in sich auf.

So ist z. B. $y + x \cdot \partial y_x$ integrabel, weil hier $M = y$, $N = x$; also $\partial M_y = 1 = \partial N_x$ ist. Und das Integral von $y + x \cdot \partial y_x$ findet sich $= xy + c$. — Dagegen ist $y - x \cdot \partial y_x$ nicht integrabel. — Aber der Quotient $\frac{y - x \cdot \partial y_x}{y^2}$ ist wieder integrabel, weil jetzt $M = \frac{1}{y}$, $N = -\frac{x}{y^2}$, also wiederum $\partial M_y = -\frac{1}{y^2} = \partial N_x$ ist. Das Integral selbst ist $= \frac{x}{y} + c$*).

Will man aber integriren die Differenzial-Funktion

II.) $$M_{x,y,z} + N_{x,y,z} \cdot \partial y_x + P_{x,y,z} \cdot \partial z_x,$$

so finden sich, wenn man genau nach §. 20. verfährt, die drei Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität, nämlich

1) $\partial M_z = \partial P_x$; 2) $\partial M_y = \partial N_x$; 3) $\partial N_z = \partial P_y$.

Ist nämlich $f_{x,y,z}$ das gesuchte Integral von $M + N \cdot \partial y_x + P \cdot \partial z_x$, so hat man

1') $\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x + \partial f_z \cdot \partial z_x = M + N \cdot \partial y_x + P \cdot \partial z_x$;

folglich muß

2') $\partial f_z = P$; $\partial f_y = N$ und $\partial f_x = M$

---

*) Daß übrigens $\partial M_y = \partial N_x$ seyn müsse, so oft ein Integral f existirt, folgt unmittelbar aus den Gleichungen 1.) und 2.), weil die eine

$$\partial^{1,1} f_{x,y} = \partial M_y,$$

die andere dagegen dasselbe

$$\partial^{1,1} f_{x,y} = \partial N_x$$

liefert. — Diese Betrachtung überzeugt aber nicht, daß umgekehrt, wenn $\partial M_y = \partial N_x$ erfüllt ist, dann allemal wirklich ein Integral f, in dem Sinne, wie es gesucht wird, existiren müsse.

seyn. Die erstere dieser drei Gleichungen giebt

3′) $$f = \int P \cdot dz + C_{x,y};$$

und substituirt man diesen Werth in die beiden andern Gleichungen, so erhält man

4′) $$\partial C_y = N - \partial(\int P \cdot dz)_y;$$

5′) $$\partial C_x = M - \partial(\int P \cdot dz)_x.$$

Da nun diese beiden Ausdrücke zur Rechten kein z enthalten dürfen, so muß, wenn man sie nach z differenziirt, jeder der beiden Differenzial-Koefficienten der Null gleich werden. Dies giebt aber

$$\partial N_z - \partial P_y = 0 \quad \text{und} \quad \partial M_z - \partial P_x = 0;$$

und dies sind die obigen beiden Bedingungs-Gleichungen 3.) und 1.). — Sind sie erfüllt, so findet man aus 4′.) sogleich

6′) $$C = \int [N - \partial(\int P \cdot dz)_y] \cdot dy + C',$$

wo C′ kein y mehr enthalten darf, also höchstens noch x enthält. Substituirt man nun diesen Werth von C noch in die Gleichung 5′.), so ergiebt sich zuletzt

7′) $$\partial C'_x = M - \partial(\int P \cdot dz)_x - \partial(\int [N - \partial(\int P \cdot dz)_y] \cdot dy)_x,$$

wo alle angezeigten Integrale beliebige besondere Integrale vorstellen, dasselbe Zeichen aber allemal ein und dasselbe.

Dieser Ausdruck zur Rechten darf nun kein y mehr haben; also muß, wenn er nach y differenziirt wird, sein Differential der Null gleich werden; und dies giebt noch die Bedingungs-Gleichung 2.). — Ist sie erfüllt, so liefert die 7′.) sogleich noch C'_x dazu, so daß man nun f vollständig gefunden hat.

So ist z. B.

$$\frac{y}{z} + \frac{x}{z} \cdot \partial y_x - \frac{xy}{z^2} \cdot \partial z_x$$

integrabel und giebt, integrirt, $\frac{xy}{z} + c$; eben weil hier $M = \frac{y}{z}$, $N = \frac{x}{z}$, $P = -\frac{xy}{z^2}$, also $\partial M_z = -\frac{y}{z^2} = \partial P_x$, $\partial N_z = -\frac{x}{z^2} = \partial P_y$ und noch $\partial M_y = \frac{1}{z} = \partial N_x$ ist. — Wäre aber eine dieser drei Bedin-

gungs-Gleichungen nicht erfüllt, so wäre auch die Funktion nicht integrabel. — So ist z. B.

$$\frac{y}{z}+\frac{x}{z}\cdot\partial y_x+\frac{xy}{z^2}\cdot\partial z_x$$

nicht integrabel.

Beispiel 1. Es sey $\frac{y-x\cdot\partial y_x}{x^2+y^2}$ zu integriren. — Vergleicht man diesen Fall mit $M+N\cdot\partial y_x$, so hat man $M=\frac{y}{x^2+y^2}$, $N=-\frac{x}{x^2+y^2}$; also $\partial M_y=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\partial N_x$; folglich ist diese Funktion integrabel. — Bezeichnet man nun ihr Integral durch $f_{x,y}$, so hat man

1) $\partial f_x=\frac{y}{x^2+y^2}$ und 2) $\partial f_y=-\frac{x}{x^2+y^2}$.

Aus der zweiten Gleichung folgt dann

3) $$f=-\int\frac{x}{x^2+y^2}\cdot dy=-\frac{1}{tg}\frac{y}{x}+C_x.$$

Substituirt man aber diesen Werth statt f in die 1.), so erhält man

4) $\partial C_x=0$, also $C=const.=c$,

so daß man

5) $$f=c-\frac{1}{tg}\frac{y}{x}$$

als das gesuchte Integral gefunden hat, wofür man auch, da $\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{tg}\frac{y}{x}=\frac{1}{cotg}\frac{y}{x}=\frac{1}{tg}\frac{x}{y}$ ist,

6) $$f=\frac{1}{tg}\frac{x}{y}+const.$$

schreiben kann.

Beispiel 2. Soll die Funktion

$$\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^3}-\frac{y\cdot\partial y_x}{x^2}+\frac{(y-x\cdot\partial y_x)\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}+\frac{\partial y_x}{2y}$$

integrirt werden, so vergleiche man solche mit $M+N\cdot\partial y_x$, und man findet

$$M=\frac{x^2+y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}\quad\text{und}\quad N=\frac{-y-\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}+\frac{1}{2y};$$

auch zeigt sich wirklich $\partial M_y=\partial N_x$; folglich ist diese Differential-Funktion integrabel. — Integrirt man aber, und ist $f_{x,y}$ das gesuchte Integral, so hat man

1) $$\partial f_x=M=\frac{x^2+y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}=\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^3}+y\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^3};$$

2) $$\partial f_y=N=\frac{-y-\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}+\frac{1}{2y}.$$

Aus der Gleichung 1.) findet man nun sogleich

3) $f = \int M \cdot dx$

$$= \log x - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} + \tfrac{1}{2}\log\frac{-y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} + C_y;$$

und substituirt man diesen Werth statt f in die Gleichung 2.), so giebt solche

4) $\partial C_y = \frac{1}{2y}$, also $C_y = \tfrac{1}{2}\log y + const.$

Mithin ist das gesuchte Integral f das nachstehende:

5) $\log x - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} + \tfrac{1}{2}\log\frac{-y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} + \tfrac{1}{2}\log y,$

oder, wenn man alle drei Logarithmen vereinigt,

$$f = -y\cdot\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} + \tfrac{1}{2}\log xy(-y+\sqrt{x^2+y^2}) + const.$$

§. 37.

Eine totale Differential-Gleichung $\varphi_{x,y,\partial y_x \text{ etc. etc.}} = 0$ heißt **integrirt**, sobald man eine Gleichung $f = 0$ mit einer neuen unbestimmten Constante c gefunden hat, so, daß wenn man aus $f = 0$ und $\partial f_{(x)} = 0$, diese Constante c eliminirt, die entstehende Differential-Gleichung mit der gegebenen $\varphi = 0$ zusammenfällt. — Die Gleichung $f = 0$ mit der willkührlichen Constante c, heißt das **allgemeine** Integral von $\varphi = 0$.

1) So findet sich z. B. von der Gleichung

$$3xy^2 - y^2 + (xy - 2x^3)\cdot\partial y_x = 0,$$

das allgemeine Integral

$$x^3 - xy + cy^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x^3 - xy}{y^2} + c = 0.$$

2) So findet sich von der Gleichung

$$x + y\cdot\partial y_x + z\cdot\partial z_x = 0,$$

das allgemeine Integral

$$x^2 + y^2 + z^2 = c.$$

3) So ist aber auch von der Gleichung

$$3x^2 - y - x\cdot\partial y_x + \frac{xy - x^3}{\partial y_x}\cdot\partial^2 y_x = 0,$$

das allgemeine Integral

$$x^3 - xy - c\cdot\partial y_x = 0.$$

Hat nun eine Gleichung die Form

1) $X_x Y_y + X'_x Y'_y \cdot \partial y_x = 0,$

so darf man nur durch X'_x und Y_y dividiren, um sogleich die Veränderlichen getrennt zu haben. Man erhält dann

2) $$\frac{X}{X'} + \frac{Y'}{Y} \cdot \partial y_x = 0$$

und davon ist dann das Integral

3) $$\int \frac{X}{X'} \cdot dx + \int \frac{Y'}{Y} \cdot dy = c.$$

Offenbar aber hat man hier für die Gleichung 1'.) nur die Methode des integrirenden Faktors, der hier $\frac{1}{X'Y}$ ist, angewandt, so daß diese „Methode der Trennung der Veränderlichen" nicht eigentlich als eine neue Methode aufgezählt werden kann.

Ist z. B. $y + x \cdot \partial y_x = 0$ zu integriren, so dividire man diese Gleichung durch xy und man erhält

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \cdot \partial y_x = 0.$$

In dieser Gleichung sind nun die Veränderlichen getrennt, und ihr Integral ist daher

$$\int \frac{1}{x} \cdot dx + \int \frac{1}{y} \cdot dy = c, \quad \text{d. h.} \quad \log x + \log y = c$$

oder $\log(xy) = c$, d. h. $xy = e^c$ oder $xy = C$,

wo C eine willkührliche Constante ist.

Man hätte sogleich in der Gleichung $\log(xy) = c$ statt c schreiben können $\log c$, weil $\log c$ noch eben so gut jede willkührliche Constante ausdrückt wie c selbst. Dann schrieb man ohne Weiteres statt

$$\log(xy) = \log c, \quad \text{sogleich} \quad xy = c.$$

IV. Integration durch Einführung neuer Veränderlichen.

In allen den Fällen, wo die vorher beschriebenen Methoden nicht mit Erfolg angewandt werden können, führt man einen oder zwei neue Veränderliche ein, in der Hoffnung, daß die neue Differential-Gleichung dann nach einer der vorbeschriebenen Methoden behandelt werden könne.

A. Sind z. B. M und N homogene Funktionen von x und y von einerlei z. B. von der n^{ten} Dimenſion *), ſo ſetze man $y = xz$, alſo $\partial y_x = x \cdot \partial z_x + z$; die Funktionen M und N nehmen dadurch bezüglich die Form $x^n \cdot P_z$ und $x^n \cdot Q_z$ an, und die Gleichung $M + N \cdot \partial y_x = 0$ geht dadurch über in

$$P_z + Q_z(x \cdot \partial z_x + z) = 0$$

d. h. in $$P_z + zQ_z + xQ_z \cdot \partial z_x = 0.$$

In dieſer können die Veränderlichen ſogleich getrennt werden, und ſie wird dann

$$\frac{1}{x} + \frac{Q_z}{P_z + zQ_z} \cdot \partial z_x = 0$$

und giebt, integrirt,

$$log\, x + \int \frac{Q_z}{P_z + zQ_z} \cdot dz = c.$$

Iſt z. B. zu integriren die Gleichung

$$x + y \cdot \partial y_x = ny,$$

ſo wird ſie, wenn man $y = xz$ ſetzt,

$$1 + z(x \cdot \partial z_x + z) = nz$$

oder

$$\frac{1}{x} + \frac{z}{1 - nz + z^2} \cdot \partial z_x = 0;$$

alſo giebt ſie, integrirt

$$log\, x + \int \frac{z}{1 - nz + z^2} \cdot dz = c.$$

Will man hier noch $\int \frac{z}{1 - nz + z^2} \cdot dz$ finden, ſo muß man den Bruch in zwei Partial-Brüche zerlegen, oder man muß direkt nach §. 11.) verfahren, um den doppelten Partial-Bruch ohne Weiteres zu integriren. Auf dieſem letzteren Wege erhält man zunächſt

$$\int \frac{z}{1 - nz + z^2} \cdot dz = \tfrac{1}{2} log\,(1 - nz + z^2) + \tfrac{n}{2} \int \frac{1}{1 - nz + z^2} \cdot dz,$$

---

*) Iſt z. B. $M = x^3 - 4x^2y$ und $N = xy^2 - 3x^2y + 4y^3$, ſo ſind M und N homogene Funktionen von der dritten Dimenſion. — Hat man aber $M = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x^3 + y^2}$ und $N = \frac{xy}{x^4 - y^4}$, ſo ſind M und N homogene Funktionen von der $(-2)^{ten}$ Dimenſion.

§. 39.

Daß aber jede Differential-Gleichung der n^{ten} Ordnung zwischen zwei Veränderlichen x und y, ein Ur-Integral mit n willkührlichen Constanten habe, wenn auch vielleicht nicht immer in endlicher Form, — das lehrt wiederum der Maclaurin'sche Lehrsatz.

Ist z. B. eine Differential-Gleichung der 2ten Ordnung gegeben, so kann man aus ihr $\partial^2 y_x$ finden in x, y und ∂y_x ausgedrückt. — Differenziirt man diese Gleichung noch einmal, und substituirt man sogleich statt $\partial^2 y_x$ seinen so eben gefundenen Werth, so erhält man $\partial^3 y_x$ in x, y und ∂y_x ausgedrückt. Differenziirt man jetzt noch einmal, und substituirt man statt $\partial^2 y_x$ (und nöthigen Falles auch statt $\partial^3 y_x$) ihren so eben gefundenen Werth, so erhält man $\partial^4 y_x$ in x, y und ∂y_x ausgedrückt. — Fährt man so fort, so erhält man alle höheren Ableitungen von y nach x, ohne Ende fort, in x, y und ∂y_x ausgedrückt.

Nimmt man nun den Maclaurin'schen Lehrsatz

$$(\odot)\cdots \qquad y = y_0 + \partial y_0 \cdot x + \partial^2 y_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + \partial^3 y_0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \partial^4 y_0 \cdot \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

und substituirt man hier herein statt $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$ etc. etc. ihre so eben gefundenen Werthe, in x, y und ∂y_x ausgedrückt, während statt x die Null gesetzt werden muß, so hat man y in eine nach Potenzen von x geordnete Reihe ausgedrückt gefunden, in deren einzelnen Koefficienten die Constanten y_0 und ∂y_0 vorkommen, wofür man zwei ganz willkührliche Constanten a und b schreiben kann, weil dann diese Maclaurin'sche Reihe selbst für $x = 0$, $y = a$, und wenn man die Reihe differenziirt und dann $x = 0$ setzt, auch noch $\partial y_x = b$ liefert.

Man begreift, wie dieselbe Reihe ⊙.) y in x ausgedrückt mit

Die gegebene Differential-Gleichung wird nun

6) $(a+m\alpha+n\beta)+mt+nu$
$+[(b+p\alpha+q\beta)+pt+qu]\cdot\partial u_t=0.$

oder

7) $(mt+nu)+(pt+qu)\partial u_t=0,$

wenn man α und β so nimmt, daß

8) $a+m\alpha+n\beta=0$ und $b+p\alpha+q\beta=0$

wird. — Um nun diese homogene Gleichung 7.) (nach A.) weiter zu behandeln, setzt man

9) $u=vt,$ also $\partial u_t=v+t\cdot\partial v_t;$

und man erhält nun die Gleichung

$m+nv+(p+qv)(v+t\cdot\partial v_t)=0,$ oder

10) $\frac{1}{t}+\frac{p+qv}{m+(n+p)v+qv^2}\cdot\partial v_t=0,$

in welchen die Veränderlichen getrennt sind. Und diese Gleichung, integrirt, giebt

11) $log\,t+\int\frac{p+qv}{m+(n+p)v+qv^2}\cdot dv=c.$

$$M+N\cdot\partial y_x=0$$

auch allemal die nachstehende Form geben, nämlich

$$M\cdot dx+N\cdot dy=0.$$

Führt man nun neue Veränderliche t und u so ein, daß

$$x=t+\alpha,\quad y=u+\beta$$

wird, und sind dt, du, dx, dy zusammengehörige unendlich-kleine Zuwachse, so hat man sogleich

$$dx=dt \text{ und } dy=du;$$

und die Gleichung

$$M\cdot dx+N\cdot dy=0$$

geht sogleich in

$$M\cdot dt+N\cdot du=0$$

oder in

$$M+N\cdot\frac{du}{dt}=0$$

d. h. in

$$M+N\cdot\partial u_t=0$$

über, so daß also auch aus dieser Betrachtung dasselbe Endresultat sich ergiebt, wie im Texte, nämlich daß ∂u_t statt ∂y_x zu stehen kommt.

Integrirt man vollends (nach §. 11.), setzt man dann statt x überall $\frac{u}{t}$, statt u und t aber bezüglich ihre Werthe $x-\alpha$ und $y-\beta$, so wie statt α und β ihre Werthe aus den Gleichungen 8.), so erhält man die gesuchte Integral-Gleichung zwischen x und y.

Da die Werthe von α und β aus den Gleichungen 8.) im Nenner $mq-np$ enthalten, so hört dieses Verfahren auf, seine Dienste zu thun, so oft $mq-np=0$, d. h. so oft $q=\frac{np}{m}$ ist. — In diesem Ausnahmsfalle wird die Gleichung 1.), wenn man statt q diesen Werth setzt, die Form

1') $\quad am+bm\cdot\partial y_x+(mx+ny)(m+p\cdot\partial y_x)=0$

annehmen, und giebt sogleich, wenn man $mx+ny=z$, also $m+n\cdot\partial y_x=\partial z_x$ setzt, die Gleichung

2') $\quad 1+\frac{bm+pz}{amn-bm^2+(mn-pm)z}\cdot\partial z_x=0;$

und diese Gleichung, integrirt, giebt wiederum

3') $\quad x+\frac{1}{m}\int\frac{bm+pz}{an-bm+(n-p)z}\cdot dz=0.$

Diese gebrochene Funktion integrirt sich vollends sehr leicht, wenn man mit dem Nenner in den Zähler dividirt, die Constante $\frac{p}{n-p}$ herausdividirt, und die ächt gebrochene Funktion $\frac{p}{n-p}\cdot\frac{bm-ap}{an-bm+(n-p)z}$ übrig behält und nun beide Theile integrirt. Dies giebt zuletzt die Integral-Gleichung

4') $\quad x+\frac{pz}{m(n-p)}+\frac{n(bm-ap)}{m(n-p)^2}\cdot log\,(an-bm+(n-p)z)=c.$

Ist aber $n=p$, so giebt die obige Gleichung 3'.) augenblicklich das Integral

5') $\quad x+\frac{bz}{an-bm}+\frac{pz^2}{2m(an-bm)}=c.$

C. Betrachten wir noch die lineäre Gleichung der ersten Ordnung*), d. h. die Gleichung von der Form

*) Unter lineärer Gleichung der zweiten Ordnung versteht man die Gleichung

$$\partial^2 y_x+P_x\cdot\partial y_x+Q_x\cdot y=R_x.$$

Und die lineäre Gleichung der dritten Ordnung wird diejenige genannt, welche die Form hat

$$\partial^3 y_x+P_x\cdot\partial^2 y_x+Q_x\cdot\partial y_x+R_x\cdot y=S_x.$$

1) $$\partial y_x + P_x \cdot y = Q_x.$$

Führt man hier ſtatt des einen Veränderlichen y, zwei neue Veränderliche u_x und z_x ein, dadurch, daß man

2) $$y = uz, \quad \text{alſo} \quad \partial y_x = u \cdot \partial z_x + z \cdot \partial u_x$$

ſetzt, ſo kann man über den einen dieſer beiden Veränderlichen nach Belieben disponiren, und die neue Gleichung dadurch auf eine einfachere Form bringen. Die Gleichung 1.) wird nämlich durch dieſe Subſtitution

3) $$u \cdot \partial z_x + z \cdot \partial u_x + Puz = Q.$$

Setzt man nun

4) $$\partial z_x + Pz = 0,$$

ſo geht die Gleichung 3.) noch über in

5) $$z \cdot \partial u_x = Q.$$

Dieſe Gleichungen 4.) und 5.) geben nun z und u, folglich auch y. — In der Gleichung 4.) trennen ſich die Veränderlichen augenblicklich und ſie wird

$$P_x + \frac{1}{z} \cdot \partial z_x = 0,$$

und giebt, integrirt,

6) $$\int P \cdot dx + log\, z = c.$$

Findet man hieraus

7) $$z = C \cdot e^{-\int P \cdot dx},$$

und ſubſtituirt man dieſen Werth von z in die 5.), ſo ergiebt ſich noch

8) $$u = \frac{1}{C} \int Q \cdot e^{\int P \cdot dx} \cdot dx + c.$$

Und nun wird, aus $y = uz$,

9) $$y = e^{-\int P \cdot dx} \cdot \int Q \cdot e^{\int P \cdot dx} \cdot dx + Cc \cdot e^{-\int P \cdot dx},$$

wo ſtatt Cc eine beliebige Conſtante, alſo c oder C allein geſetzt werden kann *).

*) Man konnte ſogleich in 6.) $c = 0$ oder in 7.) $C = 1$ nehmen, weil es hier nur darauf ankam, nicht alle Werthe von z, ſondern nur irgend einen Werth von z ſo zu finden, daß die gegebene Differential-Gleichung die einfache Geſtalt in 5.) annehme. Hier genügte alſo, irgend ein beſonderes Integral der Gleichung 4.) ſtatt des allgemeinen.

$$\frac{x}{y} = c \quad \text{oder} \quad x = cy \quad \text{oder} \quad y = cx.$$

Hätte man dieſelbe Differential-Gleichung $y - x \cdot \partial y_x = 0$ mit $\frac{1}{x^2+y^2}$ multiplicirt, ſo daß man erhalten hätte die neue Gleichung

$$\frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2} \cdot \partial y_x = 0,$$

ſo wäre nun der Ausdruck zur Linken wiederum integrabel geweſen*), und man hätte erhalten als Integral die Gleichung

$$\frac{1}{tg}\frac{y}{x} = c.$$

Iſt aber $\frac{1}{tg}\frac{y}{x}$ conſtant, ſo iſt $\frac{y}{x}$ ſelbſt conſtant; alſo hat man wiederum $\frac{y}{x} = c$ als Integral.

Sind M und N homogene Funktionen von x und y vom μ^{ten} Grade, d. h. ſind ſie ſo, daß ſie bezüglich in $t^\mu M$ und $t^\mu N$ übergehen, ſo oft tx und ty ſtatt x und y geſetzt werden, ſo iſt $\frac{1}{Mx+Ny}$ allemal ein integrirender Faktor von $M+N \cdot \partial y_x$, d. h. es iſt dann allemal

$$(\odot) \cdots \quad \partial\left(\frac{M}{Mx+Ny}\right)_y = \partial\left(\frac{N}{Mx+Ny}\right)_x.$$

Man iſt auf dieſen Satz durch folgende Eigenſchaft der homogenen Funktionen gekommen. Iſt nämlich F eine homogene Funktion von x und y vom m^{ten} Grade und ſetzt man in ihr tx und ty ſtatt x und y, ſo geht ſie in $t^\mu \cdot F$ über; oder in $(1+g)^\mu F$, wenn $1+g$ ſtatt t geſetzt wird, in welchem letztern Falle alſo $(1+g)x$ und $(1+g)y$, d. h.

---

*) Dies konnte man à priori wiſſen. Denn, war $\frac{1}{y^2}$ ein integrirender Faktor und $\frac{x}{y}$ das Integral k, dann mußte jede Funktion von $\frac{x}{y}$, mit $\frac{1}{y^2}$ multiplicirt, ebenfalls ein integrirender Faktor ſeyn. Es iſt aber

$$\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}.$$

$x+gx$ und $y+gy$ statt bezüglich x und y gesetzt worden sind. Man hat daher die Gleichung

$$F_{x+gx,y+gy} = (1+g)^{\mu}\cdot F.$$

Nimmt man nun den Taylor'schen Lehrsatz für zwei Veränderliche (I. Bd. §. 153.) und setzt man daselbst gx statt h und gy statt k, so erhält man in der vorstehenden Gleichung den Ausdruck zur Linken bald nach Potenzen von g geordnet, während der Ausdruck zur Rechten mittelst des binomischen Lehrsatzes ebenfalls nach g geordnet werden kann. Vergleicht man dann links und rechts die Koefficienten der einzelnen Potenzen von g mit einander, so erhält man die nachstehenden Gleichungen, nämlich

1) $$x\cdot\partial F_x + y\cdot\partial F_y = \mu F;$$

2) $$x^2\cdot\partial^2 F_x + 2xy\cdot\partial^{1,1}F_{x,y} + y^2\cdot\partial^2 F_y = \mu(\mu-1)F;$$

u. s. w. f.

Diese Gleichungen bilden eine merkwürdige Eigenschaft der homogenen Funktionen, welche wir bei dieser Gelegenheit fest halten wollen *).

Nun ist aber der Zähler von $\partial\left(\frac{M}{Mx+Ny}\right)_y - \partial\left(\frac{N}{Mx+Ny}\right)_x$, wenn man wirklich differenziirt, subtrahirt und den Nenner wegläßt,

$$= N(x\cdot\partial M_x + y\cdot\partial M_y) - M\cdot(x\cdot\partial N_x + y\cdot\partial N_y),$$

d. h. wegen der Gleichung 1.), wenn man abwechselnd M und N statt F setzt,

$$= N(\mu M) - M(\mu N) = 0.$$

Also ist die Bedingungs-Gleichung ⊙.) der Integrabilität wirklich erfüllt, und $\frac{1}{Mx+Ny}$ ist also wirklich ein integrirender Faktor von $M+N\cdot\partial y_x$.

III. Methode der Trennung der Veränderlichen.

In der Gleichung

1) $$M_x + N_y\cdot\partial y_x = 0,$$

in welcher der Koefficient M kein y, und der Koefficient N kein x enthält, ist der Ausdruck zur Linken allemal an sich schon integrabel, weil $\partial M_y = 0 = \partial N_x$ ist; und ihr Integral ist

2) $$\int M\cdot dx + \int N\cdot dy = const.$$ **)

In diesem Falle sagt man: „die Veränderlichen x und y seyen „in der gegebenen Differential-Gleichung getrennt".

---

*) Diese Eigenschaft der homogenen Funktionen läßt sich auch auf homogene Funktionen von beliebig viel Veränderlichen ausdehnen.

**) Es ist nämlich (nach §. 4. N. 4.)

$$\int N\cdot dy = \int N\cdot\partial y_x\cdot dx.$$

Hat nun eine Gleichung die Form

1') $X_x Y_y + X'_x Y'_y \cdot \partial y_x = 0,$

so darf man nur durch X'_x und Y_y dividiren, um sogleich die Veränderlichen getrennt zu haben. Man erhält dann

2') $$\frac{X}{X'} + \frac{Y'}{Y} \cdot \partial y_x = 0$$

und davon ist dann das Integral

3') $$\int \frac{X}{X'} \cdot dx + \int \frac{Y'}{Y} \cdot dy = c.$$

Offenbar aber hat man hier für die Gleichung 1'.) nur die Methode des integrirenden Faktors, der hier $\frac{1}{X'Y}$ ist, angewandt, so daß diese „Methode der Trennung der Veränderlichen" nicht eigentlich als eine neue Methode aufgezählt werden kann.

Ist z. B. $y + x \cdot \partial y_x = 0$ zu integriren, so dividire man diese Gleichung durch xy und man erhält

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \cdot \partial y_x = 0.$$

In dieser Gleichung sind nun die Veränderlichen getrennt, und ihr Integral ist daher

$$\int \frac{1}{x} \cdot dx + \int \frac{1}{y} \cdot dy = c, \quad \text{d. h.} \quad \log x + \log y = c$$

oder $\log(xy) = c$, d. h. $xy = e^c$ oder $xy = C$,

wo C eine willkührliche Constante ist.

Man hätte sogleich in der Gleichung $\log(xy) = c$ statt c schreiben können $\log c$, weil $\log c$ noch eben so gut jede willkührliche Constante ausdrückt wie c selbst. Dann schrieb man ohne Weiteres statt

$$\log(xy) = \log c, \quad \text{sogleich} \quad xy = c.$$

IV. Integration durch Einführung neuer Veränderlichen.

In allen den Fällen, wo die vorher beschriebenen Methoden nicht mit Erfolg angewandt werden können, führt man einen oder zwei neue Veränderliche ein, in der Hoffnung, daß die neue Differential-Gleichung dann nach einer der vorbeschriebenen Methoden behandelt werden könne.

A. Sind z. B. M und N homogene Funktionen von x und y von einerlei z. B. von der n^{ten} Dimension*), so setze man $y = xz$, also $\partial y_x = x \cdot \partial z_x + z$; die Funktionen M und N nehmen dadurch bezüglich die Form $x^n \cdot P_z$ und $x^n \cdot Q_z$ an, und die Gleichung $M + N \cdot \partial y_x = 0$ geht dadurch über in

$$P_z + Q_z(x \cdot \partial z_x + z) = 0$$

d. h. in $$P_z + zQ_z + xQ_z \cdot \partial z_x = 0.$$

In dieser können die Veränderlichen sogleich getrennt werden, und sie wird dann

$$\frac{1}{x} + \frac{Q_z}{P_z + zQ_z} \cdot \partial z_x = 0$$

und giebt, integrirt,

$$log\, x + \int \frac{Q_z}{P_z + zQ_z} \cdot dz = c.$$

Ist z. B. zu integriren die Gleichung

$$x + y \cdot \partial y_x = ny,$$

so wird sie, wenn man $y = xz$ setzt,

$$1 + z(x \cdot \partial z_x + z) = nz$$

oder

$$\frac{1}{x} + \frac{z}{1 - nz + z^2} \cdot \partial z_x = 0;$$

also giebt sie, integrirt

$$log\, x + \int \frac{z}{1 - nz + z^2} \cdot dz = c.$$

Will man hier noch $\int \frac{z}{1 - nz + z^2} \cdot dz$ finden, so muß man den Bruch in zwei Partial-Brüche zerlegen, oder man muß direkt nach §. 11.) verfahren, um den doppelten Partial-Bruch ohne Weiteres zu integriren. Auf diesem letzteren Wege erhält man zunächst

$$\int \frac{z}{1 - nz + z^2} \cdot dz = \tfrac{1}{2} log\,(1 - nz + z^2) + \tfrac{1}{2} n \int \frac{1}{1 - nz + z^2} \cdot dz,$$

---

*) Ist z. B. $M = x^3 - 4x^2y$ und $N = xy^2 - 3x^2y + 4y^3$, so sind M und N homogene Funktionen von der dritten Dimension. — Hat man aber $M = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x^3 + y^2}$ und $N = \frac{xy}{x^4 - y^4}$, so sind M und N homogene Funktionen von der $(-2)^{ten}$ Dimension.

während das letztere Integral im §. 6. N. 21.) oder N. 25.) bereits gefunden iſt.

Hätte man als zweites Beiſpiel

$$x\cdot\partial y_x - y = \sqrt{x^2+y^2}$$

zu integriren, und ſetzte man $y = xz$, ſo erhielte man

$$x\cdot\partial z_x = \sqrt{1+z^2}$$

oder

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\cdot\partial z_x = 0;$$

und dieſe Gleichung, integrirt, giebt

$$log\, x - \int\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\cdot dz = c,$$

d. h.

$$log\, x - log(z+\sqrt{1+z^2}) = log\, c,$$

indem man rechts ſtatt c lieber $log\, c$ ſchreibt. Dann verwandelt ſich das Integral ſogleich in

$$\frac{x}{z+\sqrt{1+z^2}} = c \quad \text{oder in} \quad \frac{x^2}{y+\sqrt{x^2+y^2}} = c,$$

d. h. in

$$y+\sqrt{x^2+y^2} - cx^2 = 0,$$

indem man zuletzt lieber $\frac{1}{c}$ ſtatt c geſetzt hat.

B. Hätte man aber die Gleichung

1) $$(a+mx+ny)+(b+px+qy)\cdot\partial y_x = 0$$

gegeben, ſo würde man ſie erſt dadurch in eine andere verwandeln, deren Koefficienten homogen ſind, daß man

2) $$x = t+\alpha \quad \text{und} \quad y = u+\beta$$

ſetzt. Da nämlich y eine Funktion von x iſt, ſo ſind jetzt auch x, y und u Funktionen von t; differenziirt man daher letztere beiden Gleichungen nach allem t, ſo erhält man

3) $$\partial x_t = 1, \qquad \partial y_t = \partial u_t,$$

während

4) $$\partial y_x = \frac{\partial y_t}{\partial x_t}$$

iſt (nach I. Bd. §. 150. I.). Alſo findet ſich hier

5) $$\partial y_x = \partial u_t \text{ *)}.$$

*) Denkt man ſich unter dx und dy zuſammengehörige unendlich-kleine Zuwachſe (Differentialien), ſo iſt (nach I. Bd. §. 160.) $\partial y_x = \frac{dy}{dx}$, und man kann daher der Gleichung

1′) $$y = px + P_p$$

nimmt, ſo daß $f_{x,p} = px + P_p$, mithin

$$\delta f_x = p \quad \text{und} \quad \delta f_p = x + \delta P_p$$

iſt, ſo wird die Gleichung 4.) jetzt dieſe:

2′) $$0 = x + \delta P_p.$$

Weil dies aber gar keine Differential-Gleichung mehr iſt, ſo hört das Verfahren ſelbſt ganz auf. — Nimmt man jedoch ſtatt der Gleichung 4.) die Gleichung 5.), ſo liefert ſie

3′) $$\delta p_x = 0.$$

Dieſe Gleichung kann integrirt werden, und giebt dann

4′) $$p = const. = c.$$

Und eliminirt man nun aus 1′.) und 2′.) den Veränderlichen p, ſo erhält man

5′) $$y = cx + P_c,$$

welches das geſuchte Integral mit der willkührlichen Conſtante c iſt.

Um dies noch näher zu erörtern, wollen wir $P_p = n\sqrt{1+p^2}$ vorausſetzen, ſo daß alſo die gegebene Differential-Gleichung 1′.) eigentlich dieſe iſt

1″) $$y = x \cdot \delta y_x + n\sqrt{1+\delta y_x^2}.$$

Dann geht die Gleichung 5′.) über in

2″) $$y = cx + n\sqrt{1+c^2},$$

welche das Integral der 1″.) iſt.

§. 41.

Integrations-Methoden für Differential-Gleichungen der zweiten und höhern Ordnungen.

Bei den Differential-Gleichungen der 2ten und höhern Ordnungen verſucht man dieſelben Integrations-Methoden, welche für die der erſten Ordnung (im vorſtehenden §. 40.) mitgetheilt worden ſind. Wir wollen aber in dem Folgenden vorzugsweiſe die Gleichungen der 2ten Ordnung im Auge behalten, welche man auf Null bringt, und ſie ſo einrichtet, daß $\delta^2 y_x$ nur in einem iſolirten Gliede von der Form $P \cdot \delta^2 y_x$ vorkommt, wo P eine Funktion von x, y und δy_x iſt.

I. Erſtens alſo verſucht man, die Funktion, welche $= 0$ iſt, nach Anleitung des §. 35.) direkt zu integriren. Gelingt

Integrirt man vollends (nach §. 11.), setzt man dann statt v überall $\frac{u}{t}$, statt u und t aber bezüglich ihre Werthe $x-\alpha$ und $y-\beta$, so wie statt α und β ihre Werthe aus den Gleichungen 8.), so erhält man die gesuchte Integral-Gleichung zwischen x und y.

Da die Werthe von α und β aus den Gleichungen 8.) im Nenner $mq-np$ enthalten, so hört dieses Verfahren auf, seine Dienste zu thun, so oft $mq-np=0$, d. h. so oft $q=\frac{np}{m}$ ist. — In diesem Ausnahmsfalle wird die Gleichung 1.), wenn man statt q diesen Werth setzt, die Form

1') $$am+bm\cdot\partial y_x+(mx+ny)(m+p\cdot\partial y_x)=0$$

annehmen, und giebt sogleich, wenn man $mx+ny=z$, also $m+n\cdot\partial y_x=\partial z_x$ setzt, die Gleichung

2') $$1+\frac{bm+pz}{amn-bm^2+(mn-pm)z}\cdot\partial z_x=0;$$

und diese Gleichung, integrirt, giebt wiederum

3') $$x+\frac{1}{m}\int\frac{bm+pz}{an-bm+(n-p)z}\cdot dz=0.$$

Diese gebrochene Funktion integrirt sich vollends sehr leicht, wenn man mit dem Nenner in den Zähler dividirt, die Constante $\frac{p}{n-p}$ herausdividirt, und die ächt gebrochene Funktion $\frac{p}{n-p}\cdot\frac{bm-ap}{an-bm+(n-p)z}$ übrig behält und nun beide Theile integrirt. Dies giebt zuletzt die Integral-Gleichung

4') $$x+\frac{pz}{m(n-p)}+\frac{n(bm-ap)}{m(n-p)^2}\cdot log\,(an-bm+(n-p)z)=c.$$

Ist aber $n=p$, so giebt die obige Gleichung 3'.) augenblicklich das Integral

5') $$x+\frac{bz}{an-bm}+\frac{pz^2}{2m(an-bm)}=c.$$

C. Betrachten wir noch die lineäre Gleichung der ersten Ordnung*), d. h. die Gleichung von der Form

---

*) Unter lineärer Gleichung der zweiten Ordnung versteht man die Gleichung

$$\partial^2 y_x+P_x\cdot\partial y_x+Q_x\cdot y=R_x.$$

Und die lineäre Gleichung der dritten Ordnung wird diejenige genannt, welche die Form hat

$$\partial^3 y_x+P_x\cdot\partial^2 y_x+Q_x\cdot\partial y_x+R_x\cdot y=S_x.$$

1) $$\partial y_x + P_x \cdot y = Q_x.$$

Führt man hier ſtatt des einen Veränderlichen y, zwei neue Veränderliche u_x und z_x ein, dadurch, daß man

2) $$y = uz, \quad \text{alſo} \quad \partial y_x = u \cdot \partial z_x + z \cdot \partial u_x$$

ſetzt, ſo kann man über den einen dieſer beiden Veränderlichen nach Belieben disponiren, und die neue Gleichung dadurch auf eine einfachere Form bringen. Die Gleichung 1.) wird nämlich durch dieſe Subſtitution

3) $$u \cdot \partial z_x + z \cdot \partial u_x + Puz = Q.$$

Setzt man nun

4) $$\partial z_x + Pz = 0,$$

ſo geht die Gleichung 3.) noch über in

5) $$z \cdot \partial u_x = Q.$$

Dieſe Gleichungen 4.) und 5.) geben nun z und u, folglich auch y. — In der Gleichung 4.) trennen ſich die Veränderlichen augenblicklich und ſie wird

$$P_x + \frac{1}{z} \cdot \partial z_x = 0,$$

und giebt, integrirt,

6) $$\int P \cdot dx + log\, z = c.$$

Findet man hieraus

7) $$z = C \cdot e^{-\int P \cdot dx},$$

und ſubſtituirt man dieſen Werth von z in die 5.), ſo ergiebt ſich noch

8) $$u = \frac{1}{C} \int Q \cdot e^{\int P \cdot dx} \cdot dx + c.$$

Und nun wird, aus $y = uz$,

9) $$y = e^{-\int P \cdot dx} \cdot \int Q \cdot e^{\int P \cdot dx} \cdot dx + Cc \cdot e^{-\int P \cdot dx},$$

wo ſtatt Cc eine beliebige Conſtante, alſo c oder C allein geſetzt werden kann *).

*) Man konnte ſogleich in 6.) $c = 0$ oder in 7.) $C = 1$ nehmen, weil es hier nur darauf ankam, nicht alle Werthe von z, ſondern nur irgend einen Werth von z ſo zu finden, daß die gegebene Differential-Gleichung die einfache Geſtalt in 5.) annehme. Hier genügte alſo, irgend ein beſonderes Integral der Gleichung 4.) ſtatt des allgemeinen.

D. Betrachten wir noch als letztes Beiſpiel die Gleichung des Riccati, nämlich

1) $$\partial y_x + by^2 = ax^m,$$

wo b und a gegebene Conſtanten ſind.

Für $m = 0$ laſſen ſich die Veränderlichen ſogleich trennen; ſie wird $1 + \frac{1}{by^2 - a} \cdot \partial y_x = 0$ und giebt integrirt

$$x + \int \frac{1}{by^2 - a} \cdot dy = c$$

oder

$$x = \frac{1}{2\sqrt{ab}} log \frac{\sqrt{a} + y\sqrt{b}}{\sqrt{a} - y\sqrt{b}} + C.$$

Iſt aber m nicht $= 0$, ſo ſetze man, um die Gleichung vielleicht homogen zu machen,

$$y = z^k, \quad \text{alſo} \quad \partial y_x = kz^{k-1} \cdot \partial z_x;$$

und die gegebene Gleichung 1.) geht dadurch über in

2) $$kz^{k-1}\partial z_x + bz^{2k} - ax^m = 0.$$

Dieſe Gleichung wird homogen, wenn

$$k - 1 = 2k = m, \quad \text{alſo} \quad k = -1$$

geſetzt wird, und wenn $m = -2$ gegeben iſt. Iſt alſo nicht $m = -2$, ſo nützt dieſe Subſtitution nichts.

Man kann aber den neuen Veränderlichen z auch durch die Gleichung

$$y = Ax^p + x^q z$$

einführen. Dann wird die Gleichung 1.) die nachſtehende

3) $$x^q \cdot \partial z_x + (qx^{q-1} + 2bAx^{p+q} + bx^{2q}z)z + pAx^{p-1} + bA^2x^{2p} = ax^m.$$

Setzt man nun, um links die beiden letzten Glieder wegzuſchaffen, und um überhaupt homogene Funktionen zu erhalten,

$p - 1 = 2p$, $pA + bA^2 = 0$, $q - 1 = p + q$ und $q + 2bA = 0$,

ſo erhält man

$$p = -1, \quad A = \frac{1}{b}, \quad q = -2, \quad \text{alſo} \quad y = \frac{1}{bx} + \frac{z}{x^2};$$

und die neue Differential-Gleichung selbst wird

$$4) \qquad \partial z_x + b\frac{z^2}{x^2} = ax^{m+2}.$$

Diese Gleichung ist homogen für $m = -2$; ist aber $m = -4$, so lassen sich in ihr die Veränderlichen trennen. Die Riccatische Gleichung 1.) läßt sich also integriren, so oft $m = -2$ und $m = -4$ ist.

Man kann aber nun suchen die Gleichung 4.) auf's Neue in eine andere zu verwandeln (dadurch daß man statt z wiederum einen oder zwei neue Veränderliche einführt), welche für andere Werthe von m integrabel wird. Setzt man

$$z = \frac{1}{y'} \quad \text{und} \quad x^{m+2} = x',$$

so erhält man sogleich, wenn der Kürze wegen

$$\frac{a}{m+3} = b', \quad \frac{b}{m+3} = a' \quad \text{und} \quad -\frac{m+4}{m+3} = m'$$

gesetzt wird, aus 4.) die Gleichung

$$5) \qquad \partial y'_{x'} + b'y'^2 = a'x'^{m'},$$

welche genau wieder die Form der gegebenen Gleichung 1.) hat und welche für $m' = -2$ und $m' = -4$ auf dem kurz vorher betretenen Wege integrabel gemacht wird. Aus $m' = -4$ und $-\frac{m+4}{m+3} = m'$ folgt aber $m = -\frac{8}{3}$.

Man sieht, wie man fortfahren kann, um dieselbe Gleichung für die Werthe von

$$m = -4, \quad -\tfrac{8}{3}, \quad -\tfrac{12}{5}, \quad -\tfrac{16}{7}, \quad \cdots \quad -\frac{4b}{2b-1}$$

integrabel zu machen.

Setzt man aber in 1.) sogleich $y = \frac{1}{y'}$ und $x^{m+4} = x'$, so nimmt sie noch die Form an

$$\partial y'_{x'} + b'y'^2 = a'x'^{m'},$$

und auf diesem Wege findet man nach und nach das Integral

Würde man jedoch eher x in p, als p in x ausgedrückt finden können, so würde man aus $\partial^{n-1} y_x = p$,

$$\partial^{n-2} y_x = \int p \cdot dx = \int p \cdot \partial x_p \cdot dp = \int pP \cdot dp$$

erhalten; dann könnte man diese Gleichung wiederholt auf selbe Weise behandeln, um zuletzt eine Gleichung zwischen und y zu erhalten, welche in Verbindung mit $x = x_p$, d Elimination von p, das Ur-Integral mit den n willkührli Constanten liefern würde.

Ist $n = 2$, d. h. ist die gegebene Differential-Gleich bloß von der zweiten Ordnung, so hätte man zunächst

1) $$x = \int P_p \cdot dp + c.$$

und dann sogleich

2) $$y = \int pP_p \cdot dp + c'.$$

Eliminirt man dann p aus 1.) und 2.), so erhält man y i mit den beiden willkührlichen Constanten c und c'.

Wäre z. B. zu integriren die Gleichung

$$\frac{(1+\partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x} = a \text{ *)},$$

so würde man

$$\partial y_x = p$$

setzen, und dann haben

$$(1+p^2)^{\frac{3}{2}} = a \cdot \partial p_x \quad \text{oder} \quad 1 = \frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \partial p_x.$$

Diese Gleichung, integrirt, giebt nun sogleich

$$x = \int \frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dp = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} + c,$$

und

$$y = \int \frac{ap}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dp = -\frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + c'.$$

Eliminirt man nun aus diesen beiden Gleichungen den Veränderlich so erhält man

---

*) Da der Ausdruck zur Linken der Krümmungs-Halbmesser für durch die Gleichung $y = y_x$ gegebene Kurve ist, so würde man zu Gleichung geführt, wenn man die Kurve suchte, deren Krümmungs- messer an jeder Stelle constant und $= a$ ist.

3) $$y = px - \int P_p \cdot dp.$$

Eliminirt man aus 2.) und 3.) den Veränderlichen p, so erhält man die Gleichung zwischen x und y nebst der willkührlichen Constante, welche $\int P \cdot dp$ eingeführt hat, als das gesuchte Integral.

Ist z. B. gegeben die Differential-Gleichung

$$x + a \cdot \partial y_x = b\sqrt{1 + \partial y_x^2},$$

so erhält man, wenn $\partial y_x = p$ gesetzt wird,

1') $$x = -ap + b\sqrt{1+p^2}$$

und

$$y = px - \int (-ap + b\sqrt{1+p^2}) \cdot dp$$

oder

2') $$y = px + \tfrac{1}{2}ap^2 - b\int\sqrt{1+p^2} \cdot dp + c.$$

Findet man nun $\int\sqrt{1+p^2} \cdot dp$ (nach §. 12. oder §. 6.) und eliminirt man dann aus 1.') und 2.') den Veränderlichen p, so hat man die gesuchte Integral-Gleichung zwischen y und x.

Ganz dasselbe findet statt, wenn die gegebene Differential-Gleichung außer ∂y_x bloß noch y, also kein x enthalten sollte. Man würde dann nur den Satz I. Bd. §. 150. I.) zu Hülfe nehmen, nach welchem, wenn man daselbst x statt f, und y statt z setzt

$$\partial x_x = \partial x_y \cdot \partial y_x, \quad \text{d. h.} \quad 1 = \partial y_x \cdot \partial x_y$$

ist *). Man kann danach überall statt ∂y_x den ihm gleichen Quotienten $\frac{1}{\partial x_y}$ setzen, und man erhält dann, wenn $\partial x_y = q$ gesetzt wird, aus der gegebenen Differential-Gleichung

$$y = Q_q$$

*) Sind dx und dy zusammengehörige unendlich-kleine Zuwachse, so ist (nach I. Bd. §. 160.)

$$\partial y_x = \frac{dy}{dx} \text{ und } \partial x_y = \frac{dx}{dy}.$$

Daraus folgt dann ebenfalls, daß $\partial y_x = \frac{1}{\partial x_y}$ ist.

und aus $\partial x_y = q$ oder $x = \int q \cdot dy$, wenn man theilweiſe integrirt,

$$x = qy - \int y \cdot \partial q_y \cdot dy = qy - \int Q_q \cdot dq.$$

Wird dann q eliminirt, ſo hat man das Integral zwiſchen x und y und einer willkührlichen Conſtante.

B. Enthält aber die gegebene Differential-Gleichung außer ∂y_x noch y und x zugleich, jedoch einen der beiden letztern Veränderlichen, z. B. y, nur in der erſten Potenz, ſo findet man, indem man wieder

1) $$\partial y_x = p$$

ſetzt, aus der gegebenen Differential-Gleichung y in x und p ausgedrückt, alſo

2) $$y = f_{x,p}.$$

Differenziirt man nun dieſe Gleichung auf's Neue, und zwar, in ſo fern x und y Funktionen von p ſind, nach allem p, ſo erhält man

3) $$\partial y_p = \partial f_x \cdot \partial x_p + \partial f_p,$$

oder, weil (nach I. Bd. §. 150. I.) $\partial y_p = \partial y_x \cdot \partial x_p = p \cdot \partial x_p$ iſt, wenn man dies ſtatt ∂y_p ſubſtituirt

4) $$0 = (\partial f_x - p) \cdot \partial x_p + \partial f_p,$$

wo ∂f_x und ∂f_p, ſowohl x als auch p enthalten können, aber nicht y, ſo daß die 4.) eine Differential-Gleichung zwiſchen x und p iſt, und in ſo fern man $\partial x_p = \frac{1}{\partial p_x}$ hat, wohl auch ſo

5) $$0 = (\partial f_x - p) + \partial f_p \cdot \partial p_x$$

geſchrieben werden kann. — Gelingt es nun, dieſe Gleichung 4.) oder 5.) zu integriren, ſo daß man eine Gleichung zwiſchen x, p und einer Conſtante erhält, ſo darf man nur aus dieſer Gleichung und aus der Gleichung 2.) den Veränderlichen p eliminiren, und man wird die geſuchte Integral-Gleichung zwiſchen x, y und der willkührlichen Conſtante haben.

Iſt z. B. die gegebene Differential-Gleichung ſo, daß wenn man p ſtatt ∂y_x ſetzt, ſie die Form

wenn, außer P constant, noch $\varphi_x = 0$ seyn sollte. — Ist also zwar P constant, aber φ_x nicht Null, so hat das Integral doch immer dieselbe Form $y = e^{-Px} \cdot C$, nur daß statt der Constante C jetzt $\int \varphi_x \cdot e^{Px} \cdot dx + C$ zu stehen kommt.

B. Dadurch ist aber für die Form des Integrals der lineären Gleichungen der zweiten und höhern Ordnungen, jedoch mit constanten Koefficienten, der Weg gezeigt. Wir stehen hier nämlich davon ab, diese lineären Gleichungen b.), c.) etc. etc. in dem Falle zu integriren, wo die Koefficienten P, Q, R etc. etc. wirklich Funktionen von x sind, sondern wollen nur den Fall betrachten, der in den Anwendungen auf Physik, Astronomie etc. etc. am gewöhnlichsten vorkommt, — den Fall nämlich, in welchem P, Q, R etc. etc. völlig constant sind.

Ist aber die reducirte lineäre Gleichung der zweiten Ordnung

1) $$\partial^2 y_x + P \cdot \partial y_x + Q \cdot y = 0$$

mit constanten Koefficienten P und Q zu integriren, so setzt man zunächst

2) $y = C \cdot e^{mx}$, also $\partial y_x = Cm \cdot e^{mx}$, $\partial^2 y_x = Cm^2 \cdot e^{mx}$;

und die Differential-Gleichung 1.) geht, wenn man statt y, ∂y_x und $\partial^2 y_x$ diese Werthe substituirt, in die algebraische Gleichung

3) $$m^2 + Pm + Q = 0;$$

über, und diese wird identisch, sobald man statt m einen der beiden Werthe m_1 oder m_2 setzt, der aus der Auflösung dieser quadratischen Gleichung für m hervorgeht. Also kann man

4) $$y = C_1 \cdot e^{m_1 x} + C_2 \cdot e^{m_2 x}$$

versuchen, wo C_1 und C_2 zwei willkührliche Constanten sind. — Und in der That genügt dieser Werth von y aus 4.) der gegebenen Differential-Gleichung 1.) und hat auch zwei willkührliche Constanten; folglich ist er das allgemeine Ur-Integral der 1.).

Sind die beiden Werthe m_1 und m_2 einander gleich und durch m bezeichnet, so würde die Gleichung 4.) in

dies, ſo ſetzt man das Integral einer willkührlichen Conſtante gleich, und man hat die geſuchte Integral-Gleichung.

So findet ſich, um das Beiſpiel des §. 20.) noch einmal zu nehmen, von der Gleichung

$$\frac{1}{y}\cdot\partial^2 y_x-\frac{1}{y^2}\cdot\partial y_x{}^2+x\cdot\partial y_x+y+b^x=0$$

das Integral ſogleich wie folgt:

$$\frac{\partial y_x}{y}+xy+\frac{b^x}{\log b}=c,$$

oder

$$\partial y_x+xy^2+\left(\frac{b^x}{\log b}-c\right)y=0.$$

Dies iſt ein erſtes Integral der gegebenen Differential-Gleichung der 2ten Ordnung, welches noch einmal integrirt werden müßte, wenn man ein Ur-Integral (mit den beiden willkührlichen Conſtanten) haben wollte.

II. Zweitens, wenn dies mislingt, in ſo fern die Funktion zur Linken der auf Null gebrachten Gleichung nicht integrabel iſt, könnte man wieder ſuchen, dieſelbe mittelſt eines integrirenden Faktors integrabel zu machen. Dieſen Faktor wird man freilich meiſt nur durch glückliche Verſuche ausfindig machen können, obgleich ein ſolcher (wie ſich auch hier wieder auf analoge Weiſe wie früher, zeigen läßt) immer exiſtirt.

Wäre z. B. die vorſtehende Differential-Gleichung ſo umgeändert geweſen, daß ſie keine angezeigten Diviſionen mehr enthielt, wäre ſie nämlich ſo gegeben geweſen:

$$y\cdot\partial^2 y_x-\partial y_x{}^2+xy^2\cdot\partial y_x+y^3+b^x y^2=0,$$

ſo hätte man ſie vorher mit $\frac{1}{y^2}$ multipliciren müſſen, um die neue Gleichung ſo zu erhalten, daß die eine Seite derſelben als Differential-Funktion integrabel iſt.

Iſt aber eine Gleichung der 2ten Ordnung gegeben bloß zwiſchen y und $\partial^2 y_x$, ſo löſe man ſolche algebraiſch nach $\partial^2 y_x$ auf, ſo daß man erhält

$$1)\qquad \partial^2 y_x=Y_y;$$

dann wird ſie allemal mittelſt des integrirenden Faktors ∂y_x integrabel. Sie geht nämlich dann über in

Wären aber diese Koefficienten P und Q nicht constant, sondern Funktionen von x, so würde doch das Integral der reduzirten Gleichung

$$1') \qquad \partial^2 y_x + P \cdot \partial y_x + Q \cdot y = 0$$

die Form

$$2) \qquad y = a \cdot R_x + b \cdot S_x$$

annehmen *).

*) Sucht man nämlich den integrirenden Faktor z der Gleichung 1'.), so nimmt solche die Form

$$z \cdot \partial^2 y_x + Pz \cdot \partial y_x + Qzy = 0$$

an. Integrirt man aber jedes Glied dieser Gleichung, und zwar die beiden ersten theilweise, so erhält man

$$\int z \cdot \partial^2 y_x \cdot dx = z \cdot \partial y_x - \int \partial z_x \cdot \partial y_x \cdot dx,$$

oder, indem man hier zur Rechten noch einmal theilweise integrirt,

$$\int z \cdot \partial^2 y_x \cdot dx = z \cdot \partial y_x - \partial z_x \cdot y + \int y \cdot \partial^2 z_x \cdot dz.$$

ferner

$$\int zP \cdot \partial y_x \cdot dx = zPy - \int y \cdot \partial (zP)_x \cdot dx,$$

$$\int zQy \cdot dx = \int y \cdot zQ \cdot dx.$$

Addirt man aber diese drei letztern Gleichungen, und nimmt man statt z eine solche Funktion bloß von x, daß rechts die Summe der drei unter dem Integral-Zeichen stehenden Ausdrücke der Null gleich wird, so erhält man als Integral der Gleichung 1'.) sogleich

$$z \cdot \partial y_x - (\partial z_x - zP)y = c$$

oder

$$\partial y_x - \frac{\partial z_x - zP}{z_x} \cdot y = \frac{c}{z_x}.$$

Und da diese Gleichung lineär und von der ersten Ordnung ist, so ist ihr Integral bereits gefunden. — Diese Integrations-Methode setzt voraus, daß es gelingt, Versuchsweise einen Werth z_x zu finden, welcher der Gleichung

$$\partial^2 z_x - \partial (zP)_x + zQ = 0$$

genügt.

Findet man dagegen versuchsweise eine Funktion von x, welche statt y gesetzt der Gleichung

$$\partial^2 y_x + P \cdot \partial y_x + Q \cdot y = 0$$

genügt, so kann man solche statt R_x nehmen; und kann man dann noch eine zweite Funktion von x finden, von der ersten R_x und auch von $C_1 R_x$ verschieden, welche dieselbe Eigenschaft hat, so kann man solche statt S_x nehmen; und $y = C_1 R_x + C_2 S_x$ ist dann das gesuchte allgemeine Integral der gegebenen Differential-Gleichung.

So oft es aber gelingt, die reducirte lineäre Gleichung der zweiten Ordnung zu integriren, d. h. von der Gleichung das Integral 2′.) herzustellen, so oft kann man das Integral der vollständigen lineären Gleichung der zweiten Ordnung, nämlich der Gleichung

$$\partial^2 y_x + P \cdot \partial y_x + Q \cdot y = \varphi_x, \qquad 1)$$

ohne weiteres durch folgendes Verfahren finden, welches wir so vielen, dem Lagrange verdanken.

Man nimmt nämlich auch jetzt noch

$$y = a \cdot R_x + b \cdot S_x, \qquad 2)$$

an, daß man sich a und b als noch zu suchende Funktionen von x denkt, während R_x und S_x die in 2′.) bereits gefundenen, also nun bekannten Funktionen von x vorstellen. Differenzirt man aber diese Gleichung 4′.), so erhält man

$$\partial y_x = (\partial y_x) + [R_x \cdot \partial a_x + S_x \cdot \partial b_x], \qquad 3)$$

wenn (∂y_x) die Ableitung desselben y (in 4′.) bedeutet, die man unter der Voraussetzung erhält, daß a und b constant sind.

Da nun zwei Funktionen a_x und b_x gesucht werden, und der einzigen Gleichung 3′.) zu genügen ist, so kann man über eine beliebige Annahme machen; und wir setzen daher den in den eckigen Klammern befindlichen Theil gleich Null. Dies giebt

$$R_x \cdot \partial a_x + S_x \cdot \partial b_x = 0$$

und zwar

$$\text{d. h.} \quad \partial y_x = a \cdot \partial R_x + b \cdot \partial S_x.$$

Differenzirt man diese Gleichung 7′.) nun noch einmal, so erhält man

$$(\partial^2 y_x) = \partial R_x \cdot \partial a_x + \partial S_x \cdot \partial b_x,$$

wenn $(\partial^2 y_x)$ die Ableitung desselben y (in 4′.) bedeutet, die man unter der Voraussetzung erhält, daß a und b constant sind. Aus 4′.), 7′.) und 8′.) folgt nun die Differential-Gleichung

*) Man kann diese Gleichung auch so setzen, dann erhält sie die Form einer homogenen Gleichung, wenn man $y = x^n \cdot z$ setzt, dann z als Funktion von $\log x$ betrachtet, dadurch die Gleichung in eine solche umwandelt, worin z und seine Differentialquotienten nach $\log x$ nicht mehr vorkommen, und endlich $\log x = u$ setzt, wodurch sie in eine solche umformt, dann aber $n = 0$ oder $n = 1$ nimmt.

Z. B. das Integral der Gleichung

$$3x^4 + y \cdot \partial y_x + \partial^2 y_x = 0$$

wird sogleich gefunden, indem man jedes Glied integrirt. Man erhält

$$\tfrac{3}{5}x^5 + \tfrac{1}{2}y^2 + \partial y_x = c.$$

Diese letztere Gleichung ist aber die im §. 40. IV. D.) behandelte Gleichung des Riccati (d. h. ein besonderer Fall davon).

IV. Viertens muß man suchen durch Einführung neuer Veränderlichen die gegebene Gleichung der zweiten oder höhern Ordnung integrabel zu machen. — Hier sind namentlich die folgenden besonderen Fälle bemerkenswerth.

A. Hat eine Differential-Gleichung der n^{ten} Ordnung nicht selbst y, sondern bloß x und ∂y_x, $\partial^2 y_x \cdots \partial^n y_x$, so setzt man

$$\partial y_x = p,$$

also ∂p_x statt $\partial^2 y_x$, $\partial^2 p_x$ statt $\partial^3 y_x$, $\cdots$ $\partial^{n-1} p_x$ statt $\partial^n y_x$, und die gegebene Gleichung enthält dann bloß x, p, ∂p_x, $\cdots$ bis $\partial^{n-1} p_x$, ist also eine Differential-Gleichung der nächst niedrigern Ordnung. Kann solche integrirt werden, so daß man p in x oder x in p ausgedrückt erhält, so hat man aus $\partial y_x = p$, sogleich entweder

$$y = \int p_x \cdot dx, \qquad \text{oder} \qquad y = px - \int x_p \cdot dp.$$

Ist z. B. zu integriren die Gleichung

$$\frac{(1 + \partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x} = f_x \text{ *)},$$

wo f_x eine beliebige Funktion von x ist, so hat man sogleich, wenn $\partial y_x = p$ gesetzt wird, die Gleichung

$$(1 + p^2)^{\frac{3}{2}} = f_x \cdot \partial p_x,$$

in welcher die Veränderlichen p und x getrennt werden können, so daß man erhält

$$\frac{1}{f_x} = \frac{1}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \partial p_x,$$

---

*) Zu dieser Gleichung würde man z. B. geführt, wenn man die Gleichung $y = y_x$ der ebenen Kurve suchte, deren Krümmungs-Halbmesser an jeder durch den Abscissen-Werth x gegebenen Stelle, eine gegebene Funktion f_x von x seyn soll.

alſo $$\int \frac{1}{f_x} \cdot dx = \int \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dp = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

oder, wenn $\int \frac{1}{f_x} \cdot dx = F_x$ gefunden wird,

$$F_x + c = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{oder} \quad p = \frac{F_x + c}{\sqrt{1-(F_x+c)^2}};$$

alſo $$y = \int \frac{F_x + c}{\sqrt{1-(F_x+c)^2}} \cdot dx + c'.$$

Auf dieſen Fall bringt man auch noch die Gleichung zurück, welche zwar x und y zugleich hat, welche aber hinſichtlich der Ausdrücke y, ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$, ... $\partial^n y_x$ homogen iſt, ſobald man $y = e^u$ ſetzt. — Es bekommt nämlich dann jedes Glied den Faktor e^u, die ganze Gleichung kann damit wegdividirt werden, und die neu entſtehende Differential-Gleichung hat u ſelbſt nicht, ſondern nur x, ∂u_x, $\partial^2 u_x$, ... bis zu $\partial^n u_x$ hin.

Man kann dies namentlich auch bei denjenigen Gleichungen anwenden, welche nach y, ∂y_x, ... $\partial^n y_x$ homogen und von der erſten Dimenſion ſind, und von denen einige (im §. 42.) unter dem Namen der lineären Gleichungen behandelt werden.

B. Hat eine Differential-Gleichung der n^{ten} Ordnung nicht x, ſondern nur y und ∂y_x, $\partial^2 y_x$, ... $\partial^{n-1} y_x$, ſo iſt dies derſelbe Fall A.), ſobald man (nach I. Bd. §. 155.) $\frac{1}{\partial x_y}$ ſtatt ∂y_x, ferner $-\frac{\partial^2 x_y}{\partial x_y^3}$ ſtatt $\partial^2 y_x$ u. ſ. w. f. ſubſtituirt, weil man dann eine Gleichung erhält, welche bloß y und ∂x_y, $\partial^2 x_y$, ... $\partial^n x_y$ hat.

Hätte man z. B. die früher ſchon behandelte Gleichung

$$\partial^2 y_x = Y_y$$

zu integriren auf dieſem Wege, ſo würde man erhalten

$$\partial^2 x_y + Y_y \cdot \partial x_y^3 = 0.$$

Setzte man nun

$$\partial x_y = q, \quad \text{also} \quad \partial^2 x_y = \partial q_y,$$

so würde dieſe Gleichung übergehen in

$$\partial q_y + Y_y \cdot q^3 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{q^3} \cdot \partial q_y + Y_y = 0;$$

und dieſe, integrirt, giebt

$$-\frac{1}{2q^2} + \int Y_y \cdot dy = c,$$

oder, wenn $\int Y_y \cdot dy = f_y$ ſeyn ſollte,

$$\partial x_y = \frac{1}{\sqrt{2f_y + c}},$$

genau wie in II.).

Man könnte auch $\partial y_x = p$, alſo $\partial x_y = \frac{1}{p}$ ſetzen; dann würde $\partial^2 y_x = \partial p_x$ werden, und die Gleichung $\partial^2 y_x = Y_y$ würde in $\partial p_x = Y_y$ übergehen. Dann müßte man aber ſtatt ∂p_x jetzt ∂p_y einführen, mittelſt der Gleichung $\partial p_x = \partial p_y \cdot \partial y_x = p \cdot \partial p_y$. Die gegebene Differential-Gleichung würde dann werden

$$p \cdot \partial p_y = Y_y,$$

und dieſe, integrirt, würde geben

$$\tfrac{1}{2}p^2 = \int Y_y \cdot dy = f_y + c;$$

u. ſ. w. f.

Hat man aber $y = y_p$ oder $p = p_y$ gefunden, ſo hat man zuletzt aus $\partial x_y = \frac{1}{p}$, $x = \int \frac{1}{p_y} \cdot dy$ oder $x = \frac{y}{p} + \int \frac{y}{p^2} \cdot dp$ (indem man nämlich theilweiſe integrirt). — Dieſes letztere Verfahren iſt jedoch nur bei Gleichungen der zweiten Ordnung anwendbar.

C. Hat man eine Gleichung bloß zwiſchen $\partial^{n-1} y_x$ und $\partial^n y_x$, ſo wird man

$$\partial^{n-1} y_x = p, \quad \text{alſo} \quad \partial^n y_x = \partial p_x$$

ſetzen, und ſogleich eine Gleichung zwiſchen p und ∂p_x, oder, in ſo fern $\frac{1}{\partial x_p}$ ſtatt ∂p_x geſchrieben werden kann, eine Gleichung zwiſchen p und ∂x_p haben, welche $\partial x_p = P_p$, alſo $x = \int P \cdot dp + c$ liefert. Hat man aber p in x gefunden, ſo liefert die Gleichung $\partial^{n-1} y_x = p_x$ ſogleich

$\partial^{n-2} y_x = \int p_x \cdot dx + c_1$; $\partial^{n-3} y_x = \int (\int p_x \cdot dx) \cdot dx + c_1 x + c_2$, u. ſ. w. f.; ſo daß man zuletzt y ſelbſt in x ausgedrückt hat. —

Würde man jedoch eher x in p, als p in x ausgedrückt finden können, so würde man aus $\delta^{n-1}y_x = p$,

$$\delta^{n-2}y_x = \int p \cdot dx = \int p \cdot \delta x_p \cdot dp = \int pP \cdot dp$$

erhalten; dann könnte man diese Gleichung wiederholt auf dieselbe Weise behandeln, um zuletzt eine Gleichung zwischen p und y zu erhalten, welche in Verbindung mit $x = x_p$, durch Elimination von p, das Ur-Integral mit den n willkührlichen Constanten liefern würde.

Ist $n = 2$, d. h. ist die gegebene Differential-Gleichung bloß von der zweiten Ordnung, so hätte man zunächst

1) $$x = \int P_p \cdot dp + c.$$

und dann sogleich

2) $$y = \int pP_p \cdot dp + c'.$$

Eliminirt man dann p aus 1.) und 2.), so erhält man y in x mit den beiden willkührlichen Constanten c und c'.

Wäre z. B. zu integriren die Gleichung

$$\frac{(1+\delta y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\delta^2 y_x} = a \text{ *)},$$

so würde man

$$\delta y_x = p$$

setzen, und dann haben

$$(1+p^2)^{\frac{3}{2}} = a \cdot \delta p_x \quad \text{oder} \quad 1 = \frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \delta p_x.$$

Diese Gleichung, integrirt, giebt nun sogleich

$$x = \int \frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dp = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} + c,$$

und

$$y = \int \frac{ap}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dp = -\frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + c'.$$

Eliminirt man nun aus diesen beiden Gleichungen den Veränderlichen p, so erhält man

---

*) Da der Ausdruck zur Linken der Krümmungs-Halbmesser für eine durch die Gleichung $y = y_x$ gegebene Kurve ist, so würde man zu dieser Gleichung geführt, wenn man die Kurve suchte, deren Krümmungs-Halbmesser an jeder Stelle constant und $= a$ ist.

nehmen, wie wenn P, Q, R constant sind, und solches würde so die reducirte Gleichung

2') $\partial^3 y_x + P\cdot\partial^2 y_x + Q\cdot\partial y_x + Ry = 0$

mittelst machen.

Ist aber dann die vollständige Gleichung der dritten Ordnung

3) $\partial^3 y_x + P\cdot\partial^2 y_x + Q\cdot\partial y_x + Ry = \varphi_x$

zu integriren, so kann man sogleich wieder die Methode des Lagrange anwenden, welche wir bei den Gleichungen der zweiten Ordnung bereits beschrieben haben, und welche den Namen der „Methode der Variation der Constanten" erhalten hat. — Man nimmt nämlich an, daß das Integral der Gleichung 3') dieselbe Form 1') hat, wie das Integral der reducirten Gleichung 2'), nur daß a, b, c noch Funktionen von x sind, welche gesucht werden müssen.

Zu diesem Behufe differenziirt man die Gleichung 1') einmal, setzt aber den Theil der von der Veränderlichkeit der a, b, c herrührt, der Null gleich; dann differenziirt man die neue Gleichung noch einmal, und setzt wieder den Theil, der von der Veränderlichkeit der a, b, c herrührt, der Null gleich. Dann sind y, ∂y_x und $\partial^2 y_x$ jetzt der Form nach genau dieselben, wie wenn a, b, c constant wären, während man außerdem noch zur Bestimmung von a, b, c angenommen hat die beiden Gleichungen

4) $S_x\cdot\partial a_x + T_x\cdot\partial b_x + U_x\cdot\partial c_x = 0$

und

5) $\partial S_x\cdot\partial a_x + \partial T_x\cdot\partial b_x + \partial U_x\cdot\partial c_x = 0$,

eine Annahme, die man deshalb machen konnte, weil man drei Unbekannte a, b, c hat, die nur einer einzigen, nämlich der Differential-Gleichung 3') zu genügen haben. — Differenziirt man aber nun die zuletzt erhaltene Gleichung

$$\partial^2 y_x = a\cdot\partial^2 S_x + b\cdot\partial^2 T_x + c\cdot\partial^2 U_x$$

noch einmal, so erhält man

$$\partial^3 y_x = (\partial^3 y_x) + \partial^2 S_x\cdot\partial a_x + \partial^2 T_x\cdot\partial b_x + \partial^2 U_x\cdot\partial c_x,$$

§. 42.

Integration der lineären Gleichungen.

Wir kommen jetzt zu einer Integrations-Methode, w für Gleichungen aller Ordnungen versucht werden kann; l lich zur „Methode der unbestimmten Koefficienten". Wenn man nämlich die Form des Integrals aus irgend E den vermuthet, ahnet, voraussieht, oder aufs Geradewohl aussetzt, so braucht man nur noch die verschiedenen Koeffi ten dergestalt zu bestimmen: 1) daß der gegebenen Differen Gleichung genügt wird, und 2) daß das Integral die nö Anzahl unbestimmter, sogenannter willkührlicher Constanten hält; dann hat man das allgemeine Integral.

Als Beispiel der Anwendung dieser Methode nehmen die lineären Gleichungen, d. h. die Gleichungen von Form

a) $\partial y_x + P_x \cdot y = \varphi_x;$

b) $\partial^2 y_x + P_x \cdot \partial y_x + Q_x \cdot y = \varphi_x;$

c) $\partial^3 y_x + P_x \cdot \partial^2 y_x + Q_x \cdot \partial y_x + R_x \cdot y = \varphi_x;$

u. s. w. f.; wo die Koefficienten P, Q, R, S etc. etc. ur bloß x, aber nicht y enthalten.

Diese lineären Gleichungen heißen reducirte, so oft φ_x ist; außerdem werden sie vollständige genannt.

A. Die lineäre Gleichung der ersten Ordnung, nämlich

1) $\partial y_x + P_x \cdot y = \varphi_x$

ist bereits früher (im §. 40. IV. C.) integrirt worden, und hat ihr Integral so gefunden

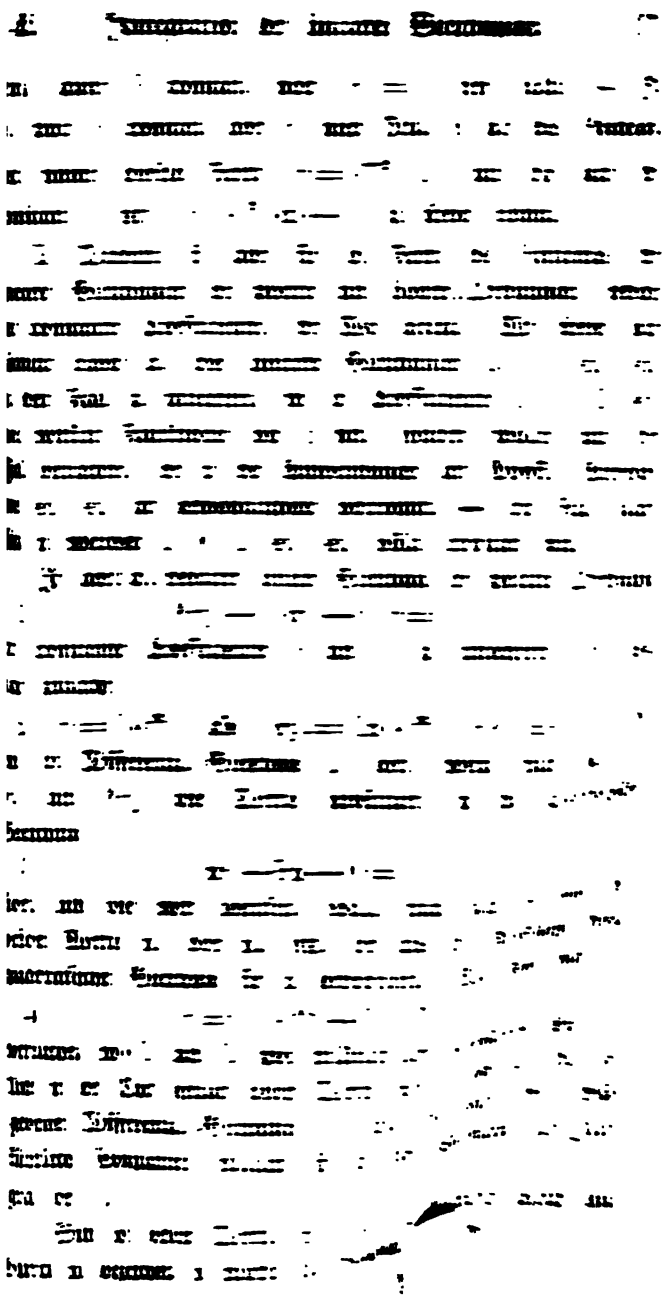
2) $y = e^{-\int P \cdot dx} \cdot [\int \varphi_x \cdot e^{\int P \cdot dx} \cdot dx + C].$

Ist jedoch der Koefficient P constant (nach x), so $\int P \cdot dx = Px$ ist, so nimmt dieses Integral die Form an

3) $y = e^{-Px} \cdot [\int \varphi_x \cdot e^{Px} \cdot dx + C],$

und reducirt sich bloß auf

4) $y = [illegible] e^{-Px}.$



5) $y = (C_1 + C_2)e^{mx} = C \cdot e^{mx}$

übergehen, und nicht mehr zwei Conſtanten enthalten. In dieſem beſonderen Falle zeigt ſich aber das allgemeine Integral ſo:

6) $y = e^{mx} \cdot (a + bx)$,

wo a und b die beiden eingehenden willkührlichen Conſtanten vorſtellen *).

Sind die beiden Werthe m_1 und m_2 imaginär, der eine alſo $= p + qi$, der andere dann $= p - qi$, wo p und q dieſelben Werthe vorſtellen, ſo geht

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

vermöge der Formeln I. Bd. §. 70. III. IV.) über in

7) $y = e^{px} \cdot (a \cos qx + b \sin qx)$,

wenn man ſtatt $C_1 + C_2$ lieber a, und ſtatt $i(C_1 - C_2)$ lieber b ſchreibt, ſo daß a und b die beiden willkührlichen Conſtanten vorſtellen. — Dieſem Integral 7.) kann man aber auch dieſe Form geben

8) $y = Ce^{px} \cdot \sin(qx + \xi)$ oder $y = Ce^{px} \cdot \cos(qx + \xi)$,

wo jetzt C und ξ die beiden willkührlichen Conſtanten ſind, in ſo fern man nämlich (in 7.) entweder

$$a = C \cdot \sin \xi \quad \text{und} \quad b = C \cdot \cos \xi$$

oder

$$a = C \cdot \cos \xi \quad \text{und} \quad b = -C \cdot \sin \xi$$

nehmen kann, ſobald C und ξ jedesmal willkührlich conſtant gedacht werden.

So viel vom Integral der reducirten lineären Gleichung der zweiten Ordnung mit conſtanten Koefficienten P und Q. —

---

*) Man findet dies, wenn man anfänglich $m_1 = m$ und $m_2 = m + h$ ſetzt, dann $e^{m_2 x}$ in $e^{mx} \cdot e^{hx}$, d. h. in $e^{mx}\left(1 + hx + \frac{h^2x^2}{2!} + \cdots\right)$ verwandelt, dadurch die Gleichung 5.) in

$$y = e^{mx}\left(C_1 + C_2 + C_2 h \cdot x + C_2 \cdot \frac{h^2x^2}{2!} + \cdots\right)$$

umformt, dann a ſtatt $C_1 + C_2$ und b ſtatt $C_2 h$ ſetzt, zuletzt aber erſt $h = 0$ nimmt.

Wären aber dieſe Koefficienten P und Q nicht conſtant, ſondern Funktionen von x, ſo würde doch das Integral der reducirten Gleichung

$$1') \qquad \partial^2 y_x + P \cdot \partial y_x + Q \cdot y = 0$$

die Form

$$2') \qquad y = a \cdot R_x + b \cdot S_x$$

annehmen *).

---

*) Sucht man nämlich den integrirenden Faktor z der Gleichung 1'.), ſo nimmt ſolche die Form

$$z \cdot \partial^2 y_x + Pz \cdot \partial y_x + Qzy = 0$$

an. Integrirt man aber jedes Glied dieſer Gleichung, und zwar die beiden erſtern theilweiſe, ſo erhält man

$$\int z \cdot \partial^2 y_x \cdot dx = z \cdot \partial y_x - \int \partial z_x \cdot \partial y_x \cdot dx,$$

oder, indem man hier zur Rechten noch einmal theilweiſe integrirt,

$$\int z \cdot \partial^2 y_x \cdot dx = z \cdot \partial y_x - \partial z_x \cdot y + \int y \cdot \partial^2 z_x \cdot dz.$$

Ferner

$$\int zP \cdot \partial y_x \cdot dx = zPy - \int y \cdot \partial (zP)_x \cdot dx,$$

$$\int zQy \cdot dx = \int y \cdot zQ \cdot dx.$$

Addirt man aber dieſe drei letztern Gleichungen, und nimmt man ſtatt z eine ſolche Funktion bloß von x, daß rechts die Summe der drei unter dem Integral-Zeichen ſtehenden Ausdrücke der Null gleich wird, ſo erhält man als Integral der Gleichung 1'.) ſogleich

$$z \cdot \partial y_x - (\partial z_x - zP) y = c$$

oder

$$\partial y_x - \frac{\partial z_x - zP}{z_x} \cdot y = \frac{c}{z_x}.$$

Und da dieſe Gleichung lineär und von der erſten Ordnung iſt, ſo iſt ihr Integral bereits gefunden. — Dieſe Integrations-Methode ſetzt voraus, daß es gelingt, Verſuchsweiſe einen Werth z_x zu finden, welcher der Gleichung

$$\partial^2 z_x - \partial (zP)_x + zQ = 0$$

genügt.

Findet man dagegen verſuchsweiſe eine Funktion von x, welche ſtatt y geſetzt der Gleichung

$$\partial^2 y_x + P \cdot \partial y_x + Q \cdot y = 0$$

genügt, ſo kann man ſolche ſtatt R_x nehmen; und kann man dann noch eine zweite Funktion von x finden, von der erſtern R_x und auch von $C_1 R_x$ verſchieden, welche dieſelbe Eigenſchaft hat, ſo kann man ſolche ſtatt S_x nehmen; und $y = C_1 R_x + C_2 S_x$ iſt dann das geſuchte allgemeine Integral der gegebenen Differential-Gleichung.

So oft es aber gelingt, die reducirte lineäre Gleichung der zweiten Ordnung zu integriren, d. h. von der Gleichung 1′.) das Integral 2′.) herzuſtellen, ſo oft kann man das Integral der vollſtändigen lineären Gleichung der zweiten Ordnung, nämlich der Gleichung

3′) $$\partial^2 y_x + P\cdot\partial y_x + Q\cdot y = \varphi_x,$$

ohne weiteres durch folgendes Verfahren finden, welches wir, wie ſo vieles, dem Lagrange verdanken.

Man nimmt nämlich auch jetzt noch

4′) $$y = a\cdot R_x + b\cdot S_x,$$

nur daß man ſich a und b als noch zu ſuchende Funktionen von x denkt, während R_x und S_x die in 2′.) bereits gefundenen, alſo nun bekannten Funktionen von x vorſtellen. Differenziirt man aber dieſe Gleichung 4′.), ſo erhält man

5′) $$\partial y_x = (\partial y_x) + [R_x\cdot\partial a_x + S_x\cdot\partial b_x],$$

wenn (∂y_x) die Ableitung deſſelben y (in 4′.) bedeutet, die man unter der Vorausſetzung erhält, daß a und b conſtant ſind.

Da nun zwei Funktionen a_x und b_x geſucht werden, und nur der einzigen Gleichung 3′.) zu genügen iſt, ſo kann man noch eine beliebige Annahme machen; und wir ſetzen daher den in 5′.) zur Rechten in den eckigen Klammern befindlichen Theil der Null gleich. Dies giebt

6′) $$R_x\cdot\partial a_x + S_x\cdot\partial b_x = 0$$

und

7′) $$\partial y_x = (\partial y_x) \quad \text{d. h.} \quad \partial y_x = a\cdot\partial R_x + b\cdot\partial S_x.$$

Differenziirt man aber dieſe Gleichung 7′.) nun noch einmal, ſo ergiebt ſich

8′) $$\partial^2 y_x = (\partial^2 y_x) + \partial R_x\cdot\partial a_x + \partial S_x\cdot\partial b_x,$$

wenn $(\partial^2 y_x)$ die zweite Ableitung deſſelben y (in 4′.) bedeutet, die man unter der Vorausſetzung erhält, daß a und b conſtant ſind. Subſtituirt man aber dieſe Werthe aus 4′.), 7′.) und 8′.) ſtatt y, ∂y_x und $\partial^2 y_x$ in die gegebene Differential-Gleichung

4'.), so wird die Gleichung, wegen $(\partial^2 y_x)+P\cdot(\partial y_x)+Q\cdot y=0$, die nachstehende, nämlich:

9') $$\partial R_x\cdot\partial a_x+\partial S_x\cdot\partial b_x=\varphi_x.$$

Die beiden Gleichungen 6'.) und 9'.) geben nun auf algebraischem Wege ∂a_x und ∂b_x in x ausgedrückt, und wenn man diese Funktionen von x noch integrirt, so hat man a_x und b_x, so wie sie gesucht werden, während jede dieser letztern beiden Funktionen von x noch eine willkührliche Constante in sich aufnimmt, so daß das Integral 4'.) auch zwei willkührliche Constanten in sich schließt, und daher wiederum das allgemeine Integral ist.

Sind die Koefficienten P und Q constant, so ist, wenn die beiden Werthe m_1 und m_2 von m, welche der quadratischen Gleichung

$$m^2+Pm+Q=0$$

genügen, reell und ungleich sind,

$$R_x=e^{m_1 x} \quad \text{und} \quad S_x=e^{m_2 x}$$

zu nehmen. Sind aber die beiden Werthe m_1 und m_2 einander gleich und gleich m, so muß

$$R_x=e^{mx} \quad \text{und} \quad S_x=x\cdot e^{mx}$$

genommen werden. Und sind die beiden Werthe m_1 und m_2 imaginär und $=p\pm qi$, so muß man

$$R_x=e^{px}\cdot cos\, qx \quad \text{und} \quad S_x=e^{px}\cdot sin\, qx$$

nehmen.

C. Betrachten wir noch die lineären Gleichungen der dritten Ordnung mit constanten Koefficienten.

Hat man zuerst die reducirte Gleichung

1) $$\partial^3 y_x+P\cdot\partial^2 y_x+Q\cdot\partial y_x+Ry=0,$$

so setzt man

$$y=C\cdot e^{mx},$$

also

$$\partial y_x=Cm\cdot e^{mx},\quad \partial^2 y_x=Cm^2\cdot e^{mx},\quad \partial^3 y_x=Cm^3\cdot e^{mx},$$

und die gegebene Differential-Gleichung 1.) geht, wenn man diese Werthe statt y, ∂y_x, $\partial^2 y_x$ und $\partial^3 y_x$ substituirt, über in die algebraische Gleichung des dritten Grades

2) $$m^3+Pm^2+Qm+R=0.$$

Löſt man dieſe nach m algebraiſch auf, und ſind m_1, m_2 die drei Werthe von m, ſo ſind $C_1e^{m_1x}$, $C_2e^{m_2x}$, C drei beſondere Ur-Integrale der 1.); dagegen weißt ſich m

3) $$y=C_1e^{m_1x}+C_2e^{m_2x}+C_3e^{m_3x}$$

als das allgemeine Ur-Integral derſelben Differential-Glei aus, einmal, weil dieſer Werth von y die Gleichung 1.) lich identiſch macht, und dann, weil ſolcher drei willkü Conſtanten enthält.

Sind zwei der Werthe z. B. m_1 und m_2, einander ſo wird das Integral ſo

4) $$y=e^{m_1x}(a+bx)+C_3e^{m_3x},$$

wo a, b und C_3 die drei willkührlichen Conſtanten ſind.

Sind aber alle drei Werthe von m einander gleich durch m vorgeſtellt, ſo iſt das allgemeine Integral ſo

5) $$y=e^{mx}(a+bx+cx^2),$$

wo die drei willkührlichen Conſtanten durch a, b und c gedrückt werden.

Sind endlich zwei der drei Werthe von m imaginär $m_1=p+qi$ und $m_2=p-qi$, ſo nimmt das In auch noch die Form

6) $$y=e^{px}(a\cdot cos\,qx+b\cdot sin\,qx)+C_3e^{m_3x},$$

oder auch die Form

7) $$y=a\cdot e^{px}\cdot cos\,(qx+\xi)+C_3e^{m_3x},$$

oder endlich auch die Form

8) $$y=a\cdot e^{px}\cdot sin\,(qx+\xi)+C_3e^{m_3x}$$

an.

So weit die Integration der reducirten Gleichung mit ſtanten Koefficienten. Könnte man letztere aber auch fü Fall integriren, daß P, Q, R wirklich Funktionen von x ſo würde ihr Integral doch immer die Form

1') $$y=aS_x+bT_x+cU_x$$

annehmen, wie wenn P, Q, R constant sind, und solches würde also die reducirte Gleichung

$$2') \qquad \partial^3 y_x + P\cdot\partial^2 y_x + Q\cdot\partial y_x + Ry = 0$$

identisch machen.

Ist aber dann die vollständige Gleichung der dritten Ordnung

$$3') \qquad \partial^3 y_x + P\cdot\partial^2 y_x + Q\cdot\partial y_x + Ry = \varphi_x$$

zu integriren, so kann man sogleich wieder die Methode des Lagrange anwenden, welche wir bei den Gleichungen der zweiten Ordnung bereits beschrieben haben, und welche den Namen der „Methode der Variation der Constanten" erhalten hat. — Man nimmt nämlich an, daß das Integral der Gleichung 3'.) dieselbe Form 1'.) hat, wie das Integral der reducirten Gleichung 2'.), nur daß a, b, c noch Funktionen von x sind, welche gesucht werden müssen.

Zu diesem Behufe differenziirt man die Gleichung 1'.) einmal, setzt aber den Theil der von der Veränderlichkeit der a, b, c herrührt, der Null gleich; dann differenziirt man die neue Gleichung noch einmal, und setzt wieder den Theil, der von der Veränderlichkeit der a, b, c herrührt, der Null gleich. Dann sind y, ∂y_x und $\partial^2 y_x$ jetzt der Form nach genau dieselben, wie wenn a, b, c constant wären, während man außerdem noch zur Bestimmung von a, b, c angenommen hat die beiden Gleichungen

$$4') \qquad S_x\cdot\partial a_x + T_x\cdot\partial b_x + U_x\cdot\partial c_x = 0$$

und

$$5') \qquad \partial S_x\cdot\partial a_x + \partial T_x\cdot\partial b_x + \partial U_x\cdot\partial c_x = 0,$$

eine Annahme, die man deshalb machen konnte, weil man drei Unbekannte a, b, c hat, die nur einer einzigen, nämlich der Differential-Gleichung 3'.) zu genügen haben. — Differenziirt man aber nun die zuletzt erhaltene Gleichung

$$\partial^2 y_x = a\cdot\partial^2 S_x + b\cdot\partial^2 T_x + c\cdot\partial^2 U_x$$

noch einmal, so erhält man

$$\partial^3 y_x = (\partial^3 y_x) + \partial^2 S_x\cdot\partial a_x + \partial^2 T_x\cdot\partial b_x + \partial^2 U_x\cdot\partial c_x,$$

wo $(\partial^3 y_x)$ diesen dritten Differential-Koefficienten von y vorstellt, unter der Voraussetzung, daß a, b, c constant sind. — Substituirt man nun diese Werthe statt y, ∂y_x, $\partial^2 y_x$ und $\partial^3 y_x$ in die Gleichung 3′.), so geht solche, wegen

$$(\partial^3 y_x)+P\cdot(\partial^2 y_x)+Q\cdot(\partial y_x)+Ry=0,$$

über in

$$6') \qquad \partial^2 S_x\cdot\partial a_x+\partial^2 T_x\cdot\partial b_x+\partial^2 U_x\cdot\partial c_x=\varphi_x.$$

Aus den drei Gleichungen 4′.), 5′.) und 6′.) läßt sich nun ∂a_x, ∂b_x und ∂c_x auf dem Wege der gemeinen Algebra leicht finden, in x ausgedrückt; und dann darf man diese für ∂a_x, ∂b_x und ∂c_x erhaltenen Funktionen von x nur noch nach x integriren, um die Koefficienten a, b, c in x ausgedrückt zu haben, und jeden noch mit einer willkührlichen Constante, so daß, wenn man diese Werthe statt a, b, c in die Gleichung 1′.) setzt, das allgemeine Ur-Integral der Gleichung

$$\partial^3 y_x+P\cdot\partial^2 y_x+Q\cdot\partial y_x+Ry=\varphi_x$$

mit den drei willkührlichen Constanten wirklich gefunden ist.

Anmerkung. Es ist leicht, das alles auf die lineären Gleichungen der n^{ten} Ordnung auszudehnen.

Hätte man aber die lineäre Gleichung z. B. der dritten Ordnung

$$(a+bx)^3\cdot\partial^3 y_x+(a+bx)^2 P\cdot\partial^2 y_x+(a+bx)Q\cdot\partial y_x+Ry=0,$$

so könnte man $a+bx=t$, also $\partial y_x=\partial y_t\cdot\partial t_x=b\cdot\partial y_t$, $\partial^2 y_x=b^2\cdot\partial^2 y_t$, $\partial^3 y_x=b^3\cdot\partial^3 y_t$ setzen und die Gleichung würde die Form annehmen

$$b^3t^3\cdot\partial^3 y_t+b^2t^2P\cdot\partial^2 y_t+btQ\cdot\partial y_t+Ry=0.$$

Setzte man nun $y=t^m$, also $\partial y_t=mt^{m-1}$, $\partial^2 y_t=m(m-1)t^{m-2}$ und $\partial^3 y_t=m(m-1)(m-2)t^{m-3}$; so würde dieselbe Gleichung übergehen in

$$b^3m(m-1)(m-2)+b^2Pm(m-1)+bQm+R=0.$$

Löst man nun diese nach m kubische Gleichung algebraisch

auf, und sind m_1, m_2, m_3 die drei Werthe von m, welche man daraus erhält, so ist

$$y = C_1(a+bx)^{m_1} + C_2(a+bx)^{m_2} + C_3(a+bx)^{m_3}$$

das vollständige Ur-Integral der gegebenen Differential-Gleichung der dritten Ordnung mit diesen veränderlichen Koefficienten.

§. 43.

Integration von m totalen Differential-Gleichungen zwischen m+1 Veränderlichen.

Sind zwei Gleichungen zwischen drei Veränderlichen t, x und y gegeben, welche auch noch die Ableitungen ∂x_t, ∂y_t, $\partial^2 x_t$, $\partial^2 y_t$ etc. etc. zweier der Veränderlichen nach dem dritten enthalten, so kann man, um daraus x und y selbst als Funktionen von t zu finden, zwei verschiedene Wege betreten.

I. Erstens kann man nämlich es versuchen, jede der beiden Gleichungen direkt zu integriren, ohne vorher einen der Veränderlichen wegzuschaffen, entweder in so fern sie den Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität genügen, — wie z. B. die Gleichung

$$T_t + X_x \cdot \partial x_t + Y_y \cdot \partial y_t = 0,$$

welche, integrirt, sogleich

$$\int T \cdot dt + \int X \cdot dx + \int Y \cdot dy = c$$

liefert, — oder, weil sie mittelst eines integrirenden Faktors leicht integrabel gemacht werden kann, wie z. B. die Gleichung

$$\partial x_t \cdot \partial^2 y_t - \partial y_t \cdot \partial^2 x_t = 0,$$

welche, wenn man sie mit $\frac{1}{\partial x_t^2}$ multiplicirt, in

$$\frac{\partial x_t \cdot \partial^2 y_t - \partial y_t \cdot \partial^2 x_t}{\partial x_t^2} = 0$$

übergeht, während der Ausdruck links nun integrabel ist, so daß das Integral dieser Gleichung das nachstehende, nämlich

$$\frac{\partial y_t}{\partial x_t} = c$$

wird.

Sind nun beide gegebene Gleichungen nach ∂x_t und ∂y_t von der ersten Ordnung, und integrirt man jede derselben auf dem so eben beschriebenen Wege, so erhält man sogleich zwei Ur-Gleichungen zwischen x, y und t, aus denen dann auf algebraischem Wege x und y als Funktionen von t (oder t und y als Funktionen von x, oder t und x als Funktionen von y) gefunden werden.

Sind z. B. die beiden Gleichungen zu integriren

$$\begin{cases} 1) & x+y\cdot\partial y_x+z\cdot\partial z_x=0 \\ 2) & m\cdot\partial y_x+n\cdot\partial z_x=1, \end{cases}$$

so giebt die erstere sogleich

$$3) \qquad x^2+y^2+z^2=r^2,$$

wenn man die Constante durch $\frac{1}{2}r^2$ ausdrückt. Die andere Gleichung giebt dagegen, wenn man sie direkt integrirt, sogleich

$$4) \qquad my+nz=x+c.$$

Diese beiden Gleichungen 3.) und 4.) geben nun y und z in x*).

II. Die zweite Methode besteht darin, daß man aus beiden Gleichungen, x und alle Ableitungen von x eliminirt, und dadurch eine Gleichung bloß zwischen zwei Veränderlichen y und t (und ∂y_t, $\partial^2 y_t$, ···) sich verschafft, diese aber dann nach einer der früher beschriebenen Methoden zu integriren versucht.

Das Elimininen hier, unterscheidet sich aber von dem Eliminiren in der Algebra, bloß dadurch, daß man hier außer x, auch noch alle seine Ableitungen ∂x_t, $\partial^2 x_t$ etc. etc., die in den beiden gegebenen Differential-Gleichungen vorkommen, mit wegschaffen muß, daß man also eine größere Anzahl von Gleichungen braucht, um alles elimininen zu können. Diese fehlenden Gleichungen verschafft man sich aber dadurch, daß man

*) Sind z. B. x, y, z Koordinaten-Werthe, die sich auf drei auf einander senkrechte Axen beziehen, so entspricht die Gleichung 3.) einer Kugel, die Gleichung 4.) dagegen einer Ebene und beide Gleichungen in Verbindung gehören dem Kreise an, der als Durchschnittsfigur dieser Kugel mit dieser Ebene hervorgeht, wenn die Lage der beiden letztern Flächen so ist, daß wirklich ein Durchschnitt statt findet.

jede der beiden gegebenen Differential-Gleichungen noch wiederholt differenziirt. Dadurch erhält man immer neue und neue Paare von Gleichungen, während in jedem neuen Paar ein einziger neuer höherer Differential-Koefficient von x nach t eingeht. Auf diese Weise hat man bald mehr Gleichungen als zu eliminirende Ausdrücke, uud dem Eliminiren stehen also keine anderen Hindernisse mehr entgegen, als diejenigen, welche die Algebra selbst darbietet.

Es seyen z. B. gegeben die beiden Gleichungen

1) $$\partial^2 x_t = -m \cdot \partial y_t,$$

2) $$\partial^2 y_t = -gx - m \cdot \partial x_t;$$

und es sollen nun sowohl x als auch alle Ableitungen ∂x_t, $\partial^2 x_t$, etc, etc. eliminirt werden.

Differenziirt man die Gleichung 2.) nach allem t, so erhält man

3) $$\partial^3 y_t = -g \cdot \partial x_t - m \cdot \partial^2 x_t.$$

Nun hat man drei Gleichungen, aber auch drei zu eliminirende Ausdrücke, nämlich x, ∂x_t und $\partial^2 x_t$. — Man muß daher jede der beiden Gleichungen 1.) und 3.) noch einmal nach allem t differenziiren; dann erhält man

4) $$\partial^3 x_t = -m \cdot \partial^2 y_t;$$

5) $$\partial^4 y_t = -g \cdot \partial^2 x_t - m \cdot \partial^3 x_t.$$

Nun haben wir fünf Gleichungen, aus denen die vier Ausdrücke x, ∂x_t, $\partial^2 x_t$ und $\partial^3 x_t$ ohne Weiteres (auf algebraischem Wege) sich eliminiren lassen. Man erhält zuletzt als Resultat der Elimination (wozu man bloß die Gleichungen 1.), 3.), 4.) und 5.) zu nehmen braucht, welche alle schon nicht mehr x selbst haben, und aus welchen also nur noch ∂x_t, $\partial^2 x_t$ und $\partial^3 x_t$ eliminirt wird) die Gleichung

6) $$\partial^4 y_t = gm \cdot \partial y_t + m^2 \cdot \partial^2 y_t;$$

und diese hat weder x noch irgend eine Ableitung von x.

Ist aber x nebst allen Ableitungen desselben eliminirt, und die entstehende Gleichung zwischen y und t integrirt, und hat das Integral alle willkührlichen Constanten aufgenommen, die es aufnehmen kann, so substituirt man diesen Ausdruck für y und die zugehörigen Ausdrücke für ∂y_t, $\partial^2 y_t$ etc. etc. in die übrigen Gleichungen und eliminirt dann aus letzteren ∂x_t, $\partial^2 x_t$ etc. etc., so daß nur noch x selbst darin bleibt. So bekommt

man also zuletzt x selbst in t und in dieselben willkührlichen Constanten ausgedrückt, ohne auf's Neue integriren zu müssen, also auch ohne neue willkührliche Constanten.

Anmerkung 1. Bei dem Eliminiren kann auch ein Fall eintreten, den wir am Besten im folgenden Beispiele aus einander setzen.

Es sey nämlich aus den beiden Gleichungen

1) $$\partial^2 x_t = -m \cdot \partial x_t \cdot \sqrt{\partial x_t^2 + \partial y_t^2}$$

und

2) $$\partial^2 y_t = -g - m \cdot \partial y_t \cdot \sqrt{\partial x_t^2 + \partial y_t^2}$$

der Veränderliche t zu eliminiren, derselbe, nach welchem die Ableitungen von x und y genommen sind, so daß man eine Endgleichung zwischen x und y und ∂y_x, $\partial^2 y_x$ etc. etc., oder eine Endgleichung zwischen x, y und ∂x_y, $\partial^2 x_y$ etc. etc. verlangt.

Um diese und ähnliche Aufgaben zu lösen, muß man zuerst (nach I. Bd. §. 155.) die Unabhängigkeit des Veränderlichen t auf einen andern der Veränderlichen, z. B. auf x, übertragen. Man nimmt daher (nach dem angeführten Paragraphen)

$$\partial y_t = \partial y_x \cdot \partial x_t,$$
$$\partial^2 y_t = \partial^2 y_x \cdot \partial x_t^2 + \partial y_x \cdot \partial^2 x_t,$$

und substituirt diese Werthe statt ∂y_t und $\partial^2 y_t$ in die gegebenen Gleichungen 1.) und 2.), und man erhält

3) $$\partial^2 x_t = -m \cdot \partial x_t^2 \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2}$$

und

$$\partial^2 y_x \cdot \partial x_t^2 + \partial y_x \cdot \partial^2 x_t = -g - m \cdot \partial y_x \cdot \partial x_t^2 \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2},$$

welche letztere Gleichung jedoch, wenn man statt $\partial^2 x_t$ sogleich seinen Werth (aus 3.) substituirt, viel einfacher so wird, nämlich:

4) $$\partial^2 y_x \cdot \partial x_t^2 = -g.$$

Aus diesen Gleichungen 3.) und 4.) muß man nun noch alle Differential-Koefficienten von x nach t eliminiren.

Zu dem Ende differenziirt man diese Gleichungen nach t, beachtet jedoch dabei, daß y, ∂y_x, $\partial^2 y_x$ etc. etc. als Funktionen von x, nach der Formel

$$\partial(\varphi_x)_t = \partial\varphi_x \cdot \partial x_t,$$

behandelt werden müssen, so daß also $\partial(\partial y_x)_t = \partial^2 y_x \cdot \partial x_t$, $\partial(\partial^2 y_x)_t = \partial^3 y_x \cdot \partial x_t$, etc. etc. zu nehmen ist. Geschieht dies hier zunächst bloß bei der Gleichung 4.), so erhält man

$$\partial^3 y_x \cdot \partial x_t^3 + 2\partial^2 y_x \cdot \partial x_t \cdot \partial^2 x_t = 0$$

oder

5) $$\partial^3 y_x \cdot \partial x_t^2 + 2\partial^2 y_x \cdot \partial^2 x_t = 0;$$

und nun hat man schon Gleichungen genug, um (aus 3., 4. und 5.) sowohl ∂x_t als $\partial^2 x_t$ eliminiren zu können. Man erhält zuletzt als Endresultat

6) $$\partial^3 y_x - 2m \cdot \partial^2 y_x \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2} = 0;$$

welche Gleichung von dem Veränderlichen t keine Spur mehr hat.

Das Verfahren im Allgemeinen leuchtet aus diesem Beispiele hervor. Man substituirt zuerst die Werthe für ∂y_t, $\partial^2 y_t$, $\partial^3 y_t$ etc. etc., man differenziirt dann die Gleichungen nach allem t, indem man jedoch

$$\partial(\partial y_x)_t = \partial^2 y_x \cdot \partial x_t, \quad \partial(\partial^2 y_x)_t = \partial^3 y_x \cdot \partial x_t, \text{ etc. etc.}$$

setzt; und man eliminirt zuletzt, wenn man genug Gleichungen (durch fortgesetztes Differenziiren) sich verschafft hat, sowohl t selbst (was in dem vorliegenden Beispiel gar nicht vorkam) als auch die noch vorhandenen Differential-Koeffizienten ∂x_t, $\partial^2 x_t$, $\partial^3 x_t$ etc. etc.

Anmerkung 2. Es ist leicht, diese Methoden, auf die Integration von m Gleichungen zwischen m+1 Veränderlichen, — namentlich aber auch das Eliminiren der Veränderlichen nebst ihren Ableitungen auf beliebig viel gegebene Gleichungen auszudehnen. Wir geben daher nur noch ein einziges Eliminations-Beispiel.

Man habe nämlich gegeben die vier Gleichungen

1) $\partial^2 x_t = y^2$; 2) $\partial^2 y_t = x^2$;

3) $x = r \cdot \cos v$; 4) $y = r \cdot \sin v$;

und es sollen eliminirt werden x und y, aber auch alle Ableitungen von x und y nach t, so daß zwei Gleichungen als Endresultat hervorgehen, zwischen r, v und t und den Ableitungen von r und v nach t.

Da die Differentiation der Gleichungen 1.) und 2.) nach t, allemal eben so viel neue, wieder zu eliminirende Ausdrücke einführen würde, als man dadurch neue Gleichungen erhielte, so werden wir dasmal bloß die Gleichungen 3.) und 4.) hinter einander nach t differenziiren; und wir erhalten zunächst

5) $\partial x_t = -r \cdot \sin v \cdot \partial v_t + \partial r_t \cdot \cos v,$

6) $\partial y_t = r \cdot \cos v \cdot \partial v_t + \partial r_t \cdot \sin v;$

und diese, noch einmal nach allem t differenziirt, geben

7) $\partial^2 x_t = -r \cdot \cos v \cdot \partial v_t^2 - 2 \sin v \cdot \partial r_t \cdot \partial v_t + \partial^2 r_t \cdot \cos v - r \cdot \sin v \cdot \partial^2 v_t;$

8) $\partial^2 y_t = -r \cdot \sin v \cdot \partial v_t^2 + 2 \cos v \cdot \partial r_t \cdot \partial v_t + \partial^2 r_t \cdot \sin v + r \cdot \cos v \cdot \partial^2 v_t.$

Aus den sechs Gleichungen (1—4. und 7. 8.) kann man nun die vier Ausdrücke x, y, $\partial^2 x_t$ und $\partial^2 x_t$ eliminiren; und man erhält als Endresultat die beiden Gleichungen

$$r^2 \cdot \cos v^2 = -r \cdot \cos v \cdot \partial v_t^2 - 2 \sin v \cdot \partial r_t \cdot \partial v_t + \partial^2 r_t \cdot \cos v - r \cdot \sin v \cdot \partial^2 v_t;$$

$$r^2 \cdot \sin v^2 = -r \cdot \sin v \cdot \partial v_t^2 + 2 \cos v \cdot \partial r_t \cdot \partial v_t + \partial^2 r_t \cdot \sin v + r \cdot \cos v \cdot \partial^2 v_t;$$

welche durchaus nichts mehr enthalten, was an das Daseyn von x und y erinnern könnte *).

Anmerkung 3. Die in der gemeinen Algebra schon gegebene Regel, daß man nämlich aus den gegebenen Gleichungen durch algebraische Kombinationen erst neue und bequemere Gleichungen bildet, ehe man an das weitere Geschäft des Auflösens (oder Integrirens) geht, findet natürlich auch hier statt. —

Hat man z. B. die Gleichungen

1) $\partial^2 x_t = X_{x,y}$ und 2) $\partial^2 y_t = Y_{x,y}$

*) Wäre vorausgesetzt gewesen, daß r kein t enthält, daß also $\partial r_t = 0$ und $\partial^2 r_t = 0$ ist, so wären diese beiden End-Gleichungen viel einfacher geworden. In den Gleichungen 5.)—8.) wären schon alle die Glieder nicht eingegangen, welche von der Veränderlichkeit des r herrühren, und man hätte diese End-Gleichungen erhalten, nämlich:

$$r \cdot \cos v^2 = -\cos v \cdot \partial v_t^2 - \sin v \cdot \partial^2 v_t$$

$$r \cdot \sin v^2 = -\sin v \cdot \partial v_t^2 + \cos v \cdot \partial^2 v_t.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ist es nun leicht, auch noch r fortzuschaffen, und so eine Gleichung bloß zwischen v und t übrig zu behalten.

Suchen wir auf dieſem Wege den ſingulären Werth der Differential-Gleichung

1) $$x \cdot \partial x_y + y + \sqrt{x^2+y^2-a^2} = 0.$$

Dieſe Gleichung, wenn man ſie noch einmal nach allem y differenziirt, giebt

2) $$x \cdot \partial^2 x_y + \partial x_y^2 + 1 + \frac{x \cdot \partial x_y + y}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}} = 0,$$

oder

3) $$\partial^2 x_y = -\frac{(\partial x_y^2+1)\sqrt{x^2+y^2-a^2} + x \cdot \partial x_y + y}{x \cdot \sqrt{x^2+y^2-a^2}}.$$

Setzt man nun den Nenner $=0$, ſo erhält man

4) $$x^2+y^2-a^2 = 0,$$

und dieſer Werth von x in y, macht auch den Zähler von $\partial^2 x_y$ in 3.) der Null gleich; folglich wird die Gleichung 4.) der ſinguläre Werth der gegebenen Differential-Gleichung 1.) ſeyn, wenn er nämlich überhaupt ihr genügt (was hier der Fall iſt) und wenn er nicht in dem allgemeinen Integral als ein beſonderes Integral ſteckt (was hier nicht der Fall iſt, wie wir dies von dem analogen Beiſpiel in I. bereits geſehen haben) *).

IV. Lagrange hat gelehrt, wie man den ſingulären Werth einer gegebenen Differential-Gleichung der erſten Ordnung auch aus derem allgemeinen Integrale

1) $$f_{x,y,a} = 0,$$

welches die willkührliche Conſtante a in ſich aufgenommen hat, finden könne. Da nämlich der ſinguläre Werth nie in dem allgemeinen Integrale ſteckt, ſo giebt es keinen conſtanten Werth von a, welcher bewirkte, daß $f_{x,y,a}=0$ der ſinguläre Werth würde, wohl aber wird dieſe Gleichung, wenn man ſtatt y ſeinen, aus dem ſingulären Werth gezogenen Ausdruck in x, ſubſtituirt, bloß a und x enthalten, alſo a als eine Funktion von x liefern. — Es kommt alſo darauf an, die Funktion von x zu finden, welche ſtatt a geſetzt werden muß, damit das allgemeine Integral $f_{x,y,a}=0$ in den ſingulären Werth übergehe.

*) Sucht man die ſingulären Werthe einer Differential-Gleichung der zweiten Ordnung, ſo findet man durch abermaliges Differenziiren $\partial^3 y_x$ oder $\partial^3 x_y$ und ſetzt ſolches $= \frac{0}{0}$.

§. 44.

Die d'Alembert'sche Methode zur Integration mehrerer gleichzeitig gegebenen linearen Differential-Gleichungen.

I. Sind gegeben die beiden lineären Gleichungen

1) $$M\cdot\partial u_t + N\cdot\partial x_t + Pu + Qx = R$$

und

2) $$M'\cdot\partial u_t + N'\cdot\partial x_t + P'u + Q'x = R',$$

so kann man sogleich von dem in der vorstehenden Anmerkung beschriebenen Verfahren Gebrauch machen, — aus diesen beiden Gleichungen abwechselnd ∂x_t und ∂u_t eliminiren, und so statt der gegebenen Gleichungen lieber diese neuen nehmen, welche die nachstehende Form haben werden, nämlich

3) $$\partial x_t + Pu + Qx = T$$

und

4) $$\partial u_t + P'u + Q'x = T'$$

wo P, Q, P', Q', T und T' Funktionen von t seyn werden, wenn auch andere als die in den ersteren Gleichungen durch dieselben Buchstaben vorgestellten.

Man multiplicirt nun, nach d'Alembert, um diese neuen Gleichungen 3.) und 4.) zu integriren, ohne den Weg der Elimination betreten zu wollen, die Gleichung 3.) mit

---

welche integrirt,

3') $$y = Cx$$

liefert. Dies Cx statt y und $C\cdot\partial x_t$ statt ∂y_t in die erstere (1'.) der Integral-Gleichungen substituirt giebt

$$\partial x_t^2 = x^2 - k^2, \quad \text{wenn man} \quad \frac{-c}{1+C^2} = k^2 \text{ setzt.}$$

Hieraus folgt

$$\partial t_x = \frac{1}{\sqrt{x^2-k^2}}, \quad \text{also} \quad C'+t = \int\frac{1}{\sqrt{x^2-k^2}}\cdot dx = log(x+\sqrt{x^2-k^2})$$

oder

4') $$x+\sqrt{x^2-k^2} = C_1\cdot e^t,$$

wo C, C_1 und k drei willkührliche Constanten sind. (Die vierte Constante c' haben wir $=0$ vorausgesetzt.)

einer unbestimmten Funktion θ von t, und addirt solche zur 4.). Dadurch erhält man, wenn noch statt u ein neuer Veränderlicher z eingeführt wird, mittelst der Gleichung

5) $u = z - \theta x$, also $\partial u_t = \partial z_t - x \cdot \partial\theta_t - \theta \cdot \partial x_t$,

dieses Resultat, nämlich:

6) $\left\{ \begin{matrix} \partial z_t + (P + P'\theta)z \\ -x(\partial\theta_t + (P + P'\theta)\theta - (Q + Q'\theta)) \end{matrix} \right\} = T + T'\theta.$

Da man nun über θ nach Belieben disponiren kann, so setzt man hier den Faktor von x der Null gleich. Dies giebt

7) $\partial z_t + (P + P'\theta)z = T + T'\theta,$

8) $\partial\theta_t + (P + P'\theta)\theta - (Q + Q'\theta) = 0.$

Kann man nun versuchsweise oder sonst wie, einen der Gleichung 8.) genügenden Werth von θ_t finden, so giebt die Gleichung 7.) sogleich z dazu, wodurch die Gleichung 5.) in eine Ur-Gleichung zwischen u und x und einer willkührlichen Constante übergeht. Findet man daraus u in x, und setzt man dies statt u in die Gleichung 3.), so erhält man eine neue lineäre Gleichung zwischen t, x und ∂x_t, welche, auf's Neue integrirt, noch x in t dazu liefert, mit der zweiten willkührlichen Constante.

Könnte man die Gleichung 8.) allgemein integriren, so daß θ schon eine willkührliche Constante in sich aufnähme, so würde man x aus der Gleichung 4.) ohne weitere Integration sich verschaffen, weil man dann schon die zwei willkührlichen Constanten hätte, welche durch das Integriren der beiden gegebenen Gleichungen 1.) und 2.) eingehen müssen *).

*) Man könnte, auch wenn θ bereits eine willkührliche Constante in sich aufgenommen hat, doch auch wiederum x aus der 3.) durch neue Integration finden wollen, so daß man nun eine dritte willkührliche Constante erhielte. Weil aber die Gleichung 4.) ebenfalls identisch werden muß, so würde man in solche statt x und u ihre Werthe in t substituiren, und dann würde sich alles t von selber wegheben, und eine Gleichung bloß zwischen den drei Constanten übrig bleiben, wodurch die eine in die beiden andern ausgedrückt sich sieht, also nicht mehr willkührlich ist.

§. 44.

Die d'Alembert'sche Methode zur Integration mehrerer gleichzeitig gegebenen linearen Differential-Gleichungen.

I. Sind gegeben die beiden lineären Gleichungen

1) $$M \cdot \partial u_t + N \cdot \partial x_t + Pu + Qx = R$$

und

2) $$M' \cdot \partial u_t + N' \cdot \partial x_t + P'u + Q'x = R',$$

so kann man sogleich von dem in der vorstehenden Anmerkung beschriebenen Verfahren Gebrauch machen, — aus diesen beiden Gleichungen abwechselnd ∂x_t und ∂u_t eliminiren, und so statt der gegebenen Gleichungen lieber diese neuen nehmen, welche die nachstehende Form haben werden, nämlich

3) $$\partial x_t + Pu + Qx = T$$

und

4) $$\partial u_t + P'u + Q'x = T'$$

wo P, Q, P', Q', T und T' Funktionen von t seyn werden, wenn auch andere als die in den ersteren Gleichungen durch dieselben Buchstaben vorgestellten.

Man multiplicirt nun, nach d'Alembert, um diese neuen Gleichungen 3.) und 4.) zu integriren, ohne den Weg der Elimination betreten zu wollen, die Gleichung 3.) mit

---

welche integrirt,

3') $$y = Cx$$

liefert. Dies Cx statt y und $C \cdot \partial x_t$ statt ∂y_t in die erstere (1'.) der Integral-Gleichungen substituirt giebt

$$\partial x_t^2 = x^2 - k^2, \quad \text{wenn man} \quad \frac{-c}{1+C^2} = k^2 \quad \text{setzt.}$$

Hieraus folgt

$$\partial t_x = \frac{1}{\sqrt{x^2-k^2}}, \quad \text{also} \quad C' + t = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-k^2}} \cdot dx = log(x + \sqrt{x^2-k^2})$$

oder

4') $$x + \sqrt{x^2-k^2} = C_1 \cdot e^t,$$

wo C, C_1 und k drei willkührliche Constanten sind. (Die vierte Constante c' haben wir $= 0$ vorausgesetzt.)

von x und von y der Null gleich setzen kann, weil man die Disposition über θ und θ' hat. Dadurch erhält man die drei Gleichungen

5) $\partial z_t + (P + P'\theta + P''\theta')z = T + T'\theta + T''\theta';$

6) $\partial\theta_t + (P + P'\theta + P''\theta')\theta - (Q + Q'\theta + Q''\theta') = 0;$

7) $\partial\theta'_t + (P + P'\theta + P''\theta')\theta' - (Q + Q'\theta + Q''\theta') = 0.$

Findet man nun Werthe von θ und θ', welche den Gleichungen 6.) und 7.) genügen, so giebt die Gleichung 5.) augenblicklich z dazu. — U. s. w. f.

Betrachten wir wieder den Fall, wo P, Q, R, P', Q', R' constant sind, so kann man den Gleichungen 6.) und 7.) genügen, wenn man $\partial\theta_t$ und $\partial\theta'_t$ der Null gleich, also θ und θ' constant und so nimmt, wie sie sich jetzt aus den Gleichungen 6.) und 7.) ergeben. Man erhält dann für θ und θ' kubische Gleichungen, und diese geben drei zusammengehörige Paare von Werthen von θ und θ', die wir durch θ_1, θ'_1 und θ_2, θ'_2, endlich θ_3, θ'_3 bezeichnen wollen. Die Gleichung 5.) giebt dann drei Werthe von z; die Gleichung 4.) giebt also nun drei Gleichungen zwischen u, x, y und t mit drei willkührlichen Constanten; und diese geben dann u, x, y in t ausgedrückt.

III. D'Alembert wendet dieses Verfahren auch auf lineäre Gleichungen höherer Ordnungen an, und wir wollen dies im folgenden Beispiel erläutern.

Sind z. B. gegeben die beiden Gleichungen der zweiten Ordnung

1) $\partial^2 u_t + A\cdot\partial u_t + B\cdot\partial x_t + Cu + Dx = T$

und

2) $\partial^2 x_t + A'\cdot\partial u_t + B'\cdot\partial x_t + C'u + D'x = T',$

so führt er zwei neue Veränderliche p und q ein mittelst der Gleichungen

3) $\partial u_t = p$ und 4) $\partial x_t = q.$

Dadurch hat er dann die vier Gleichungen

5) $\partial p_t + Ap + Bq + Cu + Dx = T$

6) $\partial q_t + A'p + B'q + C'u + D'x = T'$

7) $\partial u_t - p = 0$

8) $\partial x_t - q = 0.$

Sind P und Q, desgleichen P′ und Q′ constant, so kann man der Gleichung 8.) dadurch genügen, daß man $\partial\theta_t = 0$ setzt, und θ selbst aus der Gleichung

$$(P + P'\theta)\theta - Q + Q'\theta = 0$$

bestimmt. — Da diese Gleichung quadratisch ist, so erhält man für θ zwei Werthe, die wir durch θ_1 und θ_2 bezeichnen wollen. Bezeichnet man nun die zugehörigen Werthe von $P + P'\theta$ und $T + T'\theta$ bezüglich durch m_1, m_2 und T_1, T_2, so giebt die Gleichung 7.) diese zwei Gleichungen, nämlich

$$z = e^{-m_1 t}(\int e^{m_1 t} \cdot T_1 \cdot dt + C_1)$$

und

$$z = e^{-m_2 t}(\int e^{m_2 t} \cdot T_2 \cdot dt + C_2).$$

Und die Gleichung 5.) liefert nun auch diese zwei Gleichungen, nämlich

$$u + \theta_1 x = e^{-m_1 t}(\int e^{m_1 t} \cdot T_1 \cdot dt + C_1)$$

$$u + \theta_2 x = e^{-m_2 t}(\int e^{m_2 t} \cdot T_2 \cdot dt + C_2).$$

Auf diese Weise findet man sogleich u und x unmittelbar, ohne die Gleichung 3.) oder 4.) noch zu Hülfe nehmen zu müssen, weil die Gleichung 6.) zwei Gleichungen geliefert hat, welche die beiden Gleichungen 3.) und 4.) vollkommen ersetzen.

II. Hat man drei lineäre Gleichungen zwischen den vier Veränderlichen u, x, y und t, von der ersten Ordnung, so kann man sie auf die nachstehende Form bringen, nämlich

1) $\partial u_t + Pu + Qx + Ry = T,$

2) $\partial x_t + P'u + Q'x + R'y = T',$

3) $\partial y_t + P''u + Q''x + R''y = T''.$

Multiplicirt man nun die zweite mit θ, die dritte mit θ', addirt man solche zur ersten, und setzt man

4) $u + \theta x + \theta' y = z,$

also

$u = z - \theta x - \theta' y$ und $\partial u_t + \theta \cdot \partial x_t + \theta' \cdot \partial y_t = \partial z_t - x \cdot \partial\theta_t - y \cdot \partial\theta'_t,$

so erhält man eine Gleichung, in welcher man die Koefficienten

---

Es ist nämlich zu bemerken, daß wenn die Gleichung 6.) und eine der beiden Gleichungen 3.) und 4.) identisch ist, dann auch die andere dieser letztern beiden Gleichungen nothwendig identisch seyn müsse. Wird dagegen die 3.) integrirt, so muß das Integral noch nicht nothwendig der Gleichung 4.) genügen, wenn es auch den Gleichungen 3.) und 6.) genügt; sondern es muß noch durch gehörige Bestimmung der Constante der Gleichung 4.) erst genügt werden.

werden kann, heißt ein singulärer Werth dieser Differential-Gleichung.

Es ist aus der Algebra bekannt, daß wenn irgend eine Aufgabe zu einer Gleichung führt von der Form $P \cdot Q = 0$, so genügt dieser Gleichung entweder $P = 0$, oder $Q = 0$. — Führt also z. B. eine Aufgabe zu der Gleichung

1′) $\quad u \cdot \partial u_y - u = 0$ d. h. $u(\partial u_y - 1) = 0$,

so genügt dieser Gleichung entweder $u = 0$, oder $\partial u_y - 1 = 0$. — Führt man nun aber statt u einen neuen Veränderlichen x dergestalt ein, daß man

2′) $\quad \sqrt{x^2+y^2-a^2} = u$, oder $x^2+y^2-a^2 = u^2$

setzt, so erhält man zunächst

3′) $\quad x \cdot \partial x_y + y = u \cdot \partial u_y$ oder $\partial u_y = \dfrac{x \cdot \partial x_y + y}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$.

Substituirt man nun diese Werthe statt u und statt ∂u_y in die gegebene Gleichung 1′.), so geht solche über in

4′) $\quad \sqrt{x^2+y^2-a^2} \cdot \left[\dfrac{x \cdot \partial x_y + y}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}} - 1\right] = 0;$

und diese Gleichung wird noch identisch entweder durch die Funktion x von y, welche den ersten Faktor, oder durch den Werth von x, welcher den zweiten Faktor zu Null macht. Der erste Faktor, der Null gleich gesetzt, giebt gar keine Differential-Gleichung; also bedarf es auch nicht des Integrirens, und der aus dieser Gleichung hervorgehende Werth von x (in y ausgedrückt) wird also im Allgemeinen dem Werthe von x ganz fremd bleiben, welcher aus dem andern Faktor durch Integration hervorgeht, wenn solcher der Null gleich gesetzt wird.

So weit ist alles den ersten Regeln der gemeinen Algebra völlig angemessen und nichts weiter hinzuzufügen. Wenn man aber nun in der Gleichung 4′.) die beiden Faktoren mit einander multiplicirt, so daß dieselbe Gleichung diese Form

5′) $\quad x \cdot \partial x_y + y - \sqrt{x^2+y^2-a^2} = 0$

annimmt, so sind die beiden Faktoren verschwunden, d. h. sie sind nicht mehr zu erkennen; und daher muß es den Anfänger überraschen, wenn er Differential-Gleichungen durch Werthe genügen sieht, welche nicht in dem allgemeinen Integral enthalten sind, da derselbe den wahren Grund davon deshalb nicht erkennen kann, weil die beiden Faktoren, in welche die Gleichung bei Einführung eines neuen Veränderlichen zuweilen ganz unmittelbar zerfällt, in der gegebenen Form der Gleichung als solche nicht hervortreten.

II. Ganz auf dieselbe Weise springt in die Augen, daß auch eine Differential-Gleichung der zweiten Ordnung neben dem

ersten allgemeinen Integral, noch einen singulären Werth haben könne, welcher selbst eine Differential-Gleichung der ersten Ordnung noch seyn kann, aber in dem ersten allgemeinen Integral (das ebenfalls eine Differential-Gleichung der ersten Ordnung ist) nicht enthalten seyn wird; eben weil es durch einen zweiten Faktor der gegebenen Differential-Gleichung bestimmt ist.

So ist z. B. von der Differential-Gleichung der zweiten Ordnung

1) $$x\cdot\partial^2 y_x{}^2 - 2\partial y_x\cdot\partial^2 y_x + x = 0$$

das allgemeine Ur-Integral dieses:

2) $$\tfrac{1}{3}x^3 + a^2x + b - 2ay = 0;$$

denn, wenn man diese Gleichung zweimal hinter einander nach x differenziirt, und dann y, ∂y_x und $\partial^2 y_x$ als Funktionen von x herstellt, letztere aber statt y, ∂y_x und $\partial^2 y_x$ in die Gleichung 1.) substituirt, so wird solche identisch.

Aber eben so genügt der Gleichung 1.) noch diese andere Gleichung

3) $$\partial y_x{}^2 - x^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \partial y_x = \pm x, \quad \text{oder} \quad y = \pm\tfrac{1}{2}x^2 + c;$$

denn dieselbe giebt $\partial^2 y_x = \pm 1$, und diese Werthe statt ∂y_x, $\partial^2 y_x$ substituirt, machen die 1.) ebenfalls identisch. Und da endlich, wenn man den Werth von y aus 3.) in die Gleichung 2.) substituirt, diese Gleichung

$$\tfrac{1}{3}x^3 + a^2x + b \pm ax^2 + 2ac = 0$$

hervorgeht, diese aber, so lange a, b, c constant sind, einen Widerspruch enthält, so ist die Auflösung 3.) in der Auflösung 1.) nicht enthalten; also ist die Auflösung 3.) ein singulärer Werth der gegebenen Differential-Gleichung der zweiten Ordnung.

Eben so kann eine Differential-Gleichung der dritten und jeder höhern Ordnung neben ihrem allgemeinen Integral noch einen singulären, ihr genügenden Werth haben, der nicht in ihrem allgemeinen Integral enthalten ist.

III. Nach §. 39.) findet man die singulären Werthe einer jeden Differential-Gleichung der ersten Ordnung, wenn man letztere noch einmal differenziirt, dann $\partial^2 y_x$ findet in x, y, ∂y_x ausgedrückt, und diesen Ausdruck auf die Form $\frac{0}{0}$ bringt, d. h. Zähler und Nenner des so auf diesem Wege erhaltenen Ausdrucks für $\partial^2 y_x$ der Null gleich setzt.

Suchen

Suchen wir auf dieſem Wege den ſingulären Werth der Differential-Gleichung

1) $$x \cdot \partial x_y + y + \sqrt{x^2+y^2-a^2} = 0.$$

Dieſe Gleichung, wenn man ſie noch einmal nach allem y differenziirt, giebt

2) $$x \cdot \partial^2 x_y + \partial x_y^2 + 1 + \frac{x \cdot \partial x_y + y}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}} = 0,$$

oder

3) $$\partial^2 x_y = -\frac{(\partial x_y^2 + 1)\sqrt{x^2+y^2-a^2} + x \cdot \partial x_y + y}{x \cdot \sqrt{x^2+y^2-a^2}}.$$

Setzt man nun den Nenner $= 0$, ſo erhält man

4) $$x^2+y^2-a^2 = 0,$$

und dieſer Werth von x in y, macht auch den Zähler von $\partial^2 x_y$ in 3.) der Null gleich; folglich wird die Gleichung 4.) der ſinguläre Werth der gegebenen Differential-Gleichung 1.) ſeyn, wenn er nämlich überhaupt ihr genügt (was hier der Fall iſt) und wenn er nicht in dem allgemeinen Integral als ein beſonderes Integral ſteckt (was hier nicht der Fall iſt, wie wir dies von dem analogen Beiſpiel in I. bereits geſehen haben) *).

IV. Lagrange hat gelehrt, wie man den ſingulären Werth einer gegebenen Differential-Gleichung der erſten Ordnung auch aus derem allgemeinen Integrale

1) $$f_{x,y,a} = 0,$$

welches die willkührliche Conſtante a in ſich aufgenommen hat, finden könne. Da nämlich der ſinguläre Werth nie in dem allgemeinen Integrale ſteckt, ſo giebt es keinen conſtanten Werth von a, welcher bewirkte, daß $f_{x,y,a} = 0$ der ſinguläre Werth würde, wohl aber wird dieſe Gleichung, wenn man ſtatt y ſeinen, aus dem ſingulären Werth gezogenen Ausdruck in x, ſubſtituirt, bloß a und x enthalten, alſo a als eine Funktion von x liefern. — Es kommt alſo darauf an, die Funktion von x zu finden, welche ſtatt a geſetzt werden muß, damit das allgemeine Integral $f_{x,y,a} = 0$ in den ſingulären Werth übergehe.

*) Sucht man die ſingulären Werthe einer Differential-Gleichung der zweiten Ordnung, ſo findet man durch abermaliges Differenziiren $\partial^3 y_x$ oder $\partial^3 x_y$ und ſetzt ſolches $= \frac{0}{0}$.

ersten allgemeinen Integral, noch einen singulären Werth haben könne, welcher selbst eine Differential-Gleichung der ersten Ordnung noch seyn kann, aber in dem ersten allgemeinen Integral (das ebenfalls eine Differential-Gleichung der ersten Ordnung ist) nicht enthalten seyn wird; eben weil es durch einen zweiten Faktor der gegebenen Differential-Gleichung bestimmt ist.

So ist z. B. von der Differential-Gleichung der zweiten Ordnung

1) $$x\cdot\partial^2 y_x^2 - 2\partial y_x\cdot\partial^2 y_x + x = 0$$

das allgemeine Ur-Integral dieses:

2) $$\tfrac{1}{3}x^3 + a^2x + b - 2ay = 0;$$

denn, wenn man diese Gleichung zweimal hinter einander nach x differenziirt, und dann y, ∂y_x und $\partial^2 y_x$ als Funktionen von x herstellt, letztere aber statt y, ∂y_x und $\partial^2 y_x$ in die Gleichung 1.) substituirt, so wird solche identisch.

Aber eben so genügt der Gleichung 1.) noch diese andere Gleichung

3) $$\partial y_x^2 - x^2 = 0 \text{ oder } \partial y_x = \pm x, \text{ oder } y = \pm\tfrac{1}{2}x^2 + c;$$

denn dieselbe giebt $\partial^2 y_x = \pm 1$, und diese Werthe statt ∂y_x, $\partial^2 y_x$ substituirt, machen die 1.) ebenfalls identisch. Und da endlich, wenn man den Werth von y aus 3.) in die Gleichung 2.) substituirt, diese Gleichung

$$\tfrac{1}{3}x^3 + a^2x + b \pm ax^2 + 2ac = 0$$

hervorgeht, diese aber, so lange a, b, c constant sind, einen Widerspruch enthält, so ist die Auflösung 3.) in der Auflösung 1.) nicht enthalten; also ist die Auflösung 3.) ein singulärer Werth der gegebenen Differential-Gleichung der zweiten Ordnung.

Eben so kann eine Differential-Gleichung der dritten und jeder höhern Ordnung neben ihrem allgemeinen Integral noch einen singulären, ihr genügenden Werth haben, der nicht in ihrem allgemeinen Integral enthalten ist.

III. Nach §. 39.) findet man die singulären Werthe einer jeden Differential-Gleichung der ersten Ordnung, wenn man letztere noch einmal differenziirt, dann $\partial^2 y_x$ findet in x, y, ∂y_x ausgedrückt, und diesen Ausdruck auf die Form $\frac{0}{0}$ bringt, d. h. Zähler und Nenner des so auf diesem Wege erhaltenen Ausdrucks für $\partial^2 y_x$ der Null gleich setzt.

Suchen

erhalten, und dieser Widerspruch hätte angezeigt, daß man nun den singulären Werth nicht findet.

Man sieht hieraus, daß man dem allgemeinen Integral, ehe man nach a differenziirt, erst die zu dem Zwecke passende Form geben muß *). — Diese

*) Wir haben im I. Bd. §.§. 182—184.) gesehen, daß die aus $f_{x,y,a}=0$ und $\partial f_a=0$ hervorgehende Kurve, wenn a eliminirt wird, und wenn überhaupt die entstehende Gleichung eine Kurve vorstellt, alle aus $f_{x,y,a}=0$ dadurch, daß man dem a alle stetig neben einander liegenden constanten Werthe giebt, hervorgehenden Kurven einhüllt, d. h. alle zugleich, jede aber an einem andern ihrer Punkte berührt. — Kommt man also bei Lösung einer dahin gehörenden Aufgabe zu einer Differential-Gleichung, so muß man ihren singulären Werth und nicht ihr Integral suchen, um die Lösung zu haben.

In dem Beispiele zu §. 184. des I. Bd.) hätte man z. B. die Lösung der Aufgabe auch so einleiten können, daß man die Kurve gesucht hätte, deren Tangente an jedem ihrer Punkte, so weit sie von den festen und auf einander senkrecht stehenden Geraden OX und OY abgeschnitten wird, beständig eine und dieselbe gegebene Länge c habe. Ist dann E ein beliebiger Punkt der gesuchten Kurve und $OF=x$, $FE=y$, so ist

$$\frac{EF}{FA}=tg\,BAO=-\partial y_x;$$

also ist auch

$$FA=-\frac{y}{\partial y_x} \text{ und } OA=x-\frac{y}{\partial y_x}, \text{ folglich } OB=OA\cdot tg\,BAO,$$

d. h. $OB=-x\cdot\partial y_x+y$. — Die gesuchte Gleichung ergiebt sich nun aus dem Pythagoräischen Lehrsatze

$$AB^2=OA^2+OB^2$$

und wird also

$$c^2=x^2+\frac{y^2}{\partial y_x{}^2}-\frac{2xy}{\partial y_x}+x^2\cdot\partial y_x{}^2-2xy\cdot\partial y_x+y^2,$$

oder

$$x^2\cdot\partial y_x{}^4-2xy\cdot\partial y_x{}^3+(x^2+y^2-c^2)\cdot\partial y_x{}^2-2xy\cdot\partial y_x+y^2=0.$$

Dies ist eine Differential-Gleichung der gesuchten Kurve. Integrirt man sie, so erhält man als allgemeines Integral die Gleichung der Geraden

$$y=-\frac{a}{\sqrt{c^2-a^2}}x+a$$

mit der willkührlichen Constante a. Die gesuchte Kurve steckt darin aber nicht, welchen Werth man auch der Constante a geben möchte. Also muß man den singulären Werth aufsuchen, welcher nach III.) oder auch, in so fern man das allgemeine Integral hat, nach IV.) gefunden wird.

Differenziirt man aber die Gleichung

1) $$f_{x,y,a} = 0,$$

indem man a als conſtant anſieht, ſo erhält man

2) $$\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x = 0;$$

ſieht man jedoch a als eine Funktion von x an, ſo ergiebt ſich

3) $$\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x + \partial f_a \cdot \partial a_x = 0.$$

Denkt man ſich nun a als diejenige Funktion von x, welche aus

4) $$\partial f_a = 0$$

hervorgeht, ſo fällt die Gleichung 3.) mit der 2.) der Form nach zuſammen. Wenn daher die aus 1.) und 2.) gezogenen Werthe von y und ∂y_x der gegebenen Differential-Gleichung genügen, ſo thun dies auch die aus 1.) und 3.) hervorgehenden Werthe von y und ∂y_x, ſobald $\partial f_a = 0$ gedacht iſt.

Um alſo aus $f_{x,y,a} = 0$ den ſingulären Werth zu finden, nimmt man $\partial f_a = 0$, und eliminirt aus beiden den Buchſtaben a. Wenn die Gleichung $\partial f_a = 0$ nicht a conſtant liefert, und auch keinen Widerſpruch enthält, ſo iſt das erhaltene Reſultat allemal ein ſingulärer Werth der gegebenen Differential-Gleichung, von welcher $f_{x,y,a} = 0$ das allgemeine Integral iſt.

So iſt z. B. von der Gleichung

1′) $$x \cdot \partial x_y + y = \sqrt{x^2 + y^2 - b^2}$$

das allgemeine Integral dieſes:

2′) $$x^2 + y^2 - b^2 = (y+a)^2 \quad \text{oder} \quad (y+a)^2 - x^2 - y^2 + b^2 = 0,$$

wo a die willkührliche Conſtante iſt. Differenziirt man nun dieſe Gleichung nach a, ſo ergiebt ſich

3′) $$y + a = 0 \quad \text{oder} \quad a = -y;$$

und dieſer Werth von a in das allgemeine Integral ſtatt a ſubſtituirt, giebt

4′) $$x^2 + y^2 - b^2 = 0;$$

und dies iſt in der That der ſinguläre Werth für dieſe gegebene Differential-Gleichung der erſten Ordnung.

Hätte man dem allgemeinen Integral 2′.) dieſe Form gegeben, nämlich

$$\sqrt{x^2 + y^2 - b^2} = y + a \quad \text{oder} \quad y + a - \sqrt{x^2 + y^2 - b^2} = 0,$$

und nun ſolche nach a differenziirt, ſo hätte man

$$1 = 0$$

halten, und dieser Widerspruch hätte angezeigt, daß man nun den singu-
ren Werth nicht findet.

Man sieht hieraus, daß man dem allgemeinen Integral, ehe man nach
differenziirt, erst die zu dem Zwecke passende Form geben muß *). — Diese

---

*) Wir haben im I. Bd. §§. 182—184.) gesehen, daß die aus
$f_{x,y,a} = 0$ und $\partial f_a = 0$ hervorgehende Kurve, wenn a eliminirt wird,
ıd wenn überhaupt die entstehende Gleichung eine Kurve vorstellt, alle
ıs $f_{x,y,a} = 0$ dadurch, daß man dem a alle stetig neben einander liegen-
n constanten Werthe giebt, hervorgehenden Kurven einhüllt, d. h. alle zu-
eich, jede aber an einem andern ihrer Punkte berührt. — Kommt man
so bei Lösung einer dahin gehörenden Aufgabe zu einer Differential-Glei-
ung, so muß man ihren singulären Werth und nicht ihr Integral suchen,
m die Lösung zu haben.

In dem Beispiele zu §. 184. des I. Bd.) hätte man z. B. die Lösung
r Aufgabe auch so einleiten können, daß man die Kurve gesucht hätte,
ren Tangente an jedem ihrer Punkte, so weit sie von den festen und auf
nander senkrecht stehenden Geraden OX und OY abgeschnitten wird, be-
ndig eine und dieselbe gegebene Länge c habe. Ist dann E ein beliebiger
unkt der gesuchten Kurve und $OF = x$, $FE = y$, so ist

$$\frac{EF}{FA} = tg\,BAO = -\partial y_x;$$

o ist auch

$$FA = -\frac{y}{\partial y_x} \quad \text{und} \quad OA = x - \frac{y}{\partial y_x}, \quad \text{folglich} \quad OB = OA \cdot tg\,BAO,$$

). $OB = -x \cdot \partial y_x + y$. — Die gesuchte Gleichung ergiebt sich nun aus
i Pythagoräischen Lehrsatze

$$AB^2 = OA^2 + OB^2$$

wird also

$$c^2 = x^2 + \frac{y^2}{\partial y_x^2} - \frac{2xy}{\partial y_x} + x^2 \cdot \partial y_x^2 - 2xy \cdot \partial y_x + y^2,$$

$$x^2 \cdot \partial y_x^4 - 2xy \cdot \partial y_x^3 + (x^2 + y^2 - c^2) \cdot \partial y_x^2 - 2xy \cdot \partial y_x + y^2 = 0.$$

s ist eine Differential-Gleichung der gesuchten Kurve. Integrirt man
so erhält man als allgemeines Integral die Gleichung der Geraden

$$y = -\frac{a}{\sqrt{c^2 - a^2}} x + a$$

der willkührlichen Constante a. Die gesuchte Kurve steckt darin aber
ht, welchen Werth man auch der Constante a geben möchte. Also muß
i den singulären Werth aufsuchen, welcher nach III.) oder auch, in so
man das allgemeine Integral hat, nach IV.) gefunden wird.

zweckmäßige Form der Integral-Gleichung $f_{x,y,a}=0$ muß aber so seyn, daß $\partial f_a=0$ für a eine Funktion von x allein, oder von y allein, oder von x und y liefert. Im letztern Falle kann jedoch a wiederum constant seyn, weil diese Funktion von x und y, so wie statt y der aus $f=0$ und $\partial f_a=0$ gezogene Werth substituirt wird, constant werden kann. Dann wäre aber die aus $f_{x,y,a}=0$ und $\partial f_a=0$ gefundene Gleichung zwischen x und y kein singulärer Werth, sondern ein besonderes Integral.

V. Hat man einen, der gegebenen Differential-Gleichung genügenden Werth $y=\psi_x$ und außerdem noch das allgemeine Integral derselben Differential-Gleichung $f_{x,y,a}=0$, so ist es leicht zu wissen, ob $y=\psi_x$ ein singulärer Werth oder ein besonderes Integral der gegebenen Differential-Gleichung ist. Man setzt ψ_x statt y in $f_{x,y,a}=0$; fällt dann alles x heraus, so giebt die Gleichung den Werth der Constante a, für welchen aus $f_{x,y,a}=0$, die Gleichung $y=\psi_x$ als ein besonderes Integral hervorgeht; fällt aber aus der Gleichung $f_{x,\psi,a}=0$ nicht alles x von selber heraus, so daß a als eine Funktion von x sich ergiebt, so ist $y=\psi_x$ ein singulärer Werth.

Lagrange hat aber noch gezeigt, wie man ohne das allgemeine Integral zu haben, doch untersuchen könne, ob $y=\psi_x$ ein singulärer Werth oder ein besonderes Integral sey. Man muß nämlich aus der gegebenen Differential-Gleichung ∂y_x finden, etwa $\partial y_x=p_{x,y}$, dann ∂p_y bestimmen, hier herein aber statt y den Werth ψ_x substituiren. Nimmt dadurch ∂p_y die Form $\frac{1}{0}$ an, so ist $y=\psi_x$ ein singulärer Werth; außerdem aber ist $y=\psi_x$ ein besonderes Integral. — Näheres über die singulären Werthe findet man im „System der Mathematik.“ Th. VI., woselbst sie sehr vollständig behandelt sich finden.

§. 46.

Von der Integration der Gleichungen durch Reihen.

Sieht man sich gezwungen durch Reihen zu integriren, so kann man entweder das Verfahren des §. 39.) anwenden, oder aber die aus nachstehenden Beispielen ersichtlichen Methoden.

I. Soll z. B. die Gleichung

$$1) \qquad \partial y_x + y - mx^n = 0$$

mittelst Reihen integrirt werden, so setze man

$$2) \qquad y = A_0 x^\alpha + A_1 x^{\alpha+1} + A_2 x^{\alpha+2} + \text{ etc. etc. etc.},$$

wo A_0, A_1, A_2 etc. etc. unbestimmte Koefficienten und α ein unbestimmter Exponent ist; finde daraus

$$3) \qquad \partial y_x = \alpha A_0 x^{\alpha-1} + (\alpha+1)A_1 x^\alpha + (\alpha+2)A_2 x^{\alpha+1} + \text{etc. etc.},$$

substituire diese Reihen statt y_x und ∂y_x in die gegebene Differential-Gleichung und ordne die Gleichung nach Potenzen von x, so daß man erhält

$$4) \qquad \left.\begin{array}{llll} \alpha A_0 x^{\alpha-1} + & (\alpha+1)A_1 x^\alpha + & (\alpha+2)A_2 x^{\alpha+1} + & (\alpha+3)A_3 x^{\alpha+2} + \text{etc.} \\ -mx^n + & A_0 x^\alpha + & A_1 x^{\alpha+1} + & A_2 x^{\alpha+2} + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0.$$

Diese Gleichung wird nun identisch, wenn man

$$n = \alpha - 1, \qquad \text{also} \qquad \alpha = n+1,$$

und die Koefficienten A_0, A_1, A_2, A_3 etc. etc. so nimmt, daß

$$\alpha A_0 - m = 0; \quad (\alpha+1)A_1 + A_0 = 0; \quad (\alpha+2)A_2 + A_1 = 0;$$
$$(\alpha+3)A_3 + A_2 = 0;$$

etc. etc. wird. Dies giebt

$$A_0 = \frac{m}{n+1}; \quad A_1 = -\frac{m}{(n+1)^{2!}}; \quad A_2 = +\frac{m}{(n+1)^{3!}};$$
$$A_3 = -\frac{m}{(n+1)^{4!}};$$

u. s. w. f.; so daß zuletzt gefunden wird

$$y = \frac{m}{n+1} x^{n+1} \left(1 - \frac{x}{n+2} + \frac{x^2}{(n+2)^{2!}} - \frac{x^3}{(n+2)^{3!}} + \frac{x^4}{(n+3)^{4!}} - \cdots\right).$$

Dieser Werth von y genügt nun der gegebenen Differen-

tial-Gleichung, ist aber höchstens ein besonderes Integral, weil keine allgemeine willkührliche Constante eingegangen ist.

Will man aber, wie dies in den Anwendungen der Fall ist, dasjenige besondere Integral haben, welches $y=b$ liefert, wenn $x=a$ gesetzt wird, so führt man zwei neue Veränderliche t und u so ein, daß man

8) $$x=a+t \quad \text{und} \quad y=b+u$$

setzt, so daß, weil $\partial x_t=1$ und $\partial y_t=\partial u_t$ wird,

$$\partial y_x=\frac{\partial y_t}{\partial x_t}=\partial u_t$$

ist. Diese Werthe in die gegebene Differential-Gleichung substituirt, geben die neue Gleichung

9) $$\partial u_t+b+u-m(a+t)^n=0,$$

und man sucht nun u in t so auszudrücken, daß für $t=0$ auch $u=0$ wird. Zu dem Ende setzt man

10) $$u=A_0t^\alpha+A_1t^{\alpha+1}+A_2t^{\alpha+2}+A_3t^{\alpha+3}+\cdots,$$

findet hieraus ∂u_t und substituirt diese Werthe in die Gleichung 9.). Dadurch geht letztere über in

11) $$\left.\begin{array}{llll} \alpha A_0t^{\alpha-1}+(\alpha+1)A_1t^\alpha+(\alpha+2)A_2t^{\alpha+1}+\text{etc.} \\ +b \quad + \quad A_0t^\alpha+ \quad A_1t^{\alpha+1}+\text{etc.} \\ -ma^n \; - \; mna^{n-1}t \; - \; mn_2a^{n-2}t^2 \; -\text{etc.} \end{array}\right\}=0;$$

Um nun dieser Gleichung für jedes t zu genügen, muß man

$$\alpha-1=0 \quad \text{also} \quad \alpha=1$$

und dann noch

$$\alpha A_0+b-ma^n=0; \quad (\alpha+1)A_1+A_0-mna^{n-1}=0;$$
$$(\alpha+2)A_2+A_1-mn_2a^{n-2}=0;$$

u. s. w. f. nehmen.

Aus diesen letztern Gleichungen findet man aber die Coefficienten A_0, A_1, A_2 etc. etc. ohne Weiteres. Setzt man dann $x-a$ statt t und addirt man zu der für u erhaltenen Reihe noch b hinzu, so hat man y, wie solches verlangt wurde.

II. Ist die Gleichung der zweiten Ordnung

1) $$\partial^2 y_x + ax^n y = 0$$

auf diese Weise zu integriren, so kann man

2) $$y = A_0 x^\alpha + A_1 x^{\alpha+\delta} + A_2 x^{\alpha+2\delta} + \text{etc. etc. etc.}$$

setzen. Differenzirt man nun diese Gleichung zweimal hinter einander nach x, so erhält man

$$\partial^2 y_x = \alpha^{2I-1} A_0 x^{\alpha-2} + (\alpha+\delta)^{2I-1} A_1 x^{\alpha+\delta-2} + (\alpha+2\delta)^{2I-1} A_2 x^{\alpha+2\delta-2} + \text{etc. etc.},$$

und außerdem findet sich

$$ax^n y = aA_0 x^{\alpha+n} + aA_1 x^{\alpha+\delta+n} + aA_2 x^{\alpha+2\delta+n} + \text{etc. etc.}$$

Da nun die Summe dieser beiden Reihen der Null gleich werden soll (nach 1.), so muß man $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$ nehmen, damit das Glied $\alpha^{2I-1} A_0 x^{\alpha-2}$ in $\partial^2 y_x$ ganz herausfällt und $(\alpha+\delta)^{2I-1} A_1 x^{\alpha+\delta-2}$ das erste Glied der Reihe für $\partial^2 y_x$ wird, welches mit dem ersten Gliede $aA_0 x^{\alpha+n}$ der andern Reihe verglichen werden kann. Dadurch erhält man, es mag $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$ seyn,

$$\delta - 2 = n, \quad \text{also} \quad \delta = n+2$$

und dann noch

$$(\alpha+\delta)^{2I-1} A_1 + aA_0 = 0; \quad (\alpha+2\delta)^{2I-1} A_2 + aA_1 = 0;$$

u. s. w. f.

Man findet auf diesem Wege, je nachdem $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$ genommen wird, zwei Reihen für y, welche die unbestimmte Constante A_0 in sich aufnehmen, wofür wir bequemer bloß A schreiben, nämlich:

$$y = A\left(1 - \frac{ax^{n+2}}{(n+1)^{2I}} + \frac{a^2 x^{2n+4}}{(n+1)^{2I}\cdot(2n+3)^{2I}} - \frac{a^3 x^{3n+6}}{(n+1)^{2I}\cdot(2n+3)^{2I}\cdot(3n+5)^{2I}} + \cdots\right)$$

und

$$y = Ax\left(1 - \frac{ax^{n+2}}{(n+2)^{2n}} + \frac{a^2x^{2n+4}}{(n+2)^{2n}\cdot(2n+4)^{2n}} - \frac{a^3x^{3n+6}}{(n+2)^{2n}\cdot(2n+4)^{2n}\cdot(3n+6)^{2n}} + \cdots\right).$$

Diese beiden Integrale sind jedoch nur besondere Integrale, in so fern sie nicht zwei willkührliche (unbestimmte) Constanten enthalten. Weil aber die gegebene Differential-Gleichung eine lineäre ist, so genügt ihr auch die Summe der beiden so eben gefundenen Reihen, und auch dann noch, wenn statt des zweiten A lieber B gesetzt, und dieses B als eine neue willkührliche (von A unabhängige) Constante angesehen wird. So hat man zuletzt doch das allgemeine Integral mit zwei willkührlichen Constanten.

III. Diesen Beispielen wollen wir nur noch hinzufügen, daß in den Anwendungen auf physikalisch-mathematische Probleme die Natur des Gegenstandes häufig die Form der Reihe angiebt, welche man wählen muß, um convergente Reihen zu haben. Endlich sucht man in den Anwendungen häufig nur kleine Korrektionen zu schon bekannten Näherungs-Werthen, so daß dann die Differential-Gleichung selber schon eine einfachere Gestalt annimmt und daher leichter behandelt werden kann. In den Anwendungen selbst findet man aber die, ihnen eigenthümlichen Verfahrungs-Arten auch näher beschrieben.

§. 47.

Wir beschließen dieses Kapitel, indem wir in einigen Worten noch mittheilen, wie in den Anwendungen die während der Integration eingegangenen unbestimmten Constanten näher bestimmt werden.

Gewöhnlich weiß man nämlich in den Anwendungen den Werth $y = b$, der zu einem Werth $x = a$ gehört. Ist nun

$$f_{x,y,c} = 0$$

das gefundene Integral, so muß $f_{a,b,c} = 0$ identisch werden,

und aus dieſer letztern Gleichung findet ſich dann c ohne Weiteres; und der gefundene Werth von c bleibt für alle die Werthe von x giltig, für welche y ſeine Stetigkeit nicht ändert.

Hat das Integral, weil es von einer Differential-Gleichung der zweiten Ordnung herrührt, zwei willkührliche Conſtanten aufgenommen, ſo muß man nicht bloß den Werth $y = b$, ſondern auch den Werth $\partial y_x = \beta$ kennen, der in dieſem Falle der Anwendung, zu $x = a$ gehört. Indem man dann dies Integral

$$f_{x,y,c,c'} = 0,$$

differenziirt, alſo $\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x = 0$ erhält, ſo müſſen dieſe beiden Gleichungen identiſch werden, wenn man in ihnen a ſtatt x und gleichzeitig b und β ſtatt bezüglich y und ∂y_x ſubſtituirt. Aus den dadurch entſtehenden beiden Gleichungen kann man nun aber die beiden Conſtanten c und c' ſo beſtimmen, wie ſie ſeyn müſſen, damit dieſen letztern Bedingungen genügt werde.

Sechstes Kapitel.

Von der Integration der Gleichungen zwiſchen drei und mehr Veränderlichen, ſowohl der totalen als auch der Partial-Gleichungen *).

Erſter Abſchnitt.

Integration der totalen Gleichungen mit drei Veränderlichen.

§. 48.

I. Wir haben bereits im §. 36. II.) geſehen, daß die Gleichung

1) $$P\cdot\partial x_t+Q\cdot\partial y_t+R\cdot\partial z_t=0$$ **),

wo P, Q und R gegebene Funktionen von x, y und z ſind, nur dann integrabel iſt, wenn die drei Bedingungs-Gleichungen

$$\partial P_y=\partial Q_x;\quad \partial Q_z=\partial R_y \quad\text{und}\quad \partial R_x=\partial P_z$$

erfüllt ſind. Sind ſie nun nicht erfüllt, ſo kann man (nach §. 40. II.) den integrirenden Faktor μ aus den drei Gleichungen

2) $$\partial(\mu P)_y=\partial(\mu Q)_x;\quad \partial(\mu Q)_z=\partial(\mu R)_y$$

$$\text{und}\quad \partial(\mu R)_x=\partial(\mu P)_z$$

beſtimmen. Dieſe drei Gleichungen nehmen aber die Form an

---

*) Dieſes Kapitel kann bei'm erſten Leſen dieſes Buches überſchlagen werden.

**) Sind x, y, z als Funktionen von t gedacht, ſo exiſtiren drei Gleichungen zwiſchen x, y, z und t. — Eliminirt man dann t aus dieſen drei Gleichungen, ſo bleiben zwei Gleichungen zwiſchen x, y und z; folglich kann man dann auch y und z als Funktionen von x anſehen. Dividirt man daher die obige Gleichung 1.) durch ∂x_t, ſo erhält man

$$P+Q\cdot\partial y_x+R\cdot\partial z_x=0.$$

$$3)\quad \begin{cases} \mu\cdot(\partial P_y - \partial Q_x) + P\cdot\partial\mu_y - Q\cdot\partial\mu_x = 0 \\ \mu\cdot(\partial Q_x - \partial R_y) + Q\cdot\partial\mu_x - R\cdot\partial\mu_y = 0 \\ \mu\cdot(\partial R_x - \partial P_z) + R\cdot\partial\mu_x - P\cdot\partial\mu_z = 0. \end{cases}$$

Multiplicirt man die erstere dieser Gleichungen mit R, die andere mit P, die dritte mit Q, und addirt man alle drei Gleichungen, so kann man das Resultat durch μ wegdividiren und man erhält

$$(\odot)\cdots\ R(\partial P_y - \partial Q_x) + Q(\partial R_x - \partial P_z) + P(\partial Q_z - \partial R_y) = 0.$$

Dies ist eine Bedingungs-Gleichung, welche erfüllt seyn muß, wenn die Gleichung 1.) einen integrirenden Faktor soll haben können, d. h. wenn eine Ur-Gleichung zwischen x, y und z soll existiren können, welche der gegebenen 1.) genügt.

II. Dieselbe Bedingungs-Gleichung erhält man aber auch auf folgendem Wege:

Existirt eine solche Gleichung zwischen x, y und z, so ist $z = z_{x,y}$, also, wenn man x um dx, und y um dy wachsen läßt, und wenn dann z um dz wächst,

$$4)\qquad dz = \partial z_x\cdot dx + \partial z_y\cdot dy.$$

Auf der andern Seite giebt die Gleichung 1.), wenn man sich diese Zuwachse dadurch entstanden denkt, daß t um dt wächst

$$5)\qquad P\cdot dx + Q\cdot dy + R\cdot dz = 0$$

oder

$$dz = -\frac{P}{R}\cdot dx - \frac{Q}{R}\cdot dy.$$

Vergleicht man diese beiden Gleichungen 4.) und 5.) mit einander, so folgt

$$6)\qquad \partial z_x = -\frac{P}{R}\quad\text{und}\quad \partial z_y = -\frac{Q}{R}.$$

Eliminirt man aber nun aus diesen beiden Gleichungen die Ableitungen des Veränderlichen z, dadurch daß man die erstere nach y, die andere nach x differenziirt und dann die beiden Ausdrücke für $\partial^{1,1} z_{x,y}$ einander gleich setzt, so erhält man

$$7)\qquad \partial\left(\frac{P}{R}\right)_{(y)} = \partial\left(\frac{Q}{R}\right)_{(x)}$$

oder

$$R.\partial P_{(y)} - P.\partial R_{(y)} = R.\partial Q_{(x)} - Q.\partial R_{(x)},$$

welche Gleichung identisch seyn muß, so oft man statt z die Funktion $z_{x,y}$ substituirt; so daß z. B.

$$\partial P_{(y)} = \partial P_y + \partial P_z.\partial z_y = \partial P_y - \partial P_z.\frac{Q}{R},$$

$$\partial R_{(y)} = \partial R_y + \partial R_z.\partial z_y = \partial R_y - \partial R_z.\frac{Q}{R};$$

ferner

$$\partial Q_{(x)} = \partial Q_x + \partial Q_z.\partial z_x = \partial Q_x - \partial Q_z.\frac{P}{R},$$

$$\partial R_{(x)} = \partial R_x + \partial R_z.\partial z_x = \partial R_x - \partial R_z.\frac{P}{R}$$

wird. Substituirt man aber dies in 7.), so erhält man die Gleichung ⊙.) wieder.

III. Man braucht aber auch nicht einmal Differentialien, d. h. unendlich-kleine Zuwachse zuzuziehen, um zu dieser letztern Rechnung zu gelangen. — Existirt nämlich nur eine Gleichung zwischen x, y und z, so kann man daraus zwar $z = z_{x,y}$ finden, und x und y bleiben von einander ganz unabhängig; allein man kann dann x und y doch noch als Funktionen von t denken, aber als völlig unbestimmte, beliebige, von einander unabhängige, so daß auch ∂x_t und ∂y_t völlig von einander unabhängig und völlig willkührlich bleiben, während ∂z_t durch die Gleichung 1.) mit ∂y_t und ∂x_t zusammenhängt. Dann hat man aus $z = z_{x,y}$

4′) $\partial z_t = \partial z_x.\partial x_t + \partial z_y.\partial y_t$ (statt der 4.)

und zugleich

5′) $\partial z_t = -\frac{P}{R}.\partial x_t - \frac{Q}{R}.\partial y_t$ (statt der 5.).

Und eben weil nun diese beiden Ausdrücke für ∂z_t, einander gleich seyn müssen, für ganz beliebige und von einander unabhängige Funktionen von t, die statt x und y nur immer gesetzt werden mögen, so finden nothgedrungen die Gleichungen 6.)

und dann auch 7.) statt, und so gelangt man also sogleich wieder zur Bedingungs-Gleichung ⊙.).

IV. Ist aber die Bedingungs-Gleichung ⊙.) erfüllt, so findet man den Faktor μ aus zweien der Gleichungen 3.), oder man integrirt auch sogleich nach folgender Methode.

Man sucht zuerst den integrirenden Faktor μ für die Funktion

$$P\cdot\partial x_t+Q\cdot\partial y_t$$

indem man sich z als constant denkt, und bestimmt

8) $$\int(\mu P\cdot\partial x_t+\mu Q\cdot\partial y_t)\cdot dt=U,$$

wo U nun eine bekannte Funktion von x und y ist, die auch noch z enthält, während Z die willkührliche unbestimmte Constante vorstellen soll, welche zu diesem Integral U noch hinzutritt und welche weder x noch y enthalten kann, welche daher bloß als eine Funktion von z allein angesehen werden darf. Man sucht nun Z so, daß

9) $$U+Z=0$$

die gesuchte Integral-Gleichung der 1.) ist. Zu dem Ende differenziirt man letztere und erhält

10) $$\partial U_x\cdot\partial x_t+\partial U_y\cdot\partial y_t+(\partial U_z+\partial Z_z)\cdot\partial z_t=0,$$

während aus 8.)

$$\partial U_x=\mu P \quad\text{und}\quad \partial U_y=\mu Q$$

hervorgeht, so daß die Gleichung 10.) so wird:

11) $$\mu P\cdot\partial x_t+\mu Q\cdot\partial y_t+(\partial U_z+\partial Z_z)\cdot\partial z_t=0.$$

Da nun diese Gleichung mit der 1.) zusammenfallen soll, so muß

$$\partial U_z+\partial Z_z=\mu R \quad\text{oder}\quad \partial Z_z=\mu R-\partial U_z$$

werden, so daß man noch

12) $$Z=\int(\mu R-\partial U_z)\cdot dz$$

erhält, während aus $\mu R-\partial U_z$ alle x von selbst herausfallen müssen, sobald man statt y seinen aus 9.) genommenen Werth substituirt. Kann man nun beweisen, daß dieses allemal der Fall ist, so oft sich die Bedingungs-Gleichung ⊙.) erfüllt sieht, so ist das so eben beschriebene Verfahren zulässig.

Damit aber in $\mu R - \partial U_x$ kein x mehr enthalten ſey, muß

13) $$\partial(\mu R - \partial U_x)_{(x)} = 0,$$

d. h. $$\partial(\mu R)_x + \partial(\mu R)_y \cdot \partial y_x - \partial^{1,1} U_{x,x} - \partial^{1,1} U_{y,x} \cdot \partial y_x = 0$$

ſeyn, während ∂y_x aus $\partial(U+Z)_{(x)} = 0$, d. h. aus

$$\partial U_x + \partial U_y \cdot \partial y_x = 0$$

entnommen werden muß. Dadurch geht nun dieſe Bedingungs-Gleichung 3.) über in

14) $$(\partial(\mu R)_x - \partial^{1,1} U_{x,x}) \cdot \partial U_y - (\partial(\mu R)_y - \partial^{1,1} U_{y,x}) \cdot \partial U_x = 0.$$

Nun iſt aber

$$\partial U_x = \mu P \quad \text{und} \quad \partial U_y = \mu Q,$$

alſo $$\partial^{1,1} U_{x,x} = \partial(\mu P)_x \text{ und } \partial^{1,1} U_{y,x} = \partial(\mu Q)_x.$$

Subſtituirt man alſo dieſe Werthe in die Gleichung 14.), ſo erhält man

$$[\partial(\mu R)_x - \partial(\mu P)_x] \cdot Q - [\partial(\mu R)_y - \partial(\mu Q)_x] \cdot P = 0$$

d. h. wenn man μP, μQ, μR als Produkte differenziirt und aufhebt,

15) $$[\mu(\partial R_x - \partial P_z) + R \cdot \partial \mu_x] \cdot Q - [\mu(\partial R_y - \partial Q_z) + R \cdot \partial \mu_y] \cdot P = 0.$$

Weil aber μ ein integrirender Faktor geweſen iſt von $P \cdot \partial x_t + Q \cdot \partial y_t$, ſo genügt er (nach §. 40. II.) der Bedingungs-Gleichung

16) $$\mu(\partial P_y - \partial Q_x) + P \cdot \partial \mu_y - Q \cdot \partial \mu_x = 0.$$

Eliminirt man aber nun aus beiden Gleichungen 15.) und 16.) $\partial \mu_x$ (dadurch daß man die 16.) mit R multiplicirt und zur 15. addirt), ſo kann man die entſtehende Gleichung durch μ dividiren, und ſie geht dann in die Bedingungs-Gleichung ⊙.) über. Die Bedingungs-Gleichung ⊙.) iſt daher keine andere als die 13.), welches zu erweiſen war.

Iſt alſo Z aus 12.) und U aus 8.) gefunden, ſo iſt die Gleichung 9.) das Integral der Gleichung 1.).

§. 49.

Iſt die Bedingungs-Gleichung ⊙.) des §. 48.) nicht erfüllt, — exiſtirt alſo nicht eine einzige Gleichung zwiſchen x, y und z, welche als Integral der Gleichung

1) $$P \cdot \partial x_t + Q \cdot \partial y_t + R \cdot \partial z_t = 0$$

angeſehen werden kann, ſo darf man nur zwiſchen x, y, z noch irgend eine zweite beliebige Differential- oder Ur-Gleichung annehmen, um zwei Gleichungen zu haben, aus denen man dann nach dem Verfahren des §. 43.) y und z in x ausgedrückt finden kann. Das Problem gehört alſo dann zu den unbeſtimmten, und ſchließt ſich an dasjenige der gemeinen Algebra an,

wo eine einzige Gleichung zwischen mehr als einen Unbekannten gegeben seyn sollte.

Die Rechnung IV. des §. 48.) läßt aber augenblicklich sehen, daß wenn man μ und U genau so wie in §. 48. IV.) findet, und statt — Z eine völlig beliebige Funktion φ_z setzt, dann die beiden Gleichungen

$$2) \quad \left\{ \begin{array}{c} U_{x,y,z} = \varphi_z \\ \partial U_z - \mu R = \partial \varphi_z \end{array} \right\}$$

in Verbindung, d. h. als zwei Gleichungen zwischen den drei Unbekannten x, y und z, der Gleichung 1.) allemal genügen, während φ_z eine ganz willkührliche Funktion von z bleibt, sobald nur μ irgend einer der integrirenden Faktoren von $P \cdot \partial x_t + Q \cdot \partial y_t$ ist.

Diese Gleichungen 2.) enthalten zwar nicht alle Auflösungen, welche die unbestimmte Aufgabe zuläßt, dagegen, wegen der Willkührlichkeit der Funktion φ_z, doch eine unendliche Menge verschiedener Auflösungen nach den unendlich vielen verschiedenen Formen, welche dem φ_z gegeben werden können. — Sehr ausführliches hierüber findet man im „System d. Mathemat." Th. VI.

Zweiter Abschnitt.

Integration der Partial-Gleichungen.

§. 50.

Integration der linearen Partial-Gleichungen der ersten Ordnung.

Wenn eine Differential-Gleichung zwischen drei Veränderlichen x, y und z, außer diesen Veränderlichen bloß noch Ableitungen von z nach x allein enthält, so ist solche nicht als eine Partial-Gleichung anzusehen, sondern als eine totale Differential-Gleichung zwischen den beiden Veränderlichen x und z, die auch noch einen constanten Parameter y enthält, gerade

ſo wie ſie noch mehrere ſolche conſtante Parameter a, b, c, etc. etc. enthalten kann.

Unter den einfachſten Partial-Gleichungen dagegen ſteht die lineäre

1) $$P\cdot\partial z_x+Q\cdot\partial z_y=R$$

oben an, wo P, Q und R gegebene Funktionen von x, y und z ſind. — Ihr Integral wird nach folgenden von Lagrange gegebenen praktiſchen Regeln gefunden.

Man integrirt nämlich die beiden totalen Gleichungen

2) $$\frac{\partial x_t}{P}=\frac{\partial y_t}{Q}=\frac{\partial z_t}{R}$$

zwiſchen den drei Veränderlichen x, y und z (nach §. 43.), indem man alle drei als Funktionen eines vierten t, oder, was daſſelbe iſt, indem man zwei derſelben als Funktionen des dritten anſieht. Die beiden Integral-Gleichungen zwiſchen x, y und z, welche man dadurch erhält und welche zwei willkührliche Conſtanten c und c' in ſich aufnehmen, löſt man nach letzteren algebraiſch auf, ſo daß man

3) $c=f_{x,y,z}$ und 4) $c'=\varphi_{x,y,z}$

erhält, wo alſo f und φ beſtimmte und bekannte Funktionen von x, y und z ſind. Zuletzt nimmt man

5) $\Pi_{f,\varphi}=0$ oder 6) $f=F_\varphi$,

wo Π eine ganz willkührliche unbeſtimmte Funktion von f und φ, oder wo F eine ganz willkührliche unbeſtimmte Funktion von φ vorſtellt; — und dieſe Gleichung 5.) oder 6.) iſt das geſuchte Integral der gegebenen lineären Partial-Gleichung 1.).

Differenziirt man nämlich $f=F_\varphi$ ſowohl nach x, als auch nach y, ſo erhält man

7) $$\partial f_x+\partial f_z\cdot\partial z_x=\partial F_\varphi\cdot(\partial\varphi_x+\partial\varphi_z\cdot\partial z_x)$$

und

8) $$\partial f_y+\partial f_z\cdot\partial z_y=\partial F_\varphi\cdot(\partial\varphi_y+\partial\varphi_z\cdot\partial z_y),$$

und eliminirt man nachgehends aus allen drei Gleichungen 6.—8.) ſowohl F_φ als auch ∂F_φ, d. h. aus den beiden Gleichungen 7.) und 8.), welche bereits F_φ nicht mehr enthalten, noch

noch ∂F_φ, so erhält man genau die gegebene lineäre Partial-Gleichung 1.) wieder; deshalb wird die Gleichung 6.) das Integral der 1.) genannt.

Zu diesem Verfahren gelangt man aber mittelst folgender Schlüsse: Wird nämlich das gesuchte Integral der Gleichung 1.) durch

9) $$\Pi_{x,y,z} = 0$$

vorgestellt, so muß, wenn man aus

$$\partial\Pi_{(x)} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \partial\Pi_x + \partial\Pi_z \cdot \partial z_x = 0$$

und

$$\partial\Pi_{(y)} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \partial\Pi_y + \partial\Pi_z \cdot \partial z_y = 0$$

die Ableitungen ∂z_x und ∂z_y findet, und diese Werthe in die 1.) substituirt, nothwendig eine identische Gleichung, nämlich

10) $$P \cdot \partial\Pi_x + Q \cdot \partial\Pi_y + R \cdot \partial\Pi_z = 0$$

entstehen. Die gesuchte Funktion $\Pi_{x,y,z}$ hat also die Eigenschaft, daß sie die Gleichung 10.) identisch macht (nach x allein, nach y allein, und nach z allein d. h.) während x, y, z als von einander ganz unabhängig angesehen werden. Und umgekehrt: jede Funktion $\Pi_{x,y,z}$, welche die Gleichung 10.) auf diese Weise identisch macht, liefert eine Gleichung $\Pi = 0$, welche ein, der Partial-Gleichung genügender Werth seyn muß, welche also eben so gut ein besonderes, als das allgemeine Integral der gegebenen Partial-Gleichung 1.) seyn kann. Man hat aber, sobald man sich x, y, z als Funktionen von t denkt,

11) $$\partial\Pi_{(t)} = \partial\Pi_x \cdot \partial x_t + \partial\Pi_y \cdot \partial y_t + \partial\Pi_z \cdot \partial z_t.$$

Eliminirt man nun aus den Gleichungen 10.) und 11.) einen der drei gemeinschaftlichen Koefficienten $\partial\Pi_x$, $\partial\Pi_y$ oder $\partial\Pi_z$, z. B. den letzteren, so erhält man:

12) $$R \cdot \partial\Pi_{(t)} = (R \cdot \partial x_t - P \cdot \partial z_t) \cdot \partial\Pi_x + (R \cdot \partial y_t - Q \cdot \partial z_t) \cdot \partial\Pi_y,$$

welche Gleichung nun statt der 10.) steht, und welcher daher genügt werden muß. Dieser Gleichung 12.) wird aber offenbar am allgemeinsten genügt, wenn man x, y, z als solche Funktionen von t sich denkt, welche die Koefficienten von $\partial\Pi_x$ und $\partial\Pi_y$ einzeln der Null gleich, welche also

$$R \cdot \partial x_t - P \cdot \partial z_t = 0 \quad \text{und} \quad R \cdot \partial y_t - Q \cdot \partial z_t = 0,$$

d. h.
$$\frac{\partial x_t}{P} = \frac{\partial z_t}{R} \quad \text{und} \quad \frac{\partial y_t}{Q} = \frac{\partial z_t}{R}$$

machen, und wenn zuletzt statt Π eine solche Funktion von x, y, z gesetzt wird, daß man noch $\partial\Pi_{(t)} = 0$ erhält, so oft man statt x, y, z die Funktionen von t setzt, welche diesen beiden Gleichungen genügen. Diesen letzten Zweck erreicht aber das oben gegebene Verfahren, wenn man $\Pi_{t,\varphi}$ statt $\varkappa_{x,y,z}$ setzt, weil nach selbigem die gedachten Funktionen x, y, z von t, die

Ausdrücke f und φ in Constanten (nach t) verwandeln, so daß da
$\delta(\Pi_{f,\varphi})_{(t)}$ nothwendig der Null gleich wird.

Beispiel. Es sey zu integriren die Partial-Gleichung

1′) $$x \cdot \partial z_x + y \cdot \partial z_y = nz.$$

Man integrirt also zuerst die beiden totalen Gleichungen

2′) $$\frac{\partial x_t}{x} = \frac{\partial y_t}{y} = \frac{\partial z_t}{nz},$$

d. h.

3′) $$\frac{\partial x_t}{x} = \frac{\partial y_t}{y} \quad \text{und} \quad \frac{n \cdot \partial x_t}{x} = \frac{\partial z_t}{z},$$

und erhält

4′) $$y = cx \quad \text{und} \quad c' x^n = z,$$

folglich

5′) $$c = \frac{y}{x} \quad \text{und} \quad c' = \frac{z}{x^n}.$$

Man nimmt also

6′) $$\varphi = \frac{y}{x} \quad \text{und} \quad f = \frac{z}{x^n}$$

und hat dann als gesuchtes Integral

7′) $$\frac{z}{x^n} = F_{y:x} \quad \text{oder} \quad z = x^n \cdot F_{y:x}\ ^*),$$

wo F eine ganz willkührliche Funktion von $\frac{y}{x}$ vorstellt.

---

*) Setzt man also statt $F_{y:x}$ nach und nach $a\frac{y}{x}$, oder $a\frac{y}{x} + b\frac{y}{x}$
oder $sin\frac{y}{x}$ oder $log\, y - log\, x$ oder $a\frac{y}{x} - b\frac{x}{y}$, oder $a\frac{y^\mu}{x^\mu} - b\frac{x^\nu}{y^\nu}$
etc. etc., so erhält man nach und nach die besonderen Integrale

$z = ax^{n-1}y$; $\quad z = ax^{n-1}y + bx^{n-2}y^2$;

$z = x^n \cdot sin\frac{y}{x}$; $\quad z = x^n(log\, y - log\, x)$;

$z = ax^{n-1}y - b\frac{x^{n+1}}{y} + cx^n$; $\quad z = ax^{n-\mu}y^\mu - b\frac{x^{n+\nu}}{y^\nu}$;

u. s. w. s. — Jedes dieser besondern Integrale hat aber die Eigensch
daß wenn man solches nach x und nach y differenziirt, und dann aus al
drei Gleichungen z, ∂z_x und ∂z_y findet, solche Werthe aber in die Gl
chung 1′.) substituirt, letztere identisch $0 = 0$ wird.

Anmerkung. Wollte man die lineäre Partial-Gleichung

$$P \cdot \partial u_x + Q \cdot \partial u_y + R \cdot \partial u_z = S$$

zwiſchen den vier Veränderlichen x, y, z und u integriren, wo P, Q, R und S gegebene Funktionen von x, y, z und u vorſtellen, ſo würde man wie folgt verfahren:

Man integrirt die drei totalen Differential-Gleichungen

$$\frac{\partial x_t}{P} = \frac{\partial y_t}{Q} = \frac{\partial z_t}{R} = \frac{\partial u_t}{S}$$

und erhält drei Ur-Gleichungen zwiſchen x, y, z und u und noch drei willkührlichen Conſtanten c, c′ und c″. Dieſe letztern drei Gleichungen löſt man nun nach dieſen Conſtanten c, c′, c″ auf, ſo daß man erhält

$$c = f_{x,y,z,u}, \quad c' = \varphi_{x,y,z,u} \quad \text{und} \quad c'' = \psi_{x,y,z,u}.$$

Hernach nimmt man

$$\Pi_{f,\varphi,\psi} = 0 \quad \text{oder} \quad f = F_{\varphi,\psi},$$

wo Π eine ganz willkührliche Funktion von f, φ und ψ, oder wo F eine ganz willkührliche Funktion von φ und ψ iſt, und dieſe Gleichung iſt das allgemeine Integral der gegebenen Partial-Differential-Gleichung.

Endlich iſt es leicht, dies Verfahren auf lineäre Partial-Gleichungen der erſten Ordnung zwiſchen beliebig viel Veränderlichen auszudehnen.

§. 51.

Integration der nicht lineären Partial-Gleichungen der erſten Ordnung.

Es iſt dem Lagrange auch gelungen die Integration der nicht lineären Partial-Gleichungen der erſten Ordnung auf die der lineären zurückzuführen.

Iſt nämlich die beliebige Partial-Gleichung der erſten Ordnung zwiſchen drei Veränderlichen

$$1) \qquad F_{x,y,z,\partial z_x,\partial z_y} = 0$$

zu integriren, ſo führt man zwei neue Veränderliche p und q mittelſt der Gleichungen

2) $\partial z_x = p$ und $\partial z_y = q$

ein, ſo daß die gegebene Gleichung 1.) übergeht in

3) $F_{x,y,z,p,q} = 0;$

und man hat nun p und q als ſolche Funktionen von x, y und z, zu gleicher Zeit aber z als eine ſolche Funktion von x und y zu ſuchen, daß den drei Gleichungen 2.) und 3.) am allgemeinſten ein Genüge geſchieht. Findet man aber aus der Gleichung 3.) q in x, y, z und p ausgedrückt, alſo

4) $q = q_{x,y,z,p}$,

ſo iſt dieſer Gleichung 3.) genügt, ſobald man nur überall unter q dieſe Funktion $q_{x,y,z,p}$ vorgeſtellt ſich denkt. — Es bleibt daher jetzt nur noch, unter dieſer letztern Vorausſetzung, den Gleichungen 2.), d. h. wenn man x, y und z als Funktionen von t ſich denkt, der einzigen totalen Differential-Gleichung

5) $\partial z_t - p \cdot \partial x_t - q_{x,y,z,p} \cdot \partial y_t = 0$

zu genügen übrig *), d. h. man darf jetzt nur noch die totale Gleichung 5.) integriren, dabei aber ſtatt p eine ganz beliebige Funktion von x, y und z ſetzen, welche jedoch die Gleichung 5.) integrabel macht, d. h. welche der Bedingungs-Gleichung der Integrabilität (§. 48. I. ⊙.) genügt, nämlich der Gleichung

6) $\partial p_y - \partial q_{(x)} + q \cdot \partial p_x - p \cdot \partial q_{(x)} = 0.$

Nun iſt aber (nach 4.)

7) $\partial q_{(x)} = \partial q_x + \partial q_p \cdot \partial p_x$ und $\partial q_{(z)} = \partial q_z + \partial q_p \cdot \partial p_z$;

und weil q durch die Gleichung 3.) gegeben iſt, ſolche Gleichung 3.) alſo identiſch wird, wenn man ſtatt q die Funktion

---

*) Denkt man ſich nämlich x, y, z als Funktionen von t, ſo iſt allemal, wenn z die geſuchte Funktion von x und y vorſtellt,

$$\partial z_t = \partial z_x \cdot \partial x_t + \partial z_y \cdot \partial y_t,$$

d. h. $\partial z_t = p \cdot \partial x_t + q \cdot \partial y_t,$

oder $\partial z_t - p \cdot \partial x_t - q \cdot \partial y_t = 0,$

und das Integral dieſer totalen und integrablen Differential-Gleichung giebt wieder die Ur-Gleichung zwiſchen x, y und z, welche die geſuchte Funktion z von x und y liefert.

$q_{x,y,z,p}$ substituirt sich denkt, so giebt sie noch, wenn man sie nach allem x, nach allem z, und nach allem p differenziirt:

8) $\partial F_x + \partial F_q \cdot \partial q_x = 0, \qquad \partial F_z + \partial F_q \cdot \partial q_z = 0$

und $\qquad \partial F_p + \partial F_q \cdot \partial q_p = 0.$

Dadurch geht aber die Gleichung 6.), in so fern man statt $\partial q_{(x)}$ und $\partial q_{(z)}$ ihre Werthe aus 7.) und dann statt ∂q_x, ∂q_z und ∂q_p ihre Werthe aus 8.) substituirt, über in

9) $\partial F_q \cdot \partial p_y + \partial F_p \cdot \partial p_x + (q \cdot \partial F_q + p \cdot \partial F_p) \cdot \partial p_z$
$= -(\partial F_x + p \cdot \partial F_z),$

wo man sich unter q die in 4.) gefundene Funktion $q_{x,y,z,p}$ zu denken hat.

Man hat daher nun der lineären Gleichung 9.) nach §. 50.) zu genügen, dann q aus 4.) dazu zu finden, — beide in x, y und z ausgedrückt, — dann aber diese Werthe in die totale Differential-Gleichung

10) $\partial z_t - p \cdot \partial x_t - \partial y_t = 0,$

statt p und q zu substituiren und letztere nach Anleitung des vorhergehenden Abschnittes zu integriren und man hat die gesuchte Ur-Integral-Gleichung zwischen x, y und z, welche der gegebenen Partial-Gleichung zukommt.

Findet man nur ein besonderes Integral der Gleichung 9.), so erhält man auch nur ein besonderes Integral aus 10.) für die Gleichung 1.). — Findet man aber das allgemeinste Integral der Gleichung 9.), so erhält man aus 10.) auch das allgemeinste Integral der Gleichung 1.). Weil aber dann p und q eine willkührliche Funktion von einer bestimmten Funktion von x, y und z in sich aufnehmen, so erfordert das Integriren der totalen Differential-Gleichung 10.) dann noch besondere Umformungen, wegen welcher wir auf das „System der Mathematik" Th. VII. §. 436 seqq. verweisen müssen.

Anmerkung 1. Man hat diese Methode des Lagrange lange vergebens auf Gleichungen zwischen vier oder mehr Veränderlichen zu erweitern gesucht, bis es endlich dem Jacobi gelungen ist, diese Erweiterung in so fern durchzusetzen, als er

solche von einer andern durch Pfaff gegebenen Methode abhängig machte. In dem „System der Mathematik Th. VII §. 439. seqq." findet man neben dem Verfahren des Jacobi auch noch die ganz unabhängige Erweiterung dieser Methode, welche jedoch im Wesentlichen mit der des Jacobi zusammenfällt und nur zuletzt von ihr abweicht, so daß sie vermöge dieser Abweichung selbstständig wird.

Anmerkung 2. Für besondere Fälle hat man auch besondere Methoden aufgefunden.

Ist z. B., wenn

1) $$\partial z_x = p \quad \text{und} \quad \partial z_y = q$$

gesetzt wird, die gegebene Partial-Gleichung auf die Form

2) $$f_{p,x} = F_{q,y}$$

zu bringen, so setze man jede dieser beiden gleichen Funktionen einem neuen Veränderlichen w gleich, und finde aus

3) $$f_{p,x} = w \quad \text{und} \quad F_{q,y} = w$$

zunächst

4) $$p = \varphi_{x,w} \quad \text{und} \quad q = \psi_{y,w}.$$

Sind nun x und y als willkührliche von einander ganz unabhängige Funktionen von t gedacht, so sind auch z, p, q und w (von diesen erstern abhängige) Funktionen von t, dergestalt, daß man hat (aus $\partial z_t = \partial z_x \cdot \partial x_t + \partial z_y \cdot \partial y_t$)

5) $$\partial z_t = \varphi_{x,w} \cdot \partial x_t + \psi_{y,w} \cdot \partial y_t.$$

Findet man nun, indem man w als constant ansieht,

6) $$\int \varphi_{x,w} \cdot dx = P_{x,w} \quad \text{und} \quad \int \psi_{y,w} \cdot dy = Q_{y,w},$$

so ist, wenn jetzt w auch als Funktion von t angesehen wird,

$$\partial P_{(t)} = \partial P_x \cdot \partial x_t + \partial P_w \cdot \partial w_t,$$

also

7) $$\varphi_{x,w} \cdot \partial x_t = \partial P_x \cdot \partial x_t = \partial P_{(t)} - \partial P_w \cdot \partial w_t;$$

und

$$\partial Q_{(t)} = \partial Q_x \cdot \partial x_t + \partial Q_w \cdot \partial w_t,$$

also

8) $$\psi_{y,w} \cdot \partial y_t = \partial Q_y \cdot \partial y_t = \partial Q_{(t)} - \partial Q_w \cdot \partial w_t.$$

Die Gleichung 5.) geht dadurch über in

9) $\partial z_t = \partial P_{(t)} + \partial Q_{(t)} - (\partial P_w + \partial Q_w) \cdot \partial w_t$,

während ∂P_w und ∂Q_w auch noch bezüglich x und y enthalten, welche ebenfalls als Funktionen von t gedacht worden sind, so daß, wenn man $(\partial P_w + \partial Q_w) \cdot \partial w_t$ nach allem t integriren sollte, man nicht $P+Q$ erhalten würde, wie dies der Fall seyn müßte, wenn ∂P_w kein x, und ∂Q_w kein y mehr enthielte. Setzt man aber

10) $\partial P_w + \partial Q_w = \partial \Pi_w$,

indem man sich unter Π_w, also auch unter $\partial \Pi_w$ eine ganz beliebige Funktion von w allein denkt, die weder x noch y noch z enthält, so kann man von der Gleichung 9.) links und rechts das Integral nach allem t nehmen, und man erhält dann

11) $z = P + Q - \Pi_w$.

Denkt man sich nun Π ganz willkührlich, und dann aus den Gleichungen 10.) und 11.) den Veränderlichen w eliminirt, so hat man die Gleichung zwischen x, y und z, welche auch noch eine willkührliche Funktion Π enthält, und welche als das Integral der Gleichung 2.) angesehen werden kann *).

Anmerkung 3. Ist, um ein zweites Beispiel zu geben, die zu integrirende Partial-Gleichung noch einfacher, nämlich bloß

1) $f_{p,q} = 0$ d. h. $p = p_q$,

während

*) Sind x, y und z rechtwinkliche Koordinaten-Werthe im Raume, so stellt die Gleichung 11.) nach den verschiedenen Werthen von w eine Reihe von Flächen vor, von denen je zwei unendlich wenig verschieden sind; und da die Gleichung 10.) nichts weiter ist als das, was aus der 11.) sich ergiebt, wenn man sie nach dem Parameter w differenziirt, so drücken die Gleichungen 10.) und 11.) in Verbindung, wenn w eliminirt wird, die Einhüllungs-Fläche aller der Flächen 11.) aus (nach I. Bd. §. 186.). — Und da in 11.) die Funktion Π jede beliebige ist, so drücken die Gleichungen 10.) und 11.) in Verbindung unendlich viele solche Einhüllungs-Flächen aus, welche alle der gegebenen Partial-Gleichung $f_{p,x} = F_{q,y}$ angehören; d. h. letztere Gleichung drückt eine Eigenschaft aus, welche allen diesen unendlich vielen Einhüllungs-Flächen gemein ist.

2) $\partial z_x = p$ und $\partial z_y = q$

vorausgeſetzt wird, ſo hat man zu integriren die totale Differential-Gleichung

3) $\partial z_t = p_q \cdot \partial x_t + q \cdot \partial y_t$.

Nimmt man nun links und rechts die Integrale nach allem t, und integrirt man rechts beide Glieder theilweiſe (d. h. wendet man die Formel §. 4. N. 3.) an, ſo erhält man

4) $z = p_q \cdot x + q \cdot y - \int (x \cdot \partial p_q + y) \cdot \partial q_t \cdot dt$.

Nimmt man daher die beiden Gleichungen

5) $\begin{cases} z = p_q \cdot x + q \cdot y - \Pi_q \\ 0 = x \cdot \partial p_q + y - \partial \Pi_q, \end{cases}$

in denen Π_q eine ganz willkührliche Funktion vorſtellt, und eliminirt man q aus ihnen, ſo erhält man das verlangte Integral der Gleichung 1.)

§. 52.

Allgemeine Betrachtungen über die Partial-Gleichungen der erſten Ordnung.

1) Während die totale Differential-Gleichung der erſten Ordnung bei ihrer Integration eine willkührliche Conſtante einführt, nimmt das allgemeine Integral einer Partial-Gleichung der erſten Ordnung zwiſchen x, y und z, allemal eine willkührliche Funktion Π_ω von ω auf, wobei ω eine beſtimmte und aus der gegebenen Partial-Gleichung ſelbſt zu findende Funktion von x, y und z vorſtellt. —

In der That, wenn man eine Gleichung

1) $f_{x,y,z,\Pi_\omega} = 0$

nach x und nach y differenziirt, ſo erhält man

2) $\partial f_x + \partial f_z \cdot \partial z_x + \partial f_{\Pi} \cdot \partial \Pi_\omega \cdot (\partial \omega_x + \partial \omega_z \cdot \partial z_x) = 0$

3) $\partial f_y + \partial f_z \cdot \partial z_y + \partial f_{\Pi} \cdot \partial \Pi_\omega \cdot (\partial \omega_y + \partial \omega_z \cdot \partial z_y) = 0.$

Aus dieſen drei Gleichungen, da ω, alſo auch $\partial\omega_x$, $\partial\omega_y$ und $\partial\omega_z$ bekannte Funktionen von x, y und z ſind, kann man die beiden willkührlichen Ausdrücke Π_ω und $\partial\Pi_\omega$ eliminiren, und man wird eine Gleichung bloß zwiſchen x, y, z, ∂z_x und ∂z_y erhalten, welche von Π_ω keine Spur mehr hat, und welche die gegebene Partial-Gleichung der erſten Ordnung ſeyn muß, von welcher die Gleichung 1.) das allgemeine Ur-Integral iſt.

Das allgemeine Integral der Partial-Gleichung der ersten Ordnung zwischen vier Veränderlichen x, y, z, t nimmt dagegen eine willkührliche Funktion $\Pi_{\omega,\omega'}$ in sich auf, während ω und ω' bestimmte Funktionen von x, y und z vorstellen. — U. s. w. f.

2) In dem allgemeinen Integral einer Partial-Gleichung zwischen drei Veränderlichen stecken alle besonderen, und diese letzteren können beliebig viele willkührliche Constanten in sich aufnehmen, in so fern man statt Π_ω einen Ausdruck setzen kann, der neben der bestimmten Funktion ω (von x, y und z) noch beliebig viele Constanten in sich aufnimmt. — Lagrange hat unter den besonderen Integralen dasjenige hervorgehoben, welches zwei willkührliche Constanten enthält, solches ein vollständiges Integral genannt und gezeigt, wie aus selbigem das allgemeine Integral wiederum gefunden werden könne.

Ist nämlich $f_{x,y,z,a,b}=0$ das vollständige Integral, so setzt er statt b eine ganz willkührliche Funktion Π_ω, statt a aber ω selbst, und eliminirt dann aus

$$f_{x,y,z,\omega,\Pi_\omega}=0 \quad \text{und} \quad \partial f_{(\omega)}=0 \quad \text{d. h.} \quad \partial f_\omega+\partial f_\Pi\cdot\partial\Pi_\omega=0$$

den Parameter ω; und hat dann das allgemeine Integral.

3) Zu diesen Arbeiten des Lagrange haben wir noch die merkwürdige Thatsache hinzugefügt (Syst. d. Mathem. Th. V. Kap. XIII.), daß man schon aus einem besonderen Integral, welches nur eine einzige willkührliche Constante a enthält, und welches wir ein ausreichendes genannt haben, das allgemeine Integral finden könne. — Man setzt nämlich in dem ausreichenden Integral

$$f_{x,y,z,a}=0,$$

statt a eine willkührliche Funktion Π_ω und man hat das allgemeine Integral, sobald es noch gelingt ω zu finden. Um aber ω zu finden, setzt man in $f_{x,y,z,a}=0$ bloß ω statt a, so daß man erhält

$$f_{x,y,z,\omega} = 0$$

und eliminirt aus dieser Gleichung und aus deren beiden ersten Ableitungs-Gleichungen

$$\partial f_x + \partial f_z \cdot \partial z_x + \partial f_\omega \cdot (\partial \omega_x + \partial \omega_z \cdot \partial z_x) = 0$$
$$\partial f_y + \partial f_z \cdot \partial z_y + \partial f_\omega \cdot (\partial \omega_y + \partial \omega_z \cdot \partial z_y) = 0,$$

sowohl ∂z_x als auch ∂z_y, und es bleibt eine Gleichung übrig zwischen x, y, z, ω, $\partial \omega_x$, $\partial \omega_y$ und $\partial \omega_z$, welche, da ihr $\omega = const.$ genügt, allemal in eine lineäre verwandelt und daher nach §. 50.) integrirt werden kann, während man ihr Integral nicht einmal braucht, sondern nur irgend einen ihr genügenden Werth statt ω nehmen kann, der weder eine willkührliche Funktion noch eine willkührliche Constante in sich aufzunehmen braucht. Diesen letztern findet man aber in den meisten Fällen versuchsweise am schnellsten.

4) In den Anwendungen erst lassen sich die willkührlichen Funktionen, welche die Integration einführt, nach den verschiedenen Nebenbedingungen der Aufgabe näher bestimmen, und kann solches in der Integral-Rechnung selber nicht geschehen.

§. 53.

Einiges über Integration der Partial-Gleichungen der zweiten Ordnung.

Da jede totale Differential-Gleichung der zweiten Ordnung zunächst ein erstes Integral mit einer willkührlichen Constante, und dieses, als Differential-Gleichung der ersten Ordnung, wiederum ein Integral mit einer zweiten willkührlichen Constante hat, so könnte man analoges auch von den Partial-Gleichungen der zweiten Ordnung vermuthen. Man könnte also glauben, daß eine Partial-Gleichung der zweiten Ordnung zwischen x, y und z allemal ein erstes Integral mit einer willkührlichen Funktion φ_ω zulasse, welches jedoch, als Partial-Gleichung der ersten Ordnung, abermals integrirt werden kann und dann noch eine willkührliche Funktion ψ_ω einführt. —

Wie häufig aber diese Vermuthung in Einzelfällen sich gerechtfertigt sehen mag, so ist sie doch im Allgemeinen falsch.

I. Zuerst wollen wir zeigen, daß nicht jede Partial-Gleichung $F=0$ der zweiten Ordnung zwischen drei Veränderlichen ein erstes Integral hat, obgleich von jeder ein Ur-Integral existirt. Existirte nämlich ein erstes Integral von $F=0$, und wäre solches

$$W_{x,y,z,p,q}=0, \quad \text{wo } \partial z_x=p \text{ und } \partial z_y=q$$

gesetzt worden ist, so enthielte $\partial W_{(x)}=0$ die Ableitung ∂p_x d. h. $\partial^2 z_x$ und noch die Ableitung ∂q_x d. h. $\partial^{1,1} z_{x,y}$; während $\partial W_{(y)}=0$ sowohl $\partial^{1,1} z_{x,y}$ als auch $\partial^2 z_y$ enthalten würde. Soll nun aus $F=0$, $W=0$, $\partial W_{(x)}=0$ und $\partial W_{(y)}=0$, dadurch daß man $\partial^2 z_x$, $\partial^{1,1} z_{x,y}$ und $\partial^2 z_y$ eliminirt, eine identische Gleichung hervorgehen können, so muß, wenn aus $F=0$, $\partial W_{(x)}=0$ und $\partial W_{(y)}=0$ die beiden Ausdrücke $\partial^2 z_x$ und $\partial^2 z_y$ eliminirt werden, aus der entstehenden Eliminations-Gleichung die Ableitung $\partial^{1,1} z_{x,y}$, die wir durch s bezeichnen, von selbst herausfallen, weil sie in $W=0$ ohnedies nicht vorkommt.

Nimmt nun die Eliminations-Gleichung im Allgemeinen die Form

$$A+B\cdot s+C\cdot s^2+\cdots=0$$

an, so muß $A=0$, $B=0$, $C=0$, etc. etc. seyn, wenn ein solches erstes Integral $W=0$ von $F=0$ soll existiren können. — Diese Gleichungen $A=0$, $B=0$, $C=0$, etc. etc. sind also die **Bedingungs-Gleichungen der Existenz eines ersten Integrals**, und diese kann man zur Auffindung dieses ersten Integrals selbst wieder benutzen. (S. Syst. d. Mathem. Th. V. §. 322.)

II. Ferner würde man aus einer Ur-Gleichung $W_{x,y,z}=0$, und deren fünf Ableitungs-Gleichungen $\partial W_{(x)}=0$, $\partial W_{(y)}=0$, $\partial^2 W_{(x)}=0$, $\partial^{1,1} W_{(x,y)}=0$ und $\partial^2 W_{(y)}=0$ nicht die sechs willkührlichen Funktionen φ_ω, ψ_ω, $\partial\varphi_\omega$, $\partial\psi_\omega$, $\partial^2\varphi_\omega$ und $\partial^2\psi_\omega$ eliminiren, und so zu einer Partial-Gleichung der zweiten Ordnung gelangen können. — Im Gegentheil kann das allgemeine

Ur-Integral einer Partial-Gleichung der zweiten Ordnung z
ſchen drei Veränderlichen, wenn es in geſchloſſener Form exiſt
nur dieſe Form haben

$$W_{x,y,z,v} = 0, \quad \text{wo} \quad \begin{cases} \text{entweder} & v = \varphi_\omega + \psi_{\omega'} \\ \text{oder} & v = \omega' \cdot \varphi_\omega + \psi_\omega \end{cases}$$

iſt, während ω und ω' gegebene Funktionen von x, y und
vorſtellen; weil nur dann aus den ſechs Gleichungen alles v
den willkührlichen Funktionen abhängige eliminirt, alſo die
gebene Partial-Gleichung wieder erhalten werden kann.

§. 54.

Fortſetzung.

Uebrigens wollen wir hier nur einige Beiſpiele der In
gration von Partial-Gleichungen der zweiten Ordnung (in
ſchloſſener Form) mittheilen.

I. Iſt

1) $$\partial^{1,1} z_{x,y} + P_{x,y} \cdot \partial z_x = Q_{x,y}$$

zu integriren, ſo führt man einen neuen Veränderlichen v e
mittelſt der Gleichung

2) $$\partial z_x = v;$$

und die Gleichung 1.) nimmt dann die Form an:

3) $$\partial v_y + P_{x,y} \cdot v = Q_{x,y}.$$

Dieſe Gleichung kann nun als eine totale Gleichung zwiſch
y und v (in welcher x als eine Conſtante angeſehen wird) n
§. 40.) integrirt werden und giebt eine Gleichung zwiſchen
y, x und einer Conſtante, welche auch x in ſich aufnehm
kann, und welche wir durch X bezeichnen können, ſo daß
eine willkührliche Funktion von x vorſtellt. Dieſe letztere G
chung giebt dann v in y, x und X ausgedrückt, nämlich

4) $$v = v_{y,x,X};$$

und die Gleichung 2.) d. h. die Gleichung

5) $$\partial z_x = v_{y,x,X}$$

iſt dann wiederum eine totale Differential-Gleichung zwiſch
z und x, in welcher y als conſtant angeſehen werden m

wenn sie nach §. 40.) integrirt wird. Dann geht noch eine willkührliche Constante ein, welche y in sich aufnehmen kann, und welche wir daher als eine willkührliche Funktion von y ansehen müssen. Und weil die Gleichung 4.) in diesem Beispiele zugleich allemal die Form

$$v = v_{x,y} + X$$

annimmt, so giebt die Gleichung 5.) allemal sogleich

6) $$z = \int v \cdot dx + \int X \cdot dx + Y,$$

während $\int X \cdot dx$ nichts weiter als eine willkührliche Funktion von x ist, die durch X vorgestellt seyn kann, so daß man zuletzt hat

7) $$z = \int v \cdot dx + X + Y,$$

wo X und Y zwei ganz willkührliche Funktionen, die erstere von x, die andere von y, vorstellen.

Ganz auf analoge Weise würde man die Partial-Gleichung

$$\partial^{1,1} z_{x,y} + P_{x,y} \cdot \partial z_y = Q_{x,y}$$

integriren.

II. Nehmen wir nun zunächst die Gleichung der zweiten Ordnung von der Form

1) $$R \cdot \partial^2 z_x + S \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + T \cdot \partial^2 z_y = V,$$

wo R, S, T und V gegebene Funktionen von x, y, z, ∂z_x und ∂z_y vorstellen. Führt man neue Veränderliche p und q mittelst der Gleichungen

2) $\partial z_x = p$ und 3) $\partial z_y = q$

ein; denkt man sich x und y, also auch z und p und q selber wieder als Funktionen eines neuen Veränderlichen t; nimmt man dann von den Gleichungen 2.) und 3.) die Ableitungen nach allem t, so daß man erhält:

4) $$\partial^2 z_x \cdot \partial x_t + \partial^{1,1} z_{x,y} \cdot \partial y_t = \partial p_t$$

und

5) $$\partial^{1,1} z_{x,y} \cdot \partial x_t + \partial^2 z_y \cdot \partial y_t = \partial q_t;$$

findet man endlich hieraus die Werthe von $\partial^2 z_x$ und $\partial^2 z_y$, um solche in die Gleichung 1.) zu substituiren, so geht letztere über in

6) $R\cdot\partial p_t\cdot\partial y_t+T\cdot\partial q_t\cdot\partial x_t-V\cdot\partial x_t\cdot\partial y_t$
$=\partial^{1,1}z_{x,y}\cdot[R\cdot\partial y_t^2-S\cdot\partial x_t\cdot\partial y_t+T\cdot\partial x_t^2]$,

welche Gleichung nun durch die für z, p und q gesuchten Funktionen von x und y identisch werden muß.

Monge hat nun, im Sinne eines von ihm für Partial-Gleichungen der ersten Ordnung gegebenen Verfahrens (vgl. „Syst. d. Mathem." Th. VII. §. 451.) dieser Gleichung 6.) dadurch zu genügen gesucht, daß er jede Seite derselben für sich der Null gleich setzt. Dies giebt ihm die beiden Gleichungen

7) $\begin{cases} R\cdot\partial y_t^2-S\cdot\partial x_t\cdot\partial y_t+T\cdot\partial z_t^2=0 \\ R\cdot\partial p_t\cdot\partial y_t+T\cdot\partial q_t\cdot\partial x_t-V\cdot\partial x_t\cdot\partial y_t=0. \end{cases}$

Verbindet man nun damit die, vermöge der 2.) und 3.) allemal existirende Gleichung

8) $\partial z_t-p\cdot\partial x_t-q\cdot\partial y_t=0$,

so hat man drei totale Differential-Gleichungen zwischen den fünf Veränderlichen x, y, z, p und q.

Findet man nun aus der erstern der Gleichungen 7.) zunächst

9) $\partial y_t=m\cdot\partial x_t$,

wo m eine Funktion der fünf Veränderlichen x, y, z, p und q seyn wird, gegeben durch die Gleichung

10) $R\cdot m^2-S\cdot m+T=0$;

und substituirt man dann für ∂y_t den Werth $m\cdot\partial x_t$ in die zweite der Gleichungen 7.), so erhält man

11) $Rm\cdot\partial p_t+T\cdot\partial q_t-Vm\cdot\partial x_t=0$.

Die Gleichung 8.) dagegen wird, vermöge derselben Substitution

12) $\partial z_t-(p+qm)\cdot\partial x_t=0$,

so daß an die Stelle der zu integrirenden Gleichungen 7.) und 8.) jetzt die Gleichungen 9.—12.) getreten sind.

Gelingt es nun aus den drei Gleichungen 9.), 11.) und 12.) zwei integrirbare Gleichungen zu erhalten (etwa dadurch, daß man aus ihnen abwechselnd den einen oder den andern der Veränderlichen, nebst dessen Ableitungen, eliminirt), aus denen

man zwei Integrale erhält, die nach den beiden eingehenden willkührlichen Constanten a und b aufgelöst, die Form

13) $M_{x,y,z,p,q} = a$ und $N_{x,y,z,p,q} = b$

annehmen; — so kann man wieder a und b als neue Veränderliche einführen, letztere Gleichungen nach allem t differenziiren, daraus ∂p_t und ∂q_t finden (in ∂x_t, ∂y_t, ∂z_t, ∂a_t und ∂b_t ausgedrückt) und diese Werthe in die Gleichung 6.) substituiren. Diese letztere wird dann, weil ihr $a = const.$ und $b = const.$, also $\partial a_t = \partial b_t = 0$ bereits genügen, nothwendig die Form

$$A \cdot \partial a_t^2 + B \cdot \partial a_t \cdot \partial b_t + C \cdot \partial b_t^2 = 0,$$

oder die Form

14) $$\partial b_t = w \cdot \partial a_t$$

annehmen, wo w unter anderen auch die Ableitung $\partial^{1,1} z_{x,y}$ in sich aufnimmt. Da man nun letztere ganz beliebig nehmen kann, wenn nur so, daß die Gleichung 6.) d. h. die Gleichung 14.) integrabel wird, so darf man nur, wenn ψ_a eine ganz willkührliche Funktion von a vorstellt, $w = \partial \psi_a$ nehmen, um die Gleichung 6.) oder 14.) integrabel gemacht, und ihr Integral selbst in der Form $b = \psi_a$ oder

15) $$N = \psi_M$$

gefunden zu haben. — Und da m zwei Werthe hat, so findet man meist sogleich zwei solche Integrale.

Da übrigens dieses Integral 15.) in der Regel außer x, y, z auch noch p und q enthalten, folglich noch eine Differential-Gleichung der ersten Ordnung seyn wird, so ist solches in der Regel ein erstes Integral; und die ganze Methode also nur in den Fällen anwendbar, wo ein solches erstes Integral wirklich existirt; und in diesem Falle kann man, um es zu finden, die Bedingungs-Gleichungen seiner Existenz selbst noch zu Hülfe nehmen. Aber auch außerdem ist das hier beschriebene Verfahren in seltenen Fällen von Nutzen, weil die Gleichungen 9.—12.) selten so integrabel sind, daß die Gleichungen 13.) gefunden werden könnten. — Schon in dem einfachen Beispiele

$$a\cdot\partial^2 z_x = \partial z_y \qquad \text{oder} \qquad a\cdot\partial^2 z_x = q$$

bleibt ſie ohne Erfolg.

Man findet jedoch auf dieſem Wege für die Partial-Gleichung

$$A\cdot\partial^2 z_x + B\cdot\partial^{1,1} z_{x,y} + C\cdot\partial^2 z_y = V,$$

wo A, B, C conſtant ſind, und wo nur V eine Funktion von x und y iſt, weil m zwei conſtante Werthe m′ und m″ erhält, die beiden Integrale

$$Am'\cdot\partial z_x + C\cdot\partial z_y - m'U' = \varphi'_{y-m'x}$$

und

$$Am''\cdot\partial z_x + C\cdot\partial z_y - m''U'' = \varphi''_{y-m''x},$$

wo φ' und φ'' zwei ganz willkührliche Funktionen von bezüglich $y-m'x$ und $y-m''x$ ſind, während

$$U = \int V\cdot dx$$

iſt, wenn in V vor der Integration ſtatt y ſein Werth $mx+a$ geſetzt wird, und wenn man dann V nach allem x integrirt, zuletzt aber ſtatt a wieder ſeinen Werth $y-mx$ ſubſtituirt; — und wo zuletzt U′ und U″ die beiden Ausdrücke vorſtellen, welche aus U hervorgehen, wenn bezüglich m′ oder m″ ſtatt m geſetzt wird.

Dieſe Gleichungen der erſten Ordnung kann man dann auf's Neue noch integriren (nach §. 50.).

So findet man z. B. das allgemeine Ur-Integral von

$$A\cdot\partial^2 z_x + B\cdot\partial^{1,1} z_{x,y} + C\cdot\partial^2 z_y = x\cdot y$$

ſo:

$$z = \frac{1}{6A}x^3 y - \frac{1}{24}\frac{B}{A}x^4 + \varphi_{y-m'x} + \psi_{y-m''x},$$

während m′ und m″ die beiden Werthe von m ſind, welche aus der Gleichung

$$A\cdot m^2 - B\cdot m + C = 0$$

hervorgehen, und wo φ und ψ zwei ganz willkührliche Funktionen der beſtimmten Funktionen (bezüglich) $y-m'x$ und $y-m''x$ ſind.

Von der Gleichung

$$\partial^2 z_x = c^2\cdot\partial^2 z_y$$

welche bei den ſchwingenden Saiten vorkommt (vgl. d. „Lehrbuch der Mechanik" III. Th. Berlin 1838. Kap. XV.) findet man auf dieſem Wege als allgemeines Ur-Integral

$$z = \varphi_{y-cx} + \psi_{y+cx},$$

wo φ eine willkührliche Funktion von $y-cx$, und ψ eine willkührliche Funktion von $y+cx$ vorſtellt.

§. 55.

§. 55.

Von der Integration der Partial-Gleichungen der zweiten und höhern Ordnung mittelst unendlicher Reihen.

I. In allen den Fällen, wo algebraische oder transcendente geschlossene, endliche Formen des allgemeinen Integrals nicht existiren, kann das Integral in den mannichfaltigsten übrigen Formen erscheinen, und es ist deshalb meist nichts schwieriger, als die Ueberzeugung sich zu verschaffen, daß ein gefundenes Integral einer gegebenen Partial-Gleichung, das allgemeine sey.

II. Dieser Schwierigkeit geht man aber oft dadurch aus dem Wege, daß man in den wirklichen Einzelfällen der Anwendung auf ein allgemeines Integral ganz Verzicht leistet, sondern nur ein Integral aufzufinden sich bemüht, welches *allen* und *jeden* Bedingungen der speciellen Aufgabe genügt.

III. Will man nun Integrale haben, in Form von unendlichen Reihen, welche nach Potenzen eines Veränderlichen θ fortlaufen, wo θ irgend eine Funktion eines oder mehrerer der in der gegebenen Partial-Gleichung vorkommenden unabhängigen Veränderlichen ist, so wird man die „Methode der unbestimmten Koefficienten und Exponenten" mit dem besten Erfolge anwenden.

Man setzt zu dem Ende, wenn die Partial-Gleichung

1) $\quad F_{t,x,y,z,u,\partial u_t,\partial u_x,\partial u_y,\partial u_z,\text{ etc. etc. etc.}} = 0$

integrirt werden soll,

2) $\quad u = P\cdot\theta^{\alpha} + Q\cdot\theta^{\beta} + R\cdot\theta^{\gamma} + \cdots,$

substituirt solchen Werth statt u, und seine Differential-Koefficienten statt ∂u_t, ∂u_x, etc. etc. in die gegebene Partial-Gleichung $F = 0$, ordnet die Gleichung nach Potenzen von θ (zu welchem Behufe zuweilen erst die unbestimmt gelassenen Exponenten α, β, γ etc. etc. zweckmäßig angenommen werden müssen, jedoch so, daß $\alpha < \beta < \gamma <$ etc. etc. wird), und setzt dann die einzelnen Koefficienten der Null gleich. Aus diesen einzelnen Gleichungen müssen dann P, Q, R etc. etc. gefunden werden.

IV. Ist also z. B. die Gleichung

1) $$\partial u_t = a \cdot \partial^2 u_x$$

zu integriren, wo u eine gesuchte Funktion von x und t, wo dagegen a eine gegebene Constante ist, so erhält man sogleich, je nachdem man eine nach ganzen Potenzen von t, oder nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe für u sucht, einmal

2) $$u = \varphi_x + at \cdot \partial^2 \varphi_x + \frac{a^2 t^2}{2!} \cdot \partial^4 \varphi_x + \frac{a^3 t^3}{3!} \cdot \partial^6 \varphi_x + \cdots,$$

das andere Mal

3) $$\left.\begin{aligned} u = {} & \psi_t + \frac{x^2}{2!a} \cdot \partial \psi_t + \frac{x^4}{4!a^2} \cdot \partial^2 \psi_t + \cdots \\ & + x \cdot \pi_t + \frac{x^3}{3!a} \cdot \partial \pi_t + \frac{x^5}{5!a^2} \cdot \partial^2 \pi_t + \cdots \end{aligned}\right\}.$$

In dem erstern Integral 2.) kommt nur eine einzige willkührliche Funktion φ_x (mit deren Ableitungen) vor, die den Werth von u vorstellt, für $t = 0$, welche daher, so oft dieser letztere Werth bekannt ist, sogleich ihre Bestimmung findet. — In dem andern Integrale 3.) dagegen kommen zwei willkührliche Funktionen ψ_t und π_t vor, welche die Werthe von u und ∂u_x vorstellen für $t = 0$, welche daher, so oft letztere bekannt sind, augenblicklich ihre Bestimmung finden.

Dieselben Resultate bekommt man auch durch den Maclaurin'schen Lehrsatz, nur in noch allgemeinerer Form, nämlich nach Potenzen von $t - \alpha$ oder $x - \beta$ entwickelt. Diese letzteren Formen erhält man jedoch auch, wenn man entweder $\theta = t - \alpha$, oder $\theta = x - \beta$ setzt, und dann

$$u = A_0 + A_1 \cdot \theta + A_2 \cdot \theta^2 + A_3 \cdot \theta^3 + \cdots$$

setzt, und die unbestimmten Koefficienten dergestalt bestimmt, daß der gegebenen Differential-Gleichung genügt wird.

Von den beiden Integralen 2.) und 3.) ist das eine so allgemein als das andere, denn sie gehen in einander über. Nimmt man z. B. das erstere, nach Potenzen von t fortlaufende Integral 2.) und entwickelt man alle seine Koefficienten selber wieder in Reihen, die nach Potenzen von x fortlaufen,

so erhält man eine Doppel-Reihe; und ordnet man diese Doppel-Reihe nach Potenzen von x, so daß die Koefficienten dann, nach t fortlaufende Reihen werden, so lassen sich letztere dergestalt summiren, daß man sogleich die Form des Integrals 3.) erhält, und dies Verfahren muß jedem geübten Anfänger gelingen, der solches versucht. — Durch das ganz analoge Verfahren kann man aber auch aus dem Integral 3.) wiederum die Form 2.) erhalten.

V. Wir wollen nun von derselben gegebenen lineären Partial-Gleichung

1) $$\partial u_t = a \cdot \partial^2 u_x$$

neue Formen des Integrals aufsuchen, indem wir $\theta = e^x$ nehmen und

2) $$u = P \cdot \theta^\alpha + Q \cdot \theta^\beta + R \cdot \theta^\gamma + \cdots$$

setzen, dabei aber P, Q, R etc. etc., so wie α, β, γ etc. etc. zu bestimmen suchen. Man hat dann, indem wir P, Q, R etc. etc. als bloße Funktionen von t voraussetzen,

$$u = P \cdot e^{\alpha x} + Q \cdot e^{\beta x} + R \cdot e^{\gamma x} + \cdots$$
$$\partial u_t = \partial P_t \cdot e^{\alpha x} + \partial Q_t \cdot e^{\beta x} + \partial R_t \cdot e^{\gamma x} + \cdots$$
$$\partial^2 u_x = \alpha^2 P \cdot e^{\alpha x} + \beta^2 Q \cdot e^{\beta x} + \gamma^2 R \cdot e^{\gamma x} + \cdots.$$

Diese Werthe, in die gegebene Partial-Gleichung substituirt, geben, wenn man die Koefficienten von $e^{\alpha x}$, $e^{\beta x}$, $e^{\gamma x}$ etc. etc. einzeln der Null gleich setzt,

$$\partial P_t = a\alpha^2 P, \quad \partial Q_t = a\beta^2 Q, \quad \partial R_t = a\gamma^2 R \text{ etc. etc.}$$

Integrirt man nun diese Gleichungen, in so fern sie zu den lineären totalen Differential-Gleichungen gehören, nach §. 42.), so erhält man

$$P = A \cdot e^{a\alpha^2 t}, \quad Q = B \cdot e^{a\beta^2 t}, \quad R = C \cdot e^{a\gamma^2 t}, \text{ etc. etc.}$$

wo A, B, C etc. etc. willkührliche Constanten sind, während α, β, γ etc. etc. ebenfalls constant sind und noch gänzlich unbestimmt bleiben. Zuletzt hat man als gesuchtes Integral

3) $$u = A \cdot e^{a\alpha^2 t} \cdot e^{\alpha x} + B \cdot e^{a\beta^2 t} \cdot e^{\beta x} + C \cdot e^{a\gamma^2 t} \cdot e^{\gamma x} + \text{etc. etc.},$$

wo A, B, C etc. etc., α, β, γ etc. etc. ganz willkührliche Constanten sind *), welche die Stelle der willkührlichen Funktionen vertreten, und welche in den verschiedenen Anwendungen, nach den verschiedenen Nebenbedingungen der einzelnen Aufgabe ihre verschiedene Bestimmung erhalten.

VI. Die meisten lineären Partial-Gleichungen, zu welchen die Physik und namentlich die Mechanik führt, sind Gleichungen zwischen der Zeit t, und noch einem, zwei oder drei Koordinaten-Werthen x, oder x und y, oder x, y und z, und endlich der Größe u, welche von den eben genannten Elementen abhängig ist; z. B. wenn u die Menge von Wärme oder von Elektricität vorstellt, welche zu einer bestimmten Zeit t, an der, in einer gegebenen Geraden durch x, oder in einer gegebenen Ebene durch x und y, oder endlich im körperlichen Raume durch x, y und z gegebenen Stelle (bei gewissen Voraussetzungen) statt finden wird. — Sie lassen sich gewöhnlich am bequemsten, obgleich in Form von unendlichen Reihen dadurch integriren, daß man

1) $$u = P_0 \cdot e^{\alpha_0 t} + P_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + P_2 \cdot e^{\alpha_2 t} + \cdots$$

setzt, wo das allgemeine b^{te} Glied $P_b \cdot e^{\alpha_b t}$ ist, und wo man α_0, α_1, α_2 etc. etc. constant, dagegen P_0, P_1, P_2 etc. etc. als Funktionen von x, y und z ansieht; — diesen Werth, nebst seinen Ableitungen in die gegebene Partial-Gleichung substituirt und letztere dann in lauter einzelne Gleichungen von der Form

(C) $$\cdots \quad M_b \cdot \alpha_b^2 + N_b \cdot \alpha_b + O_b = 0$$

zerfällt, wo jede bloß den einzigen Koefficienten P_b enthält, so daß jede solche Gleichung, je nachdem man 0, 1, 2, 3, oder

*) Entwickelt man in diesem Resultate 3.) die Koefficienten von $e^{\alpha x}$, $e^{\beta x}$, $e^{\gamma x}$, etc., nach Potenzen von t, und faßt man die Summe

$$A \cdot e^{\alpha x} + B \cdot e^{\beta x} + C \cdot e^{\gamma x} + \cdots$$

in den Ausdruck φ_x zusammen, so hat man wieder das Integral IV. 2.). — Auf ähnliche Weise geht auch das Integral IV. 3.) aus dem hiesigen 3.) hervor.

irgend eine der folgenden ganzen Zahlen statt b gesetzt sich denkt, nach und nach die Koefficienten P_0, oder P_1, oder P_2, oder etc. etc. bestimmt.

Da bei diesem Verfahren α_0, α_1, α_2 etc. etc. als ganz willkührliche Constanten eingehen, so müssen sie aus den Nebenbedingungen der Aufgabe (also z. B. in der Mechanik aus dem Anfangs-Zustande, wo $t = 0$ ist, so wie überhaupt aus den, für bestimmte Werthe der Veränderlichen vorhandenen Bedingungen) ihre Bestimmung erhalten. — Zuweilen zeigen sie sich imaginär, und in diesem Falle müssen die Exponential-Ausdrücke, wenn bequeme Rechnungen statt finden sollen, in Sinus- und Kosinus-Ausdrücke verwandelt werden. In demselben Falle wird man daher überhaupt besser thun, gleich vom Anfange an, statt die Form 1.) für u zu wählen, lieber

$$2)\quad u = \begin{cases} p_0 \cdot \cos \lambda_0 t + p_1 \cdot \cos \lambda_1 t + p_2 \cdot \cos \lambda_2 t + \cdots \\ + q_0 \cdot \sin \lambda_0 t + q_1 \cdot \sin \lambda_1 t + q_2 \cdot \sin \lambda_2 t + \cdots \end{cases}$$

zu setzen, — in dieser Reihe die Werthe λ_0, λ_1, λ_2 etc. etc. als constant, dagegen p_0, q_0, p_1, q_1, p_2, q_2 etc. etc. als Funktionen von x, y, z sich zu denken und das vorbeschriebene Verfahren, zur Bestimmung der Koefficienten, zu wiederholen.

Anwendungen dieser letztern Methode findet man vorzüglich in der Théorie de la chaleur p. Fourier, Paris 1822, und in späteren über denselben oder einen ähnlichen Gegenstand erschienenen Werken von Poisson, Cauchy etc.

Anmerkung. Wir beschließen dieses Kapitel mit folgender nicht unwichtigen Bemerkung.

Eine Partial-Gleichung zwischen drei Veränderlichen t, x und u (und den Ableitungen ∂u_t, ∂u_x, $\partial^2 u_t$ etc. etc.) ist allemal einer unendlich großen Anzahl von totalen Differential-Gleichungen bloß zwischen den beiden Veränderlichen x und u und den Ableitungen ∂u_x, $\partial^2 u_x$, $\partial^3 u_x$ etc. etc. von u nach x, gleich zu achten, welche alle aus ihr hervorgehen, wenn man sich in ihr nach und nach unendlich viele und alle Werthe ge-

setzt denkt, welche t nur immer haben kann. Jede dieser unendlich vielen totalen Gleichungen, wenn sie integrirt wird, liefert dann für dieses bestimmte t den zugehörigen Werth u in x ausgedrückt, während statt ∂u_t, $\partial^2 u_t$, $\partial^{1,1} u_{x,t}$ etc. etc., weil sie ebenfalls Funktionen von x und t sind, für jeden bestimmten Werth von t bloß Funktionen von x zu stehen kommen.

Auf dieselbe Weise ist eine Partial-Gleichung zwischen vier Veränderlichen t, x, y und der gesuchten Funktion u (von t, x und y), als ein Aggregat von einer unendlichen Anzahl von Partial-Gleichungen mit den drei Veränderlichen x, y und u anzusehen, welche letztere aus ersterer dadurch hervorgehen, daß man statt des Veränderlichen t nach und nach alle seine stetig neben einander liegenden Werthe gesetzt denkt. — U. s. w. s. —

Schluß-Anmerkung. Wir dürfen nicht unerwähnt lassen, daß auch die Partial-Differential-Gleichungen ihre singulären Werthe haben, d. h. daß ihnen zuweilen durch Funktionen $z_{x,y\,\text{etc.}}$ genügt werde, welche nicht in dem allgemeinen Integral enthalten sind. — Auch hier sind die singulären Werthe nichts anders als Faktoren der gegebenen Partial-Differential-Gleichung selbst, die hervortreten würden, wenn man passende neue Veränderliche einführen wollte. — (Man vgl. noch „System der Math." Th. V. §. 317.).

Siebentes Kapitel.

Geometrische Aufgaben, welche zu Differential-Gleichungen führen.

§. 56.

Aufgaben, welche zu totalen Differential-Gleichungen führen.

Aufgabe 1.

Man soll die Gleichung zwischen den rechtwinklichen Koordinaten-Werthen x und y einer Kurve finden, deren Subtangente allemal das Doppelte der Abscisse x ist.

Nach I. Bd. §§. 170. 171.) ist die Subtangente $= \frac{y}{\partial y_x}$; also hat man für die gesuchte Kurve die Differential-Gleichung

$$\frac{y}{\partial y_x} = 2x.$$

Diese Gleichung muß nun nach y aufgelöst d. h. integrirt werden. Man trennt in ihr die Veränderlichen, indem man sie so schreibt

$$\frac{\partial y_x}{y} = \frac{1}{2x},$$

und erhält dann zum Integral

$$\int \frac{1}{y} \cdot dy = \int \frac{1}{2x} \cdot dx + C \quad \text{d. h.} \quad log\, y = \tfrac{1}{2} log\, x + C$$

d. h.

$$y^2 = ax,$$

wo a eine willkührliche Constante ist. Diese Gleichung stellt alle Parabeln vor; und wir sehen also 1) daß alle Parabeln diese Eigenschaft haben, und 2) daß außer den Parabeln keine andere Kurve diese Eigenschaft hat. — Die Constante a bleibt hier unbestimmt.

Würde aber eine Kurve gesucht, welche durch einen, mittelst der Koordinaten-Werthe α und β gegebenen Punkt hin-

durch geht, und dabei noch die obige Eigenschaft hat, so würde man zur Bestimmung der obigen Constante a die Bedingung haben, daß die Gleichung $y^2 = ax$ für $x = \alpha$ auch $y = \beta$ geben muß. Dies giebt die Gleichung

$$\beta^2 = a\alpha, \qquad \text{also} \qquad a = \frac{\beta^2}{\alpha};$$

und die gesuchte Kurve ist nun die durch die Gleichung

$$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha} \cdot x \qquad \text{oder} \qquad \frac{y^2}{\beta^2} = \frac{x}{\alpha}$$

gegebene Parabel, welche den Parameter $\frac{\beta^2}{\alpha}$ hat.

Wäre der Punkt (α, β) nicht gegeben, sondern sollte die Tangente der Kurve, an dem zu $x = \alpha$ gehörigen Punkte, mit der Abscissen-Axe den gegebenen Winkel ψ machen, so müßte ∂y_x für $x = \alpha$ der $tg\,\psi$ gleich werden (nach I. Bd. §§. 170. 171.). Nun folgt aber aus $y^2 = ax$, $2y \cdot \partial y_x = a$, also $\partial y_x = \frac{a}{2\sqrt{ax}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}$; folglich wird jetzt

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{a}{\alpha}} = tg\,\psi, \quad \text{und} \quad a = 4\alpha \cdot tg\,\psi^2.$$

Die Gleichung der gesuchten Kurve ist daher nun die durch die Gleichung

$$y^2 = 4\alpha x \cdot tg\,\psi^2$$

gegebene Parabel.

Anmerkung. Sollte die Subtangente das m fache der Abscisse x werden, so würde man auf demselben Wege als Gleichung der gesuchten Kurve finden

$$y^m = ax,$$

und diese Kurve gehört zu den Parabeln der höhern Ordnung, wenn m nicht negativ ist. — Wäre aber m negativ, so würde man die Kurve zu den Hyperbeln der höhern Ordnung zählen.

Aufgabe 2.

Es wird die Kurve gesucht, deren Subnormale an jedem ihrer Punkte constant und $= a$ ist.

Nach §. 170. d. I. Bds.) hat man die Subnormale $= y \cdot \partial y_x$; also ist dasmal

$$y \cdot \partial y_x = a.$$

In dieser Gleichung sind bereits die Veränderlichen getrennt; sie giebt daher, wenn man links und rechts die Integrale nach x nimmt,

$$\int y \cdot dy = ax + c \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2}y^2 = ax + c \quad \text{oder} \quad y^2 = 2ax + c,$$

wo c eine willkührliche Constante ist. Diese Gleichung ist allemal die einer Parabel *), und welchen Werth man auch der Constante c geben mag, so hat man immer eine Kurve, welche die verlangte Eigenschaft hat.

Soll aber der zu $x = \alpha$ gehörige Punkt der Parabel die Ordinate β haben, so hat man noch die Gleichung

$$\beta^2 = 2a\alpha + c, \qquad \text{also} \qquad c = \beta^2 - 2a\alpha;$$

und dann erhält man

$$y^2 - \beta^2 = 2a(x - \alpha)$$

für die Gleichung der gesuchten Kurve.

Wird $\alpha = \beta = 0$ gegeben, d. h. soll die Kurve durch den Anfangs-Punkt der Koordinaten durchgehen, so erhält man die Gleichung

$$y^2 = 2ax.$$

Aufgabe 3.

Es werde die Kurve gesucht, deren Subnormale an jedem ihrer Punkte dem Abscissen-Werthe x gleich ist.

Man hat als Ansatz dieser Aufgabe die Gleichung

$$y \cdot \partial y_x = x;$$

und solche, integrirt, giebt $\int y \cdot dy = \int x \cdot dx$ d. h.

$$y^2 = x^2 + c,$$

wo c die willkührliche Constante ist. Diese Gleichung drückt, so lange c nicht Null wird, eine gleichseitige Hyperbel, für $c = 0$ dagegen zwei gerade Linien aus. Wie man aber c nehmen mag, so hat man immer der Aufgabe genügt.

Soll jedoch die Kurve noch durch den Punkt hindurch gehen, dessen Koordinaten-Werthe α und β sind, so hat man noch die Gleichung

$$\beta^2 = \alpha^2 + c, \qquad \text{oder} \qquad c = \beta^2 - \alpha^2,$$

*) Daß in der Parabel die Subnormale constant und dem halben Parameter gleich ist, ist in der Lehre der Kegelschnitte nachgewiesen. Die Lösung der hiesigen Aufgabe zeigt dagegen, daß die Parabel unter allen Kurven die einzige ist, welche sich dieser Eigenschaft erfreut.

und die Gleichung unſerer geſuchten Kurve wird nun

$$y^2 - \beta^2 = x^2 - \alpha^2.$$

Für $\alpha = \beta = 0$ geht dieſelbe in

$$y^2 = x^2, \text{ oder } y = \pm x$$

über. Dieſe letztere Gleichung ſtellt aber zwei gerade Linien vor, welche mit der Abſciſſen-Axe einen halben rechten Winkel machen, und auf einander ſenkrecht ſtehen. — Dies letztere Ereigniß tritt übrigens allemal ein, ſo oft der Punkt, durch welchen die Kurve hindurchgehen ſoll, ſo liegt, daß man $\beta = \pm\alpha$ hat.

Aufgabe 4.

Die Kurve zu finden, welche alle Kurven einer und derſelben Art unter einem und demſelben Winkel ſchneidet *).

Es ſtelle

1) $$f_{x',y',\alpha} = 0$$

die Gleichung aller geſchnittenen Kurven DN, D'N', D_1N_1, etc. etc. (Fig. 19.) vor, und x und y ſeyen die Koordinaten eines beliebigen Punktes M der geſuchten Kurve $M_1MM'U$; ferner ſey MX' mit der Abſciſſen-Axe OX parallel gedacht, während immer rechtwinkliche Koordinaten-Axen vorausgeſetzt werden. Sind endlich MV, MZ die Tangenten der gegebenen und der geſuchten Kurve in ihrem Durchſchnitts-Punkte M, ſo iſt ZMV der gegebene Winkel, welcher bei allen übrigen geſchnittenen Kurven, alſo für jeden andern Werth von α, immer derſelbe bleiben ſoll. Nun iſt aber

2) $$\text{W. ZMV} = \text{W. ZMX'} - \text{W. VMX'},$$

alſo

3) $$tg\,\text{ZMV} = \frac{tg\,\text{ZMX'} - tg\,\text{VMX'}}{1 + tg\,\text{ZMX'} \cdot tg\,\text{VMX'}}.$$

Zu gleicher Zeit iſt noch

$$tg\,\text{ZMX'} = \partial y_x \quad \text{und} \quad tg\,\text{VMX'} = p,$$

*) Unter „Kurven einer gegebenen Art" werden hier alle Kurven verſtanden, deren Gleichung aus einer einzigen gegebenen Gleichung $f_{x,y,\alpha} = 0$ dadurch hervorgeht, daß man der Conſtante α alle ſtetig neben einander liegenden verſchiedenen Werthe ertheilt.

sobald man unter p das versteht, was aus der Ableitung $\partial y'_x$ hervorgeht, wenn man solche als Funktion von x', y' und α darstellt, dann aber bezüglich x und y statt x' und y' substituirt (weil in dem Durchschnitts-Punkte M die Koordinaten-Werthe beider Kurven dieselben sind).

Wird nun die Tangente des gegebenen Winkels ZMV durch a bezeichnet, so daß a selbst gegeben ist, so geht die Gleichung 3.) über in

$$6)\quad a = \frac{\partial y_x - p}{1 + p \cdot \partial y_x}, \quad \text{oder} \quad a(1 + p \cdot \partial y_x) + p - \partial y_x = 0.$$

Zur Bestimmung von p hat man aber für den Durchschnitts-Punkt aus

$$7)\quad f_{x, y, \alpha} = 0$$

noch

$$8)\quad \partial f_x + \partial f_y \cdot p = 0.$$

Eliminirt man daher aus den Gleichungen 6.), 7.) und 8.) nicht bloß p, sondern auch α, so hat man eine Gleichung, welche für jeden Werth von α gilt, welche also für alle die übrigen geschnittenen Kurven D_1N_1, $D'N'$ etc. etc. gilt, daher auch für alle übrigen Durchschnitts-Punkte M_1, M' etc. etc., wenn unter x und y dessen Koordinaten-Werthe verstanden werden. Diese zuletzt erhaltene Gleichung ist also die Gleichung der gesuchten Kurve. Wird diese Gleichung noch integrirt, so ist die Auflösung der Aufgabe beendigt.

Beispiel 1. Ist statt $f_{x', y', \alpha} = 0$ gegeben die Gleichung der Parabel

$$y^2 = \alpha x,$$

so hat man, wenn man diese Gleichung differenziirt,

$$2y \cdot p = \alpha, \quad \text{also} \quad p = \frac{y}{2x}.$$

Dieser Werth in die 6.) substituirt, giebt

$$a\left(1 + \frac{y \cdot \partial y_x}{2x}\right) + \frac{y}{2x} - \partial y_x = 0$$

oder

$$1')\quad 2ax + y + (ay - 2x) \cdot \partial y_x = 0.$$

Dies ist also die Differential-Gleichung der gesuchten Kurve.

Um solche zu integriren, bemerke man, daß sie nach x und y homogen ist, setze also (nach §. 40. IV.)

2′) $\quad y = xv, \quad$ folglich $\quad \partial y_x = x \cdot \partial v_x + v.$

Die Gleichung 1′.) geht dadurch über in

3′) $$\frac{\partial x_v}{x} + \frac{av-2}{av^2-v+2a} = 0,$$

in welcher Gleichung die Veränderlichen getrennt sind. Nimmt man nun von jedem Gliede das Integral nach allem v, so erhält man (nach §. 5. und §. 8.)

$$log\, x + \frac{-3+\sqrt{1-8a^2}}{2\sqrt{1-8a^2}} \cdot log\left(v - \frac{1+\sqrt{1-8a^2}}{2a}\right) + \frac{3+\sqrt{1-8a^2}}{2\sqrt{1-8a^2}} \cdot log\left(v - \frac{1-\sqrt{1-8a^2}}{2a}\right) = log\, c.$$

wo c die willkührliche Constante ist. Setzt man statt v seinen Werth $\frac{y}{x}$ und schafft man die Logarithmen weg, so erhält man

$$x \cdot \left(\frac{y}{x} - \frac{1+\sqrt{1-8a^2}}{2a}\right)^{\frac{-3+\sqrt{1-8a^2}}{2\sqrt{1-8a^2}}} \cdot \left(\frac{y}{x} - \frac{1-\sqrt{1-8a^2}}{2a}\right)^{\frac{3+\sqrt{1-8a^2}}{2\sqrt{1-8a^2}}} = c$$

für die Gleichung der gesuchten Kurve*).

Beispiel 2. Ist statt $f_{x',y',\alpha} = 0$ bloß die Gleichung einer geraden Linie, nämlich

$$y = \alpha x$$

gegeben, so hat man hieraus

$$\partial y_x = \alpha, \quad \text{also} \quad p = \alpha = \frac{y}{x}.$$

Setzt man nun diesen Werth von p in die Gleichung 6.), so erhält man

$$a\left(1 + \frac{y}{x} \cdot \partial y_x\right) + \frac{y}{x} - \partial y_x = 0$$

oder

$$ax + y + (ay - x) \cdot \partial y_x = 0.$$

Setzt man nun, um diese Gleichung zu integriren,

$$y = x \cdot v, \quad \text{also} \quad \partial y_x = x \cdot \partial v_x + v,$$

so geht solche über in

---

*) Ist $8a^2 > 1$, also $a > \frac{1}{2\sqrt{2}}$, so kann man die imaginären Potenzen in reelle Bogen übertragen; oder man kann das Integral $\int \frac{av-2}{av^2-v+2a} \cdot dv$ sogleich direkt in Bogen ausdrücken (nach §. 11.).

$$\frac{\partial x_v}{x} + \frac{av-1}{av^2+a} = 0$$

und giebt nun, integrirt,

$$log\, x + \int \frac{av-1}{av^2+a} \cdot dv + log\, c = 0,$$

wo $log\, c$ die willkührliche Constante vorstellt. Nun ist aber

$$\frac{av-1}{av^2+a} = \frac{v-1:a}{1+v^2} = \frac{v}{1+v^2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+v^2};$$

also ist auch

$$\int \frac{av-1}{av^2+a} \cdot dv = \int \frac{v}{1+v^2} \cdot dv - \frac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{1+v^2} \cdot dv$$

$$= \tfrac{1}{2} log(1+v^2) - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{tg} v.$$

Setzt man daher statt v wieder seinen Werth $\frac{y}{x}$, so geht das gefundene Integral über in

$$a \cdot log\left(c\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{tg} \frac{y}{x}$$

oder

$$\frac{y}{x} = tg\left(a \cdot log\, c\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

als Gleichung der gesuchten Kurve.

Und weil allemal in das Integral eine willkührliche Constante eingeht, so kann man die Kurve an einer bestimmten Stelle noch einer neu hinzutretenden Bedingung unterwerfen, z. B. der Bedingung, daß sie durch einen, mittelst seiner Koordinaten-Werthe gegebenen Punkt hindurch gehe, oder daß die Tangente an einem bestimmten zu $x = g$ gehörigen Punkte der Kurve eine gegebene Lage habe; oder einer ähnlichen.

Weitere Bemerkungen zur Integration der für die Trajektorien gefundenen Differential-Gleichungen.

In den Fällen, wo sich aus den Gleichungen 6.), 7.) und 8.) der Veränderliche α nicht leicht eliminiren läßt, ist es zuweilen vortheilhaft, in die Gleichung 6.), nämlich in

6) $\quad a(1+p \cdot \partial y_x) + p - \partial y_x = 0$ *),

*) Man nennt die hier gesuchten Kurven Trajektorien, und rechtwinkliche Trajektorien, wenn der gegebene Winkel ein rechter, also

α als einen neuen Veränderlichen (ſtatt y) einzuführen, der durch die Gleichung

$$7) \qquad f_{x,y,\alpha} = 0$$

ſelbſt (in x und y) gegeben iſt, und dann y zu eliminiren, um die neue Differenzial-Gleichung zwiſchen x und α zu erhalten.

Läßt ſich z. B. die Gleichung $f_{x,y,\alpha} = 0$ leichter nach y als nach α algebraiſch auflöſen, ſo daß ſie

$$y = \varphi_{x,\alpha} \qquad \text{und} \qquad \partial y_{(x)} = p + \partial\varphi_{\alpha} \cdot \partial\alpha_x$$

giebt, wo p die frühere Bedeutung hat, alſo $\partial\varphi_x$ vorſtellt; oder $\partial y_{(x)} = p + q \cdot \partial\alpha_x$ giebt, wenn $\partial\varphi_{\alpha} = q$ geſetzt wird, — ſo geht die Gleichung 6.) über in

$$9) \qquad a(1+p^2) - (1-ap)q \cdot \partial\alpha_x = 0,$$

wo p und q bloße Funktionen von x und α vorſtellen. Wird nun dieſe Gleichung zwiſchen x und α, integrirt, ſo kann man dann aus dem Integral und $f_{x,y,\alpha} = 0$, noch α eliminiren, und man hat die geſuchte Gleichung zwiſchen x und y für die Trajektorie.

Man kann aber natürlich auch ſtatt dieſes Veränderlichen α wiederum einen neuen Veränderlichen z einführen, immer in

---

wenn $\frac{1}{a} = 0$ iſt. — Für die rechtwinklichen Trajektorien wird die Gleichung 6.) bloß dieſe, nämlich $1 + p \cdot \partial y_x = 0$.

In dem zweiten Beiſpiel, wo $p = \frac{y}{x}$ iſt, hat man für die rechtwinkliche Trajektorie die Gleichung $1 + \frac{y}{x} \cdot \partial y_x = 0$, oder $x + y \cdot \partial y_x = 0$. Dieſe giebt, integrirt, $x^2 + y^2 = r^2$, wo r^2 eine willkührliche Conſtante vorſtellt, ſo daß diesmal die geſuchte Kurve eine Kreislinie iſt; wie ſolches voraus zu ſehen war.

Wird der gegebene Winkel immer kleiner und kleiner, und zuletzt unendlich klein gedacht, ſo geht die Trajektorie in die Einhüllungs-Kurve über (vgl. I. Bd. §. 182.) und die Gleichung 6.) wird nun wegen $a = 0$, dieſe:

$$p - \partial y_x = 0.$$

Die Einhüllungs-Kurve iſt aber, nach I. Bd. §. 182.) und nach §. 45.), nie das Integral dieſer Differential-Gleichung, ſondern immer nur ein ſingulärer Werth derſelben. —

der Hoffnung, daß sich die neue Gleichung bequemer integriren läßt.

Man suche z. B. die Trajektorien für alle Cykloiden, welche aus der Differential-Gleichung

$$1') \qquad \partial y_x = \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

dadurch hervorgehen, daß man den Radius α des Erzeugungs-Kreises sich stetig ändern läßt. Die Ur-Gleichung derselben Cykloide, wenn man integrirt, und wenn man voraussetzt, daß für $x = 0$ auch $y = 0$ werden soll, wird aber diese:

$$2') \qquad y = -\sqrt{2\alpha x - x^2} + \alpha \cdot \frac{1}{cos}\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right).$$

Die Gleichung der Trajektorie ist also dasmal (aus 6.):

$$3') \qquad a\left(1 + \frac{x \cdot \partial y_x'}{\sqrt{2ax - x^2}}\right) + \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}} - \partial y_x = 0,$$

sobald statt α der aus 2'.) zu ziehende Werth in y und x gesetzt gedacht wird.

Führt man dagegen α als neuen Veränderlichen ein, der selbst durch die Gleichung 2'.) gegeben ist, so hat man

$$p = \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}} \quad \text{und} \quad q = \frac{1}{cos}\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right);$$

und die Gleichung 9.) der Trajektorie wird nun

$$4') \qquad a \cdot \frac{2ax}{2ax - x^2} - \left(1 - a \cdot \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}}\right) \cdot \frac{1}{cos}\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \cdot \partial \alpha_x = 0.$$

Weil man aber diese Gleichung immer noch nicht direkt integriren kann, so führe man noch einen neuen Veränderlichen z ein (statt α), mittelst der Gleichung

$$5') \qquad x = \alpha z, \quad \text{also} \quad 1 = \alpha \cdot \partial z_x + z \cdot \partial \alpha_x,$$

und eliminire nun aus 4'.) und 5'.) sowohl α als $\partial \alpha_x$. Dadurch erhält man diese neue Gleichung

$$6') \qquad \frac{2a}{2 - z} - \left(\frac{1}{z} - \frac{a}{\sqrt{2z - z^2}}\right) \frac{1}{cos}(1 - z) + \frac{x \cdot \partial z_x}{z}\left(\frac{1}{z} - \frac{a}{\sqrt{2z - z^2}}\right) \cdot \frac{1}{cos}(1 - z) = 0,$$

oder, wenn man $\frac{1}{\partial x_x}$ statt ∂z_x schreibt, und schicklich wegdividirt,

$$7') \quad \frac{\partial x_z}{x} + \frac{\left(\frac{1}{z} - \frac{a}{\sqrt{2z-z^2}}\right)\cdot\frac{1}{\cos}(1-z)}{z\left[\frac{2a}{2-z} - \left(\frac{1}{z} - \frac{a}{\sqrt{2z-z^2}}\right)\cdot\frac{1}{\cos}(1-z)\right]} = 0.$$

In dieser Gleichung sind die Veränderlichen getrennt, so daß nun von jedem Gliede das Integral nach allem z genommen werden kann, sobald man nur das Integral der Funktion von z im zweiten Gliede auf irgend einem der im Kap. I.) beschriebenen Wege, auswerthet.

Hat man aber integrirt, so muß man aus dem Integral, welches noch eine willkührliche Constante c in sich aufnimmt; — aus der Gleichung 5.') und aus der Gleichung 2'.), noch z und α eliminiren, um die gesuchte Gleichung der Trajektorie zwischen x und y zu haben *).

Aufgabe 5.

Man soll die Kurve finden, in welcher an jedem ihrer Punkte der Krümmungs-Halbmesser, der Normale (bis zur Abscissen-Axe genommen) gleich ist.

Aus der Subnormale $y\cdot\partial y_x$ und der Ordinate y findet sich die Normale nach dem Pythagoräischen Lehrsatze

$$= \sqrt{y^2 + y^2\cdot\partial y_x{}^2} = y\cdot\sqrt{1+\partial y_x{}^2},$$

während der Krümmungs-Halbmesser (I. Bd. §. 170.)

$$= \frac{(1+\partial y_x{}^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x}$$

gefunden worden ist. Die Gleichung der gesuchten Kurve ist daher diese:

$$\frac{(1+\partial y_x{}^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x} = y\cdot\sqrt{1+\partial y_x{}^2}, \quad \text{oder} \quad \mp y\cdot\partial^2 y_x + \partial y_x{}^2 + 1 = 0,$$

in so fern die Zweideutigkeit der Zeichen zu berücksichtigen ist. — Dies ist aber eine Differential-Gleichung der zweiten Ordnung, welche noch integrirt werden muß.

A.

---

*) Uebrigens bemerken wir hier noch den Anfängern, daß die Trajektorien keine eigenthümliche Gattung von Kurven sind, so wenig z. B. wie die Evoluten, und daß jede gegebene Kurve eine Trajektorie seyn kann, in Bezug auf eine gegebene Reihe von Kurven einer und derselben Art. Man kann sogar die Aufgabe umkehren und die Reihen der Kurven einer und derselben Art aufsuchen, zu welcher irgend eine gegebene Kurve als Trajektorie gehört.

A. Nehmen wir zunächst die Gleichung

1) $$+y\cdot\partial^2 y_x+\partial y_x^2+1=0,$$

und führen wir, um sie zu integriren, einen neuen Veränderlichen v ein, mittelst der Gleichung

2) $$y\cdot\partial y_x=v\ ^*),$$

so daß aus 2.), wenn man differenziirt,

3) $$y\cdot\partial^2 y_x+\partial y_x^2=\partial v_x$$

hervorgeht; so geht die Gleichung 1.) über in

4) $$\partial v_x+1=0$$

und giebt, nach allem x integrirt,

5) $$v+x=c \quad \text{d. h.} \quad y\cdot\partial y_x+x-c=0.$$

Dies ist ein erstes Integral der Gleichung 1.) mit der willkührlichen Constante c, aber noch immer eine Differential-Gleichung der ersten Ordnung, die nun noch einmal integrirt werden muß. Weil jedoch in ihr die Veränderlichen bereits getrennt sind, so darf man nur noch jedes Glied für sich nach allem x integriren, und man erhält

6) $$y^2+(x-c)^2=r^2,$$

wo r^2 die neue willkührliche Constante ist. Diese Gleichung ist aber die Gleichung einer Kreis-Linie, welche ihren Mittel-Punkt in der Abscissen-Axe hat, und deren Radius $=r$ ist.

Soll diese Kreislinie durch zwei Punkte hindurchgehen, deren Koordinaten-Werthe α, β für den einen, und γ, δ für den andern sind, so müssen diese Koordinaten-Werthe bezüglich statt x und y gesetzt, die Gleichung 6.) identisch machen. Dies giebt die Gleichungen

7) $$\beta^2+(\alpha-c)^2=r^2 \quad \text{und} \quad \delta^2+(\gamma-c)^2=r^2;$$

und aus diesen Gleichungen bestimmen sich die beiden Constanten c und r.

Man hätte auch die Bedingung machen können, daß die gesuchte Kurve einmal durch den Punkt (α, β) hindurchgehe, und dann daß die Tangente an diesem Punkte mit der Abscissen-Axe einen gegebenen Winkel ψ mache. Dann hätte man die Gleichung 6.) differenziiren, also zur Gleichung 5.) zurückkehren müssen, und in 5.) und 6.) α statt x, β statt y, und $tg\,\psi$

*) Man bemerkt nämlich sogleich (bei dem Anblick der Gleichung 1.), daß die beiden ersten Glieder derselben nichts anders als die Ableitung von $y\cdot\partial y_x$ sind.

ſtatt ∂y_x ſetzen. Man erhielt dann zur Beſtimmung der beiden Conſtan c und r, die Gleichungen

8) $\beta \cdot tg\,\psi + \alpha - c = 0$ und $\beta^2 + (\alpha - c)^2 = r^2$.

B. Nehmen wir die andere Gleichung

1) $-y \cdot \partial^2 y_x + \partial y_x^2 + 1 = 0$,

und führen wir wieder, um ſie zu integriren, einen neuen V änderlichen v ein, aber dasmal mittelſt der Gleichung

2) $\partial y_x = v$, alſo $\partial^2 y_x = \partial v_x$,

ſo geht die Gleichung 1.) über in

3) $-y \cdot \partial v_x + 1 + v^2 = 0$, oder $\frac{\partial v_x}{1+v^2} = \frac{1}{y}$,

oder, wenn man durch ∂y_x, welches $= v$ iſt, dividirt, we $\frac{\partial v_x}{\partial y_x} = \partial v_y$ (I. Bd. §. 155.)

4) $\frac{\partial v_y}{1+v^2} = \frac{1}{v \cdot y}$,

oder, wegen $\partial y_v = \frac{1}{\partial v_y}$,

5) $\frac{v}{1+v^2} = \frac{\partial y_v}{y}$.

In dieſer Gleichung ſind die Veränderlichen getrennt, und giebt, wenn man links und rechts die Integrale nach alle nimmt,

6) $y = a\sqrt{1+v^2}$ oder $\frac{y^2}{a^2} = 1 + v^2$,

wo a eine willkührliche Conſtante iſt *).

---

*) Dieſe Gleichung $y = a \cdot \sqrt{1+\partial y_x^2}$ giebt, wenn man links rechts die Integrale nach x nimmt,

$$\int_{x \div \alpha} y \cdot dx = a \cdot \int_{x \div \alpha} \sqrt{1+\partial y_x^2} \cdot dx$$

und dieſe Gleichung lehrt, daß der Inhalt das a fache des Bogens iſt, daß die Inhalte mit den Bogen in Proportion ſtehen, gerade wie I Kreiſe die Inhalte der Sektoren, wie die Bogen ſich verhalten. — Di gefundenen Kurven haben übrigens noch mehr Eigenſchaften mit dem K gemein. (Vgl. Nova Acta acad. Petrop. T. IX. pag. 178.)

Um nun dieſes erſte Integral der Gleichung 1.) noch einmal zu integriren, ſetzt man wieder ſtatt v ſeinen Werth ∂y_x, und man hat die Gleichung

7) $$y^2 = a^2(1+\partial y_x^2).$$

Dieſe giebt dann ſogleich, wegen $\frac{1}{\partial y_x} = \partial x_y$,

8) $$\partial x_y = \frac{a}{\sqrt{y^2-a^2}},$$

alſo, wenn man integrirt,

9) $$x = a\int \frac{1}{\sqrt{y^2-a^2}}\cdot dy = b + a\cdot log\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a},$$

wo b eine zweite willkührliche Conſtante iſt. Die Gleichung 9.) giebt noch

$$y+\sqrt{y^2-b^2} = a\cdot e^{\frac{x-b}{a}},$$

alſo

10) $$y = \tfrac{1}{2}a\cdot\left(e^{\frac{x-b}{a}} + e^{-\frac{x-b}{a}}\right),$$

wo a und b die beiden eingehenden willkührlichen Conſtanten ſind *). Deshalb kann man dieſelbe Kurve noch zweien Bedingungen unterwerfen, denen beſtimmte Punkte der Kurve zu genügen haben.

---

*) Der Unterſchied zwiſchen den Gleichungen

$$+y\cdot\partial^2 y_x + \partial y_x^2 + 1 = 0$$

und

$$-y\cdot\partial^2 y_x + \partial y_x^2 + 1 = 0$$

beſteht offenbar darin, daß in der erſtern $y\cdot\partial^2 y_x$ negativ, die Kurve daher gegen die Abſciſſen-Axe concav iſt, daß dagegen in der andern Gleichung daſſelbe $y\cdot\partial^2 y_x$ poſitiv wird, die Kurve alſo gegen die Abſciſſen-Axe convex liegt. Die Normale, die immer von der Kurve zur Abſciſſen-Axe geht, fällt alſo im erſtern Falle mit der Richtung des Krümmungshalbmeſſers zuſammen, iſt aber im andern Falle in der Verlängerung des Krümmungshalbmeſſers.

Aufgabe 6.

Man ſucht die Kurve, in welcher an jedem ihrer Punkte der Krümmungs-Halbmeſſer zu dem Würfel der Normale (bis zur Abſciſſen-Axe gerechnet) ein conſtantes Verhältniß hat, d. h. in welcher ſich die Krümmungs-Halbmeſſer zu einander verhalten, wie die Würfel der zugehörigen Normalen.

Die Differential-Gleichung der geſuchten Kurve iſt dasmal

$$\frac{(1+\partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x} = a \cdot y^3 \cdot \sqrt{1+\partial y_x^2}^3,$$

oder

$$\partial^2 y_x = \pm \frac{1}{ay^3}.$$

A. Nehmen wir zunächſt die Gleichung

1) $$\partial^2 y_x = +\frac{1}{ay^3};$$

multipliciren wir ſie mit dem integrirenden Faktor ∂y_x (§. 40. II.), und wir erhalten

2) $$\partial y_x \cdot \partial^2 y_x = \frac{\partial y_x}{ay^3},$$

oder, wenn man links und rechts nach allem x integrirt,

3) $$\partial y_x^2 = -\frac{1}{ay^2} + b,$$

wo b eine willkührliche Conſtante iſt.

Um dieſes erſte Integral auf's Neue zu integriren, ſetze man $\frac{1}{\partial x_y}$ ſtatt ∂y_x und löſe die Gleichung nach ∂x_y algebraiſch auf; man erhält dann:

4) $$\partial x_y = \frac{y \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{aby^2 - 1}},$$

woraus, wenn man integrirt, hervorgeht

5) $$x = \frac{1}{b \cdot \sqrt{a}} \sqrt{aby^2 - 1} + c,$$

wo c eine zweite willkührliche Conſtante iſt. Dieſer Gleichung kann man auch die Form geben:

6) $$(x-c)^2=\frac{1}{b}y^2-\frac{1}{ab^2};$$

nd nun erkennt man, daß die gesuchte Kurve von der zweiten Ordnung, also ein Kegelschnitt ist.

Löst man diese Gleichung nach y algebraisch auf, so erhält man

7) $$y^2=bx^2-2bcx+bc^2+\frac{1}{ab^2};$$

nd setzt man

8) $$-2bc=C \text{ und } bc^2+\frac{1}{ab^2}=C',$$

› hat man die Gleichung der gesuchten Kurve in der Form

9) $$y^2=bx^2+Cx+C',$$

nd dies ist die Gleichung einer Parabel, Ellipse oder Hyperbel, je nachem b Null, negativ oder positiv ist. — Differenziirt man diese Gleichung 9.) weimal hinter einander, so erhält man

10) $$y\cdot\partial y_x=bx+\tfrac{1}{2}C \text{ und } y\cdot\partial^2 y_x+\partial y_x{}^2=b.$$

Weil aber diese Werthe der Gleichung 1.) genügen müssen, so muß man ine identische Gleichung erhalten, wenn man aus diesen beiden Gleichungen 10.), und der 1.), und der 9.), sowohl y als auch ∂y_x und $\partial^2 y_x$ eliminirt. Man erhält aber dann

11) $$\frac{1}{a}=bC'-\tfrac{1}{4}C^2.$$

Bestimmt man daher zwei der drei Constanten b, C und C' so, daß die Kurve in einzelnen Punkten noch zweien Bedingungen genügt, so findet sich die dritte Constante aus der Gleichung 11.) dazu.

B. Betrachten wir jetzt die andere Gleichung

1) $$\partial^2 y_x=-\frac{1}{ay^3}.$$

Da sie aus der A. 1.) hervorgeht, wenn man daselbst $-a$ latt a setzt, so erhält man als Ur-Integral der jetzigen Gleihung die Gleichung A. 6.) wieder, nur daß $-a$ gesetzt weren muß, wo dort a steht. Das Integral der 1.) wird also jetzt

2) $$(x-c)^2=\frac{1}{b}y^2+\frac{1}{ab^2};$$

nd man bekommt also wiederum einen Kegelschnitt.

Aufgabe 7.

Es wird die Kurve gesucht, in welcher an jedem ihrer Punkte die Normale zur Quadrat-Wurzel aus der Summe des Abscissen-Werthes x und der Subnormale $y \cdot \partial y_x$ ein constantes Verhältniß hat.

Die Gleichung der gesuchten Kurve ist dasmal

1) $$y \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2} = a\sqrt{x + y \cdot \partial y_y}$$

oder

2) $$y^2 \cdot \partial y_x^2 - a^2 y \cdot \partial y_x + y^2 - a^2 x = 0.$$

Um diese Gleichung, welche bloß eine Differential-Gleichung der ersten Ordnung ist, zu integriren, löse man solche zuerst nach $y \cdot \partial y_x$ algebraisch auf. Man erhält dann

3) $$y \cdot \partial y_x = \tfrac{1}{2}a^2 \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 + a^2 x - y^2}.$$

Führt man nun einen neuen Veränderlichen v ein, mittelst der Gleichung

4) $$\sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 + a^2 x - y^2} = v \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{4}a^4 + a^2 x - y^2 = v^2,$$

so erhält man, wenn diese Gleichung nach allem x differenziirt wird,

5) $$\tfrac{1}{2}a^2 - y \cdot \partial y_x = v \cdot \partial v_x;$$

und dadurch geht die 3.) über in

6) $$\partial v_x = \mp 1.$$

Dieſe Gleichung, integrirt, giebt

7) $$v = C \mp x,$$

d. h. wegen der 4.)

8) $$\tfrac{1}{4}a^4 + a^2 x - y^2 = (C \mp x)^2,$$

oder

9) $$y^2 + x^2 - (a^2 + 2C)x + C^2 - \tfrac{1}{4}a^4 = 0,$$

in ſo fern ſtatt der willkührlichen Constante $\mp C$, auch bloß C geſchrieben werden kann. Dieſe Gleichung 9.) ist aber die Gleichung einer Kreislinie, deren Halbmeſſer $= a\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2 + C}$ ist und deren Mittelpunkt in der Abſciſſen-Axe liegt, vom Anfangspunkt der Koordinaten um $\tfrac{1}{2}a^2 + C$ entfernt.

Aufgabe 8.

Es wird die Kurve gesucht, in welcher ſich die Ordinate y zur Subtangente $\frac{y}{\partial y_x}$ verhält, wie eine Conſtante a zur Differenz $y - x$ zwiſchen dem Ordinaten-Werth und dem Abſciſſen-Werth.

Der Ansatz der Aufgabe giebt dasmal die Gleichung

1) $$\partial y_x = \frac{a}{y-x}.$$

Um sie zu integriren, führe man einen neuen Veränderlichen v ein, mittelst der Gleichung

2) $$y-x=v, \quad \text{also} \quad \partial y_x - 1 = \partial v_x.$$

Dadurch geht die 1.) über in

3) $$\partial v_x = \frac{a}{v} - 1 = \frac{a-v}{v}, \quad \text{also} \quad \partial x_v = \frac{v}{a-v};$$

und diese giebt, integrirt,

4) $$x = a - v - a \cdot log(a-v) + C$$

d. h.

5) $$y - a + a \cdot log(a+x-y) = C,$$

wo C die willkührliche Constante ist.

Soll die Kurve durch den Anfangspunkt der Koordinaten durchgehen, so bestimmt sich die Constante C aus der Bedingung, daß für $x=0$, auch $y=0$ werden muß. Die Gleichung 5.) giebt aber für $x=y=0$,

6) $$-a + a \cdot log\, a = C,$$

so daß, wenn man diesen Werth von C in die 5.) substituirt, letztere sich verwandelt in

7) $$y + a \cdot log \frac{a+x-y}{a} = 0,$$

oder

$$y = a \cdot log \frac{a}{a+x-y}, \quad \text{oder} \quad (a+x-y) \cdot e^{y:a} = a$$

oder

8) $$x = a \cdot e^{-y:a} + y - a;$$

und dies ist die Gleichung einer transcendenten Kurve.

Aufgabe 9.

Eine Kurve AMN (Fig. 20.) zu finden, für welche das Verhältniß jedes Bogens $AM = s$ zu der Geraden OC, welche die Tangente BMC an M von OX abschneidet, constant und $= a$ ist*).

---

*) Befindet sich in A ein Hund, und in O sein Herr; geht der Herr von O nach X und läuft zu gleicher Zeit der Hund dem Herrn nach, so nämlich, daß er seine Richtung immer nach dem Herrn zu nimmt, also mit jedem Schritte, den der Herr macht, seine Richtung ändert; denkt man sich ferner, daß Herr und Hund gleichzeitig aus O und A abgehen und daß

Es sey $OP = x$, $PM = y$; so ist die Gleichung der Tangente BMC, wenn x_1 und y_1 die Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes derselben vorstellen (nach I. Bd. §. 170.)

$$y_1 - y = \partial y_x (x_1 - x);$$

und OC ist der Werth von x_1 für $y_1 = 0$; also ist

$$OC = x - \frac{y}{\partial y_x},$$

während sich findet

$$s = \int_{x+\alpha} \sqrt{1+\partial y_x^2} \cdot dx,$$

sobald nur α der Abscissen-Werth OA_1 des Punktes A ist. — Unsere Aufgabe ist daher angesetzt in der Gleichung

$$1) \qquad \int_{x+\alpha} \sqrt{1+\partial y_x^2} \cdot dx = a\left(x - \frac{y}{\partial y_x}\right),$$

welche jedoch in eine gewöhnliche Differential-Gleichung dadurch verwandelt werden muß, daß man sie nach allem x differenziirt. Man erhält daher als Ansatz der Aufgabe die folgende Differential-Gleichung der zweiten Ordnung, nämlich

$$2) \qquad \sqrt{1+\partial y_x^2} = a \cdot \frac{y \cdot \partial^2 y_x}{\partial y_x^2}.$$

Weil aber diese Gleichung den Veränderlichen x selbst nicht enthält, so betrachte man y als den unabhängig Veränderlichen, setze $\frac{1}{\partial x_y}$ statt ∂y_x, und $\frac{-\partial^2 x_y}{\partial x_y^3}$ statt $\partial^2 y_x$ (nach I. Bd. §. 155.), und man erhält die Gleichung

$$3) \qquad \sqrt{1+\partial x_y^2} = -a y \cdot \partial^2 x_y.$$

Nun setze man

$$4) \qquad \partial x_y = v, \quad \text{also} \quad \partial^2 x_y = \partial v_y,$$

und die Gleichung 3.) wird folgende:

$$5) \qquad \sqrt{1+v^2} = -a y \cdot \partial v_y \quad \text{oder} \quad \frac{1}{y} = -a \frac{\partial v_y}{\sqrt{1+v^2}}.$$

---

beider Bewegungen gleichförmig oder constant sind, und daß die Geschwindigkeit des Hundes das a fache der Geschwindigkeit des Herrn ist, so wird der Hund die hier gesuchte Kurve durchlaufen.

Selbige giebt nun integrirt

$$log\, y = -\int \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \cdot dv = -a \cdot log\, C(v+\sqrt{1+v^2}),$$

d. h.

$$6) \qquad (by)^{-1:a} = v+\sqrt{1+v^2},$$

wo C^a oder b eine willkührliche Constante ist. — Setzt man hier statt v wieder seinen Werth ∂x_y, so erhält man

$$7) \qquad (by)^{-\frac{1}{a}} = \partial x_y + \sqrt{1+\partial x_y{}^2}.$$

Diese Gleichung muß nun noch einmal integrirt werden. Weil aber wieder x selbst nicht in ihr vorkommt, so darf man sie nur nach ∂x_y algebraisch auflösen, so daß man erhält

$$8) \qquad \partial x_y = \tfrac{1}{2}(by)^{-\frac{1}{a}} - \tfrac{1}{2}(by)^{\frac{1}{a}},$$

und diese Gleichung nach y integriren. Dies giebt

$$9) \qquad x+c = \tfrac{1}{2}a \cdot \left(\frac{b^{-\frac{1}{a}} y^{-\frac{1}{a}+1}}{a-1} - \frac{b^{\frac{1}{a}} y^{\frac{1}{a}+1}}{a+1} \right),$$

wo c die zweite willkührliche Constante ist.

Von diesen beiden Constanten c und b bestimmt sich aber die eine dadurch, daß der Punkt A gegeben ist, der die Abscissen-Werthe α und β haben mag; und die andere dadurch, daß der Gleichung 1.) genügt werden muß, während bis jetzt erst der Gleichung 2.) genügt ist. Setzt man aber α statt x und β statt y, so erhält man, wenn diese Gleichung von der 9.) subtrahirt, also die Constante c eliminirt wird,

$$10) \qquad \frac{2}{a}(x-\alpha) = \frac{b^{-\frac{1}{a}}\left(y^{-\frac{1}{a}+1} - \beta^{-\frac{1}{a}+1}\right)}{a-1} - \frac{b^{\frac{1}{a}}\left(y^{\frac{1}{a}+1} - \beta^{\frac{1}{a}+1}\right)}{a+1},$$

so daß jetzt nur noch die Constante b bestimmt zu werden braucht.

Die Bestimmung dieser zweiten Constante b aus der Gleichung 1.) kann man sich durch nachstehende geometrische Betrachtung erleichtern. Da nämlich, wenn der Bogen s, $=0$ ist, auch $OC=0$ werden muß, so folgt aus der Gleichung 1.), wenn man ihr diese andere Form giebt,

$$11) \qquad \int_{y\ldots\beta} \sqrt{1+\partial x_y{}^2} \cdot dy = a(x-y\cdot\partial x_y),$$

daß der Ausdruck $x-y\cdot\partial x_y$ der Null gleich werden muß, wenn man bezüglich α und β statt x und y setzt. Dies giebt, wenn man statt ∂x_y seinen Werth aus 8.) hier substituirt, die Gleichung

$$\alpha-\beta\left((\beta b)^{-\frac{1}{a}}-(b\beta)^{+\frac{1}{a}}\right)=0;$$

und diese Gleichung, nach b aufgelöst, giebt

$$(b\beta)^{\frac{1}{a}}=\frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta},$$

also

12) $$b=\frac{1}{\beta}\left(\frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}\right)^a.$$

Dabei kann man noch bemerken, daß $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=OA$ ist und da wenn man den Winkel $AOX=\varphi$ setzt, dann

$$\frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}=\frac{-\cos\varphi\pm 1}{\sin\varphi}=\left\{\begin{matrix}+tg\,\frac{1}{2}\varphi\\-cotg\,\frac{1}{2}\varphi\end{matrix}\right\}$$

ist.

§. 57.

Aufgaben, welche zu Partial-Differential-Gleichungen führen.

Aufgabe 10.

Man soll die Fläche finden, deren Tangential-Ebenen a durch einen und denselben, mittelst der Koordinaten-Werthe η, ζ gegebenen Punkt hindurch gehen.

Sind x, y, z die rechtwinklichen Koordinaten-Werthe ein beliebigen Punktes dieser gesuchten Fläche, so ist die Gleichu der Tangential-Ebene an diesem Punkte (nach I. Bd. §. 17(diese:

1) $$z'-z=\partial z_x(x'-x)+\partial z_y(y'-y).$$

Weil aber diese Fläche durch den Punkt (ξ, η, ζ) hindurch gehen soll, so wird diese Gleichung 1.) identisch, so oft man sie x', y' und z' bezüglich ξ, η und ζ schreibt. Also hat man

2) $$\zeta-z=\partial z_x(\xi-x)+\partial z_y(\eta-y),$$

welche Gleichung identisch wird, so oft man statt z die Fun tion von x und y setzt, welche die gesuchte Fläche vorstellt. Die Gleichung 2.) ist also eine Partial-Differential-Gleichung fü die gesuchte Fläche, welche auch so geschrieben werden kann:

3) $$z-\zeta=\partial z_x\cdot(x-\xi)+\partial z_y\cdot(y-\eta),$$

und welche nun noch integrirt werden muß.

Man kann diese Gleichung sogleich einfacher gestalten, wenn man sich Koordinaten-Axen OX, OY und OZ denkt, welche wie gewöhnlich auf einander senkrecht stehen, welche aber durch den gegebenen Punkt hindurch gehen, in dem sich alle Tangential-Ebenen vereinigen sollen; dann wird nämlich $x = y = z = 0$ und die Gleichung der gesuchten Fläche, auf diese Axen bezogen, nimmt nun die Form an:

4) $$z - y \cdot \partial z_y - x \cdot \partial z_x = 0.$$

Sie gehört zu den lineären Partial-Gleichungen, wird deshalb nach §. 50.) integrirt, und giebt zum allgemeinen Integral (nach dem Beispiel zu §. 50., sobald daselbst $n = 1$ genommen wird)

5) $$\frac{z}{x} = F_u, \quad \text{wenn} \quad u = \frac{y}{x} \quad \text{gesetzt wird,}$$

wo F_u eine ganz willkührliche Funktion von u vorstellt. — Unsere Aufgabe hat daher unendlich viele Auflösungen nach den unendlich vielen Formen, welche statt F_u gesetzt werden.

Setzt man z. B. $F_u = a + bu$, so wird die Gleichung 5.) jetzt diese

$$\frac{z}{x} = a + b \cdot \frac{y}{x} \quad \text{oder} \quad z = ax + by;$$

und dies ist die Gleichung einer jeden, durch den Punkt O hindurchgehenden Ebene, die nach den verschiedenen Werthen von a und b immer anders und anders zu liegen kommt. —

Nimmt man aber

$$F_u = a + bu + cu^2,$$

so geht die Gleichung 5.) über in

$$\frac{z}{x} = a + b\frac{y}{x} + c\frac{y^2}{x^2}$$

oder

$$xz = ax^2 + bxy + cy^2$$

und dies ist eine Fläche der zweiten Ordnung, deren Durchschnitte mit Ebenen, Linien der zweiten Ordnung oder sogenannte Kegelschnitte geben (I. Bd. §. 141.), und welche selbst unzählich viele senkrechte oder schiefe Kegel vorstellt, nach den verschiedenen Werthen, welche statt der Constanten a, b, c gesetzt werden.

Giebt man dem F_u nach und nach immer andere solche Formen, so bekommt man noch immer andere und andere Geschlechter von krummen Flächen, welche der Bedingung unserer Aufgabe entsprechen, während in jedem dieser Geschlech-

ter wiederum viele Arten von Flächen seyn können, nach den besonderen Bedingungen, denen man die Constanten a, b, c etc. etc. unterwirft; und während in jeder Art wieder unendlich viele einzelne bestimmte Flächen enthalten sind, nach den verschiedenen bestimmten Werthen, die statt der Constanten a, b, c etc. etc. gesetzt werden können.

So kann man z. B. $F_u = \frac{a}{u} + b + cu^2$ nehmen, und man erhält dann aus 5.) die Gleichung

$$\frac{z}{x} = a\frac{x}{y} + b + c\frac{y^2}{x^2} \quad \text{oder} \quad xyz = ax^3 + bx^2y + cy^3,$$

welches die Gleichung einer allgemeineren Kegelfläche ist, die man eine Kegelfläche der dritten Ordnung nennen könnte, in so fern Ebenen durchgelegt werden können, welche diese Fläche in Linien der dritten Ordnung schneiden.

Nimmt man aber $F_u = log\, u$, so hat man aus 5.)

$$\frac{z}{x} = log\, y - log\, x \quad \text{oder} \quad z = x(log\, y - log\, x),$$

welche wiederum die Gleichung einer allgemeineren Kegelfläche ist, die wiederum ihre Spitze in O hat, und welche zu den transcendenten Kegelflächen gezählt werden muß.

Es kann aber unsere Aufgabe gleich von vorn herein, näher bestimmt werden. Macht man z. B. zur Bedingung, daß die gesuchte Fläche, außer daß sie die obige Eigenschaft hat, auch noch durch die durch die Gleichungen

6) $\quad z = ax^2 + bx + c \quad$ und $\quad y = x^2 + \beta x$

gegebene Kurve gehen soll (so daß letztere Kurve ganz in ihr liegt), so muß die Gleichung 5.) identisch werden, so oft $ax^2 + bx + c$ statt z, und $x^2 + \beta x$ statt y gesetzt wird. Die Gleichung 5.) geht aber durch diese Substitutionen über in

$$ax + b + \frac{c}{x} = F_u, \qquad \text{wo} \qquad u = x + \beta \qquad \text{ist.}$$

Findet man aus letzterer Gleichung $x = u - \beta$ und substituirt man diesen Werth von x in die erstere, so erhält man

7) $\quad a(u-\beta) + b + \frac{c}{u-\beta} = F_u,$

so daß nun die Form F_u völlig bestimmt ist. Die Gleichung 5.) giebt daher dasmal, weil $\frac{c}{\frac{y}{x}-\beta}=\frac{cx}{y-\beta x}$ ist,

$$\frac{z}{x}=a\left(\frac{y}{x}-\beta\right)+b+\frac{cx}{y-\beta x}$$

oder

8) $(y-\beta x)z=a(y-\beta x)^2+bx(y-\beta x)+cx^2$;

und dies ist die Gleichung einer völlig bestimmten Fläche der zweiten Ordnung.

Daß übrigens, wie auch die Funktion F_u genommen werden mag, die Gleichung 5.) allemal eine Fläche ausdrückt, welche durch Bewegung einer durch O hindurchgehenden Geraden beschrieben wird, geht daraus hervor, weil für alle Punkte der Fläche, für welche $\frac{y}{x}$ denselben constanten Werth α behält, auch allemal $\frac{z}{x}$ denselben constanten Werth F_α hat, was nur dann der Fall ist, wenn alle diese Punkte der Fläche in einer und derselben, durch die Gleichungen $\frac{y}{x}=\alpha$ und $\frac{z}{x}=F_\alpha$ oder

$$y-\alpha x=0 \quad \text{und} \quad z-F_\alpha\cdot x=0$$

gegebenen Geraden liegen.

Man vergleiche hiermit noch den §. 188. des I. Bds.).

Anmerkung. Hätte man unter den Flächen der zweiten Ordnung, also unter den durch die allgemeine Gleichung

1) $az^2+by^2+cx^2+dxz+eyz+fxy+gz+hy+kx+l=0$

gegebenen Flächen diejenigen gesucht, welche der in der Aufgabe gestellten Bedingung entsprechen, nämlich der Bedingung, daß alle ihre Tangential-Ebenen durch einen und denselben Punkt hindurch gehen sollen, den man zum Anfangs-Punkt der Koordinaten nehmen kann, — so wäre die Form von F_u bereits gegeben gewesen, und man hätte dann am besten sein Ziel erreicht, wenn man die Gleichung 1.) nach x und nach y differenziirt, aus den dadurch erhaltenen Gleichungen und der 1.), und der Partial-Gleichung 4.) sowohl z, als auch dz_x und

∂z_y eliminirt hätte. Die dann entstehende Gleichung muß nämlich identisch werden für jedes x und für jedes y. Ordnet man sie also und setzt man dann die Koefficienten von x, y, x^2, xy, y^2 einzeln der Null gleich, so erhält man die Bedingungs-Gleichungen zwischen den Koefficienten a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, welche erfüllt seyn müssen, damit die Gleichung 1.) alle Kegelflächen der zweiten Ordnung vorstelle, während die Koordinaten-Axen durch die Spitze derselben gelegt sind.

Aufgabe 11.

Man sucht eine Fläche, deren Tangential-Ebenen alle mit einer und derselben gegebenen Geraden parallel laufen.

Nimmt man letztere Gerade zur Axe OY, und nimmt man durch einen beliebigen Punkt O derselben, OX und OZ senkrecht auf OY und auch senkrecht auf einander; — sind ferner x, y, z die auf diese Koordinaten-Axen bezogenen Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes der gesuchten Fläche, so ist die Gleichung einer Tangential-Ebene an diesem Punkte

1) $$z' - y' \cdot \partial z_y - x' \cdot \partial z_x + a = 0.$$

Damit aber diese Ebene mit der Axe OY parallel sey, muß man, weil jede mit OY parallele Ebene durch eine Gleichung von der Form

$$z' - bx' + a = 0$$

ausgedrückt ist,

2) $$\partial z_y = 0$$

nehmen. Diese Gleichung 2.) ist also die Partial-Gleichung der dasmal gesuchten Fläche. Sie liefert, wenn man sie integrirt,

3) $$z = F_x,$$

wo F_x eine ganz willkührliche Funktion von x vorstellt.

Diese Gleichung 3.) läßt sehen, daß die gesuchte Fläche eine allgemeine Cylinder-Fläche ist, deren Seiten auf der Koordinaten-Ebene XOZ senkrecht stehen.

Soll aber die gesuchte Fläche noch der Bedingung genügen, daß eine durch die Gleichungen

$$\varphi_{x,y,z} = 0 \quad \text{und} \quad \psi_{x,y,z} = 0$$

gegebene Kurve ganz und mit allen ihren Punkten in ihr liegt, so finde man aus diesen letztern beiden Gleichungen y und z, in x ausgedrückt, und setze den für z gefundenen Werth z_x statt z in die Gleichung 3.) und man hat F_x so bestimmt, daß die Gleichung 3.) die Cylinder-Fläche giebt, welche auch noch dieser letztern Bedingung genügt.

Anmerkung 1. Hätte man unter den Flächen der zweiten Ordnung alle diejenigen gesucht, deren Tangential-Ebenen alle mit der zur Axe OY angenommenen Geraden parallel laufen, so hätte man aus der allgemeinen Gleichung der Flächen der zweiten Ordnung, zuerst z, dann ∂z_y gesucht, letzteres aber der Null gleich gesetzt, diese Gleichung nach x und nach y geordnet, und zuletzt die Koefficienten von x, y, x^2, xy, y^2 etc. etc. einzeln der Null gleich gesetzt. Dann hätte man die Bedingungs-Gleichungen (zwischen den Koefficienten der allgemeinen Gleichung für die Flächen der zweiten Ordnung) erhalten, welche erfüllt seyn müssen, damit man jedesmal die Gleichung einer Cylinder-Fläche habe, deren Seiten mit OY parallel laufen.

Anmerkung 2. Hätte man in der allgemeinen Aufgabe des Paragraphen, die Axe OY nicht mit der gegebenen Geraden zusammen fallen lassen, sondern hätte man die Koordinaten-Axen beliebig gelegt, die Gerade aber dann durch die Gleichungen

1) $y'' = mx'' + h \quad \text{und} \quad z'' = nx'' + k$

gegeben, so hätte man die Gleichung einer jeden mit dieser Geraden parallelen Ebene so schreiben müssen, nämlich (nach I. Bd. pag. 465. Note)

2) $z' = (n - bm)x' + by' + c.$

Damit aber diese Ebene Tangential-Ebene an dem durch x, y, z bestimmten Punkte der gesuchten Fläche sey, muß man

3) $\partial z_x = n - bm \quad \text{und} \quad \partial z_y = b$

nehmen; und diese beiden Gleichungen, wenn man b eliminirt, geben

4) $\partial z_x + m \cdot \partial z_y = n$

als die Partial-Gleichung der gesuchten Fläche.

Diese Gleichung wird wieder nach §. 50.) integrirt und giebt

5) $z - nx = F_u$, wo $u = y - mx$ ist,

während F_u jede beliebige Funktion von u vorstellt.

Diese Gleichung giebt für alle Werthe von x und y, für welche $y - mx$ denselben constanten Werth α hat, auch für $z - nx$ einen und denselben constanten Werth F_α. Daher liegen alle diese Punkte in einer und derselben Geraden, die mit der 1.) parallel ist. Die in 5.) gefundene Fläche wird also durch Bewegung einer mit der 1.) parallelen Geraden beschrieben; sie ist daher allemal eine (allgemeine) Cylinderfläche.

Soll nun die Funktion F_u näher bestimmt werden, so muß man auch die Aufgabe selbst näher bestimmen. Soll z. B. die gesuchte Fläche noch durch die, mittelst der Gleichungen

6) $y = \alpha x + \beta$ und $z = \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$

gegebene Kurve hindurch gehen, so setze man, um F_u dieser Bedingung gemäß zu bestimmen, diese Werthe aus 6.) statt y und z in die Gleichung 5.); und man erhält

7) $\gamma x^2 + (\delta - n)x + \varepsilon = F_u$, wo $u = (\alpha - m)x + \beta$.

Findet man aber aus der letztern Gleichung $x = \frac{u - \beta}{\alpha - m}$, und setzt man diesen Werth von x in die erstere der Gleichungen 7.), so ergiebt sich

8) $\frac{\gamma}{(\alpha - m)^2}(u - \beta)^2 + \frac{\delta - n}{\alpha - m}(u - \beta) + \varepsilon = F_u$,

wodurch die Form der Funktion F_u gefunden ist.

Die Gleichung 5.) der gesuchten Fläche wird nun

9) $z - nx = \frac{\gamma}{(\alpha - m)^2}(y - mx - \beta)^2 + \frac{\delta - n}{\alpha - m}(y - mx - \beta) + \varepsilon$;

und diese Fläche genügt also nun allen Bedingungen der Aufgabe. Sie ist eine Cylinder-Fläche der zweiten Ordnung, welche von jeder Ebene in einer Ellipse (wenn nicht in zwei parallelen Geraden) geschnitten wird.

Auf-

Aufgabe 12.

Man ſoll eine Fläche finden, welche die Eigenſchaft hat, daß jede Tangential-Ebene an irgend einem Punkte derſelben, ſie längs einer Linie berührt, ſo daß die Tangential-Ebenen an allen Punkten dieſer Linie in eine und dieſelbe zuſammen fallen.

Da dieſe Aufgabe bereits in der Note zu pag. 461. des I. Bds.) gelöſt iſt, ſo ſchreiben wir bloß hier die dort für dieſe Fläche bereits gefundene Partial-Gleichung (der zweiten Ordnung) her, nämlich

$$1) \qquad \partial^2 z_x \cdot \partial^2 z_y - (\partial^{1,1} z_{x,y})^2 = 0.$$

Ihr allgemeines Integral muß zwei willkührliche Funktionen in ſich aufnehmen.

Wir wollen dieſe Gleichung 1.) dadurch integriren, daß wir zunächſt ein beſonderes Integral aufſuchen, und dann aus dieſem ein allgemeines abzuleiten trachten (nach dem Muſter des §. 52. N. 2.). Man bemerkt aber leicht, daß der Gleichung 1.) genügt iſt, wenn man

$$\partial^2 z_x = \partial^2 z_y = \partial^{1,1} z_{x,y} = 0$$

nimmt. Aus $\partial^2 z_x = 0$ folgt aber $\partial z_x = f_y$ d. h. ∂z_x nach x conſtant; und aus $\partial^{1,1} z_{x,y} = 0$ folgt $\partial z_x = \varphi_x$, d. h. ∂z_x auch nach y conſtant. Alſo muß man

$$\partial z_x = a$$

nehmen, wo a conſtant iſt nach x und nach y. — Aus ganz analogen Gründen muß

$$\partial z_y = b$$

genommen werden, wo b conſtant iſt nach x und nach y. Alſo muß man

$$2) \qquad z - ax - by - c = 0 \qquad \text{oder} \qquad F_{x,y,z} = 0$$

nehmen, wenn man ein beſonderes Integral der Gleichung 1.) haben will, wo a, b, c nach x und nach y conſtant ſind, und

wo man den Ausdruck $z-ax-by-c$ durch $F_{x,y,z}$ bezeichnet hat.

Denkt man ſich nun a, b und c als ganz willkührliche Funktionen von α, und α ſelbſt als die durch

3) $\quad \partial F_\alpha = 0 \quad$ oder $\quad x\cdot\partial a_\alpha + y\cdot\partial b_\alpha + \partial c_\alpha = 0$

gegebene Funktion von x und y (und z), ſo wird die Gleichung 2.) der Partial-Gleichung 1.) noch genügen, aber willkührliche Funktionen a_α, b_α und c_α von einer beſtimmten Funktion α von x und y (und z) enthalten. Man hat alſo nun eine Art allgemeines Integral der Partial-Gleichung 1.), wenn auch in einer wenig bequemen Form.

Die Gleichung 3.), wenn man ſolche durch ∂a_α, oder durch ∂b_α, oder durch ∂c_α dividirt, läßt übrigens ſehen, daß man je zwei der drei Buchſtaben a, b, c als Funktionen des dritten anſehen könne, und daß dann nur dieſer dritte aus den Gleichungen 2.) und 3.) eliminirt werden dürfe, um die geſuchte Integral-Gleichung, welche jetzt nur noch zwei willkührliche Funktionen enthält, zu erhalten *).

Setzt man alſo etwa $c = \alpha$, ſo erhält man die Gleichung der hier geſuchten Fläche, wenn man aus

4) $\quad z - a_\alpha\cdot x - b_\alpha\cdot y - \alpha = 0$

und

5) $\quad x\cdot\partial a_\alpha + y\cdot\partial b_\alpha + 1 = 0$

den Veränderlichen α eliminirt.

Weil aber die Gleichung 4.), ſo oft α irgend einen beſtimmten Werth hat, die Gleichung einer Ebene iſt, ſo ſtellen die beiden Gleichungen 4.) und 5.), wenn ſie für jedes α ge-

---

*) Dieſelbe Partial-Gleichung der zweiten Ordnung hat auch ein erſtes Integral, nämlich

$$q = F_p$$

wenn $\partial z_y = q$, $\partial z_x = p$ geſetzt wird, und wenn F_p eine ganz willkührliche Funktion von p vorſtellt.

meinschaftlich statt finden sollen, die Gleichung jeder Fläche vor, welche durch Bewegung einer Ebene entsteht, d. h. jeder abwickelbaren Fläche (nach I. Bd. §. 187.). — Benutzt man diese Bemerkung, so kann man auch leicht noch die beiden willkührlichen Funktionen a_α und b_α so bestimmen, daß die Fläche selbst noch zweien Bedingungen genügt.

Soll z. B. die gesuchte Fläche noch durch zwei, mittelst der Gleichungen

6) $\quad y = \varphi_x \quad$ und $\quad z = \psi_x$

und

7) $\quad y = \varphi'_x \quad$ und $\quad z = \psi'_x$

gegebene Kurven hindurch gehen, so wird bei irgend einer festen Lage der sich bewegenden Ebene, die Tangente der erstern Kurve, in einem Punkte, welcher den Abscissen-Werth β hat, ganz in dieser Ebene liegen, während dasselbe auch von der Tangente der andern Kurve gilt, nur daß ein anderer Berührungs-Punkt hier wird, welcher den Abscissen-Werth γ haben mag. Dabei sind β und γ offenbar unbekannte Funktionen von α.

Da nun die Gleichungen der erstern Tangente (nach §. 180. d. I. Bds.) diese sind:

8) $\quad y - \varphi_\beta = \partial\varphi_\beta \cdot (x - \beta) \quad$ und $\quad z - \psi_\beta = \partial\psi_\beta \cdot (x - \beta)$,

und die Gleichung der Ebene 4.), weil sie durch denselben Berührungs-Punkt gehen soll, diese ist:

9) $\quad z - \psi_\beta = a_\alpha \cdot (x - \beta) + b_\alpha \cdot (y - \varphi_\beta)$,

so müssen diese aus 8.) gezogenen Werthe von y und z, die Gleichung 9.) identisch machen. Dies giebt aber die Gleichung

I. $\quad \partial\psi_\beta = a_\alpha + \partial\varphi_\beta \cdot b_\alpha$.

Die Gleichungen der zweiten Tangente sind

10) $\quad y - \varphi'_\gamma = \partial\varphi'_\gamma \cdot (x - \gamma) \quad$ und $\quad z - \psi'_\gamma = \partial\psi'_\gamma \cdot (x - \gamma)$;

und diese Werthe von y und z in die 9.) substituirt, müssen letztere wieder identisch machen. Dies giebt aber die Gleichung

II. $\partial\psi'_\gamma = a_\alpha + \partial\varphi'_\gamma \cdot b_\alpha.$

Zur Beſtimmung von β und γ hat man endlich die Gleichung 4.), welche identiſch werden muß, einmal wenn die Koordinaten-Werthe des einen Berührungs-Punktes $(\beta, \varphi_\beta, \psi_\beta)$, dann aber auch wenn die Koordinaten-Werthe des andern Berührungs-Punktes $(\gamma, \varphi'_\gamma, \psi'_\gamma)$ bezüglich ſtatt x, y, z geſetzt werden. Dies giebt die Gleichungen

III. $\psi_\beta - \beta \cdot a_\alpha - \varphi_\beta \cdot b_\alpha - \alpha = 0$

IV. $\psi'_\gamma - \gamma \cdot a_\alpha - \varphi'_\gamma \cdot b_\alpha - \alpha = 0.$

Eliminirt man nun aus den vier Gleichungen I.—IV.) ſowohl β als auch γ, ſo bleiben zwei Gleichungen übrig, welche a_α und b_α in α ausgedrückt liefern, ſo daß nun dieſe anfänglich willkührlichen Funktionen den jetzigen Bedingungen gemäß beſtimmt ſind.

Subſtituirt man zuletzt dieſe Werthe ſtatt a_α und b_α in die Gleichungen 4.) und 5.), und eliminirt man dann α aus dieſen beiden Gleichungen, ſo hat man die Gleichung der Fläche, welche allen gegebenen Bedingungen entſpricht.

Es ſeyen z. B. die Kurven gegeben

$$y = \varphi_x = mx^2, \quad z = \psi_x = nx^2,$$
$$y = \varphi'_x = m'x^2, \quad z = \psi'_x = n'x^2;$$

ſo hat man $\partial\varphi_x = 2mx$, $\partial\psi_x = 2nx$, $\partial\varphi'_x = 2m'x$ und $\partial\psi'_x = 2n'x$.

Die vier Gleichungen I.—IV.) werden nun folgende:

1′) $2n\beta = a + 2m\beta \cdot b,$

2′) $2n'\gamma = a + 2m'\gamma \cdot b,$

3′) $n\beta^2 - \beta \cdot a - m\beta^2 \cdot b - \alpha = 0,$

4′) $n'\gamma^2 - \gamma \cdot a - m'\gamma^2 \cdot b - \alpha = 0.$

Findet man aus den beiden erſtern Gleichungen

$$\beta = \frac{a}{2n - 2mb} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{a}{2n' - 2m'b},$$

und ſubſtituirt man dieſe Werthe in die Gleichungen 3′.) und 4′.); dividirt man letztere durch a^2 weg, und ſubtrahirt man ſie dann von einander, um a zu eliminiren, ſo erhält man eine kubiſche Gleichung zur Beſtimmung von b, welche kein α enthält, welche alſo b conſtant liefert. — Die eine der letztern beiden Gleichungen giebt dann $a = c \cdot \sqrt{\alpha}$, wo c auch eine in m, n, m′, n′ ausgedrückte Conſtante vorſtellt.

Die Gleichungen 4.) und 5.) werden nun, weil $\delta b_{\alpha} = 0$ ist,

$$z - cx \cdot \sqrt{\alpha} - by - \alpha = 0 \quad \text{und} \quad \frac{cx}{2\sqrt{\alpha}} + 1 = 0.$$

Eliminirt man α aus beiden, so ergiebt sich zuletzt

$$z + \tfrac{1}{4}c^2x^2 - by = 0.$$

Dies ist also die Gleichung der hier gesuchten (abwickelbaren) Fläche, welche letztere dasmal von der zweiten Ordnung ist.

Achtes Kapitel.

Noch einiges über bestimmte Integrale; als Fortsetzung des zweiten Kapitels.

Vorerinnerung.

Es ist oft wünschenswerth, daß man in den Fällen, wo das allgemeine Integral entweder nur in unendlichen Reihen, oder in anderer unbequemer Form hergestellt werden kann, den Werth eines bestimmten Integrals zwischen völlig bestimmten, in Ziffern-Werthen gegebenen Grenzen, z. B. zwischen 0 und ∞, oder zwischen $-\infty$ und $+\infty$, oder zwischen 0 und 1, u. d. gl. anzugeben wisse. — Wir wollen daher hier einige Methoden geben, die man zu diesem Behufe anwenden kann.

§. 58.

Eine sehr einfache Methode, Werthe von bestimmten Integralen zu erhalten, besteht aber darin, daß man von bekannten, oder leicht zu findenden Integralen und ihren Werthen ausgeht, und solche nach einem zweiten Buchstaben, den sie noch enthalten, integrirt oder differenziirt. Nachstehende Beispiele werden dies näher erläutern.

Es ist

$$1) \qquad \int e^{-kx} \cdot dx = -\frac{e^{-kx}}{k}.$$

Daraus folgt, wenn k positiv ist, weil dann e^{-kx} für $x = \infty$ der Null gleich wird,

$$I. \qquad \int_{\infty}^{+0} e^{-kx} \cdot dx = \frac{1}{k} \text{ (wenn k positiv).}$$

Denkt man sich also z positiv und statt k gesetzt, und

dann links und rechts das Integral nach z genommen zwischen den positiven Grenzen a und b, so erhält man:

$$2)\quad \int_{b\div a}\left(\int_{\infty\div 0} e^{-xz}\cdot dx\right)\cdot dz = log\, b - log\, a = log\,\frac{b}{a}.$$

Weil man aber links dasselbe Resultat erhält, wenn man die Ordnung der Integration umkehrt (nach §. 23.) und weil (nach 1.)

$$\int_{b\div a} e^{-xz}\cdot dz = \frac{-e^{-bx}+e^{-ax}}{x}$$

ist, so giebt die 2.) noch

$$\text{II.}\quad \int_{\infty\div 0}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cdot dx = log\,\frac{b}{a}\ \text{(wenn a und b positiv)},$$

so daß man nun II.) aus I.) auf dem beschriebenen Wege erhalten hat.

Es ist ferner (nach 1.), wenn i die $\sqrt{-1}$ vorstellt,

$$\int e^{-(k+\theta\cdot i)x}\cdot dx = -\frac{e^{-(k+\theta\cdot i)x}}{k+\theta\cdot i} = -\frac{(k-\theta\cdot i)\cdot e^{-(k+\theta\cdot i)x}}{k^2+\theta^2}.$$

Setzt man hier links und rechts statt $e^{-(k+\theta\cdot i)x}$ den gleichen Ausdruck $e^{-kx}\cdot(cos\,\theta x - i\cdot sin\,\theta x)$ oder $e^{-kx}\cdot cos\,\theta x - i\cdot e^{-kx}\cdot sin\,\theta x$, und zerlegt man links und rechts die Ausdrücke in zwei Theile, wovon der eine kein i, der andere aber i als Faktor enthält; — und setzt man dann die reellen Theile einzeln und die imaginären Theile einzeln einander gleich, so erhält man

$$\int e^{-kx}\cdot cos\,\theta x\cdot dx = -\frac{k\cdot cos\,\theta x-\theta\cdot sin\,\theta x}{k^2+\theta^2}\cdot e^{-kx}$$

$$\int e^{-kx}\cdot sin\,\theta x\cdot dx = -\frac{\theta\cdot cos\,\theta x+k\cdot sin\,\theta x}{k^2+\theta^2}\cdot e^{-kx}\ *).$$

---

*) Dieselben beiden Resultate erhält man auf ganz direktem Wege, indem man statt $cos\,\theta x$ und $sin\,\theta x$ ihre Werthe $\frac{e^{\theta x\cdot i}+e^{-\theta x\cdot i}}{2}$ und $\frac{e^{\theta x\cdot i}-e^{-\theta x\cdot i}}{2i}$ setzt, mit e^{-kx} wirklich multiplicirt und dann geradezu integrirt.

Iſt nun k poſitiv, ſo wird für $x = \infty$, e^{-kx} der Null gleich; und man erhält

$$\text{III.}\quad \int_{\infty+0} e^{-kx} \cdot \cos \theta x \cdot dx = \frac{k}{k^2+\theta^2}$$

$$\text{IV.}\quad \int_{\infty+0} e^{-kx} \cdot \sin \theta x \cdot dx = \frac{\theta}{k^2+\theta^2}$$

(wenn k poſitiv).

Will man nun aus dieſen beſtimmten Integralen, noch neue beſtimmte Integrale finden, ſo darf man nur die erhaltenen Gleichungen links und rechts nach einem darin vorkommenden Buchſtaben differenziiren oder integriren (letzteres zwiſchen gegebenen Grenzen). Integrirt man z. B. die III.) links und rechts nach θ, ſo erhält man, weil

$$\int e^{-kx} \cdot \cos \theta x \cdot d\theta = \frac{e^{-kx} \cdot \sin \theta x}{x} \quad \text{und} \quad \int \frac{k}{k^2+\theta^2} \cdot d\theta = \frac{1}{tg} \frac{\theta}{k}$$

iſt, und wenn man die Integrale zwiſchen den Grenz-Werthen a und b von θ, nimmt,

$$\text{V.}\quad \int_{\infty+0} \frac{e^{-kx} \cdot (\sin bx - \sin ax)}{x} \cdot dx = \frac{1}{tg} \frac{b}{k} - \frac{1}{tg} \frac{a}{k}$$

(wenn k poſitiv).

Dieſelben Reſultate ergeben ſich auch noch leichter, wenn man theilweiſe integrirt, d. h. die Formel §. 4. N. 3.) anwendet. Dadurch bekommt man Gleichungen, aus denen ſich die Integrale auf algebraiſchem Wege finden. Man erhält nämlich durch theilweiſe Integration

$$\int e^{-kx} \cdot \cos \theta x \cdot dx = \frac{e^{-kx} \cdot \sin \theta x}{\theta} + \frac{k}{\theta} \int e^{-kx} \cdot \sin \theta x \cdot dx$$

und

$$\int e^{-kx} \cdot \sin \theta x \cdot dx = -\frac{e^{-kx} \cdot \cos \theta x}{\theta} - \frac{k}{\theta} \int e^{-kx} \cdot \cos \theta x \cdot dx.$$

Bezeichnet man nun die beiden geſuchten Integrale bezüglich durch u und durch v, ſo hat man zwei Gleichungen zwiſchen u und v (algebraiſche vom erſten Grade), aus denen nun ſogleich (durch algebraiſche Auflöſung derſelben nach den beiden Unbekannten u und v) dieſe Unbekannten u und v gefunden werden.

Für $a=0$ folgt hieraus, weil $\frac{1}{tg}0=0$ ist,

VI. $$\int_{\infty\div 0}\frac{e^{-kx}\cdot sin\,bx}{x}\cdot dx=\frac{1}{tg}\frac{b}{k}$$ (wenn k positiv).

Denkt man sich nun k zwar positiv, aber unendlich klein, so wird $\frac{b}{k}$ unendlich groß und mit b zugleich positiv oder negativ; also nähert sich $\frac{1}{tg}\frac{b}{k}$ unendlich nahe dem $+\frac{\pi}{2}$, wenn b positiv, und dem $-\frac{\pi}{2}$, wenn b negativ; und so kann man folgern, daß für $k=0$ als Uebergang hervorgeht

VII. $$\int_{\infty\div 0}\frac{sin\,bx}{x}\cdot dx=\pm\frac{\pi}{2}$$ (je nachdem b $\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$ ist).

Dieses Integral wird in vielen Fällen mit Erfolg angewendet.

Integrirt man die IV.) nach θ zwischen den Grenzen a und b, so erhält man, weil

$$\int e^{-kx}\cdot sin\,\theta x\cdot d\theta=-\frac{e^{-kx}\cdot cos\,\theta x}{x}$$

und $$\int\frac{\theta}{k^2+\theta^2}\cdot d\theta=\tfrac{1}{2}log\,(k^2+\theta^2)$$

ist,

VIII. $$\int_{\infty\div 0}\frac{e^{-kx}\cdot(cos\,ax-cos\,bx)}{x}\cdot dx$$
$$=\tfrac{1}{2}log\frac{k^2+b^2}{k^2+a^2}$$ (wenn k positiv ist).

Integrirt man dagegen die IV.) nach k, so erhält man, wegen

$$\int_{k\div 0}e^{-kx}\cdot sin\,\theta x\cdot dk=-\frac{e^{-kx}\cdot sin\,\theta x}{x}+\frac{sin\,\theta x}{x},$$

sogleich (wenn man links und rechts die Integrale zwischen 0 und k nimmt)

$$\int_{\infty\div 0}\frac{sin\,\theta x}{x}\cdot dx-\int_{\infty\div 0}\frac{e^{-kx}\cdot sin\,\theta x}{x}\cdot dx=\frac{1}{tg}\frac{k}{\theta},$$

ſobald nur k poſitiv iſt. Addirt man aber hierzu die Gleichung VI.), nachdem man in letzterer vorher θ ſtatt b geſetzt hat, ſo erhält man

$$\int_{\infty+0} \frac{\sin\theta x}{x}\cdot dx = \frac{1}{tg}\frac{k}{\theta} + \frac{1}{tg}\frac{\theta}{k},$$

während die beiden Bogen zur Rechten poſitiv ſind, wenn θ poſitiv, und negativ, wenn θ negativ iſt, — die Summe derſelben Bogen aber allemal $\frac{1}{2}\pi$ iſt. Alſo hat man das Reſultat VII.) noch einmal, und ohne daß man das dortige k, welches immer poſitiv iſt, der Null gleich zu nehmen braucht, wie dort geſchehen iſt.

Integrirt man eben ſo die III.) nach k zwiſchen den Grenzen 0 und k, ſo erhält man ſogleich:

$$\text{IX.}\quad \int_{\infty+0} \frac{(1-e^{-kx})\cdot\cos\theta x}{x}\cdot dx = \tfrac{1}{2}log\frac{k^2+\theta^2}{\theta^2} \quad \text{(wenn k poſitiv).}$$

Wird nun hier h ſtatt k geſetzt, und dieſes neue Reſultat von der IX.) ſelbſt wieder ſubtrahirt, ſo ergiebt ſich noch

$$\text{X.}\int_{\infty+0} \frac{(e^{-hx}-e^{-kx})\cdot\cos\theta x}{x}\cdot dx = \tfrac{1}{2}log\frac{k^2+\theta^2}{h^2+\theta^2} \quad \text{(wenn h u. k poſitiv).}$$

Setzt man in VI.) h ſtatt k, und ſubtrahirt man die III.) von dieſem neuen Reſultate, ſo ergiebt ſich dagegen, wenn noch θ ſtatt b geſetzt wird,

$$\text{XI.}\quad \int_{\infty+0} \frac{(e^{-hx}-e^{-kx})\cdot\sin\theta x}{x}\cdot dx$$
$$= \frac{1}{tg}\frac{\theta}{h} - \frac{1}{tg}\frac{\theta}{k}$$
$$= \frac{1}{tg}\frac{k}{\theta} - \frac{1}{tg}\frac{h}{\theta} \text{ *) (wenn k und h poſitiv).}$$

Differenziirt man alle dieſe Reſultate wieder nach h, nach k, oder nach θ, oder nach b, oder nach a, etc. etc., ſo erhält man immer wieder richtige Reſultate, jedoch hier meiſt

*) Da $\frac{1}{tg}\frac{\theta}{h} = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{tg}\frac{h}{\theta}$ iſt.

die vorher schon bekannten, oder aus diesen leicht zusammensetzbaren *).

§. 59.

Diese vorstehende Methode besteht also zum Theil darin, daß man das gesuchte Integral $= y$ setzt, dann für ∂y_k seinen Werth f_k zu finden trachtet, um dann aus der gefundenen Gleichung

$$\partial y_k = f_k$$

durch Integration nach k, den Werth von y zu erhalten.

Dieses Verfahren verallgemeinert man aber, wenn man, statt sich die einfachste Differential-Gleichung $\partial y_k = f_k$ zu verschaffen, überhaupt eine Differential-Gleichung zwischen ∂y_k und k, in welcher aber auch y selbst noch vorkommt, zu er-

*) Nimmt man das Resultat VII.) und differenziirt man solches nach b, so erhält man

$$\int_{\infty \div 0} cos\, bx \cdot dx = 0;$$

und dies Resultat ist offenbar unrichtig, weil man nach §. 20.) das Integral als eine Summe aller stetig neben einander liegenden Werthe von $cos\, bx \cdot dx$ ansehen muß, solche Summe aber für alle Werthe von x von 0 bis $\frac{2\pi}{b}$, dann wieder von $\frac{2\pi}{b}$ bis $\frac{4\pi}{b}$, dann wieder von $\frac{4\pi}{b}$ bis $\frac{6\pi}{b}$, u. s. f., überhaupt von $\frac{2n\pi}{b}$ bis $\frac{2(n+1)\pi}{b}$, einzeln der Null gleich wird, also im Ganzen allerdings ebenfalls der Null gleich werden müßte, wenn man annehmen könnte, daß ∞ von der Form $\frac{2n\pi}{b}$ ist, wo n selbst unendlich groß ist. Nimmt man aber ∞ von der Form $\frac{2n\pi+\varphi}{b}$, indem man n unendlich groß sich denkt, so erhält man wegen

$$\int cos\, bx \cdot dx = \frac{1}{b} \cdot sin\, bx,$$

sogleich $\int_{\infty \div 0} cos\, bx \cdot dx = \frac{1}{b} \cdot sin\, \varphi$, wo φ beliebig groß ist.

Der Grund der obigen Unrichtigkeit liegt hiernach darin, daß $\int_{\infty \div 0} cos\, bx \cdot dx$ überhaupt keinen bestimmten Werth hat, so daß natürlich auch keiner gefunden werden kann.

halten und dieſe dann zu integriren ſucht. Dies Verfahren mögen nachſtehende Beiſpiele näher nachweiſen.

A. Sucht man z. B.

1) $$\int_{\infty\div 0} \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot \frac{1}{b^2+x^2} \cdot dx = y,$$

ſo erhält man, wenn dieſe Gleichung zweimal hinter einander nach α differenziirt wird, einmal

2) $$\int_{\infty\div 0} \frac{\cos \alpha x}{b^2+x^2} \cdot dx = \partial y_\alpha$$

und dann

3) $$-\int_{\infty\div 0} \sin \alpha x \cdot \frac{x}{b^2+x^2} \cdot dx = \partial^2 y_\alpha,$$

während das letztere Integral auch ſo geſchrieben werden kann

$$\int \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot \frac{(b^2+x^2)-b^2}{b^2+x^2} \cdot dx$$

$$= \int \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot dx - b^2 \int \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot \frac{1}{b^2+x^2} \cdot dx.$$

Denkt man ſich alſo α poſitiv, ſo daß $\int_{\infty\div 0} \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot dx = +\frac{1}{2}\pi$ (nach §. 58. VII.) genommen werden kann, ſo führt die 3.) zu der Differential-Gleichung

4) $$\partial^2 y_\alpha - b^2 y + \tfrac{1}{2}\pi = 0.$$

Integrirt man nun dieſe Gleichung, welche lineär und von der zweiten Ordnung iſt nach §. 42.), ſo erhält man y mit zwei willkührlichen Conſtanten; und beſtimmt man nachgehends dieſe beiden Conſtanten, den vorhandenen Bedingungen gemäß, ſo hat man das geſuchte y ſelbſt.

Um dieſe lineäre vollſtändige Gleichung in eine reducirte zu verwandeln, ſetze man

5) $$y - \frac{\frac{1}{2}\pi}{b^2} = z, \quad \text{alſo} \quad \partial y_\alpha = \partial z_\alpha \quad \text{und} \quad \partial^2 y_\alpha = \partial^2 z_\alpha.$$

Dann erhält man aus 4.)

6) $$\partial^2 z_\alpha - b^2 z = 0,$$

und dieſe, integrirt, giebt

7) $$z = C \cdot e^{b\alpha} + C' \cdot e^{-b\alpha},$$

wo C und C' die beiden willkührlichen Constanten sind, welche jetzt noch bestimmt werden müssen. Weil aber der Werth von y, wenn auch $\alpha = \infty$ gedacht wird, nicht selbst unendlich groß werden kann, dies aber hier der Fall seyn würde, wenn nicht $C = 0$ wäre, so hat man hieraus

8) $$C = 0 \quad \text{und} \quad z = C' \cdot e^{-b\alpha},$$

wo bloß noch die Constante C' zu bestimmen bleibt. Um diese zu bestimmen, nehme man die Gleichung 2.). Sie giebt

$$\int_{\infty \div 0} \cos \alpha x \cdot \frac{1}{b^2 + x^2} \cdot dx = \partial y_\alpha = \partial z_\alpha = -bC' \cdot e^{-b\alpha}.$$

Und weil dies Integral für $\alpha = 0$ zur Linken in

$$\int_{\infty \div 0} \frac{1}{b^2 + x^2} \cdot dx = \left[\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{tg} \frac{x}{b}\right]_{\infty \div 0} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{b} \quad \text{(wenn b positiv ist),}$$

zur Rechten aber in $-bC'$ übergeht, so folgt $-bC' = \frac{\frac{1}{2}\pi}{b}$, also

9) $$C' = -\frac{\frac{1}{2}\pi}{b^2}\text{*)} \quad \text{und} \quad z = -\frac{\frac{1}{2}\pi}{b^2} \cdot e^{-b\alpha};$$

also

10) $$y = \frac{\frac{1}{2}\pi}{b^2}(1 - e^{-b\alpha}),$$

---

*) Es könnte scheinen, daß man nicht $\alpha = 0$ setzen dürfe, weil vorher α positiv vorausgesetzt worden ist. Man kann sich aber bloß α positiv und unendlich klein denken, dann aber $\int_{\infty \div 0} \cos \alpha x \cdot \frac{1}{b^2 + x^2} \cdot dx$ in zwei Integrale zerlegen, wovon das eine von 0 bis k, das andere von k bis ∞ genommen ist, — zuletzt aber $k = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ nehmen, wodurch k selbst unendlich groß wird, so wie α unendlich klein gedacht ist; und man überzeugt sich von der Richtigkeit der obigen Folgerung, wenn man noch bemerkt, daß allemal, abgesehen vom Vorzeichen, nach §. 24. V.)

$$\int_{\infty \div 0} \cos \alpha x \cdot \frac{1}{b^2 + x^2} \cdot dx < \int_{\infty \div 0} \frac{1}{b^2 + x^2} \cdot dx \text{ ist,}$$

daß daher das erstere Integral nothwendig zwischen $-\frac{\pi}{2b}$ und $+\frac{\pi}{2b}$ liegt.

halten und di[illegible]
mögen nach[illegible]

A. Er[illegible] $dx = \frac{\pi}{2b^2}(1 - e^{-b\alpha})$ (wenn b u. α positiv).

1) [illegible] diese Gleichung nach α, so erhält man

so erhält [illegible]
nach [illegible] $\frac{[illegible]}{[illegible]+x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2b} \cdot e^{-b\alpha}$ (wenn b und α positiv).

[illegible] man diese Gleichung noch einmal nach α, so

$$\frac{[illegible] \cdot \sin \alpha x}{[illegible] b^2 + x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-b\alpha} \quad \text{(wenn b und } \alpha \text{ positiv).}$$

[illegible] ein anderes Beispiel zu nehmen, sey

$$z = \int_{\infty \div 0} e^{-a^2x^2} \cdot \cos bx \cdot dx$$

[illegible] Man erhält sogleich

$$\partial z_b = -\int_{\infty \div 0} e^{-a^2x^2} \cdot x \times \sin bx \cdot dx,$$

[illegible] man rechts nach x theilweise integrirt,

$$\partial z_b = \left[\frac{e^{-a^2x^2}}{2a^2} \cdot \sin bx\right]_{\infty \div 0} - \frac{b}{2a^2}\int_{\infty \div 0} e^{-a^2x^2} \cdot \cos bx \cdot dx.$$

[illegible] man sich nun a positiv, so verschwindet das erste Glied [illegible], sowohl für $x = 0$, als auch für $x = \infty$, und [illegible] dann sogleich, mit Zuziehung der 1.) die Gleichung

$$\partial z_b + \frac{b}{2a^2} z = 0 \quad \text{(wenn a positiv).}$$

[illegible] Gleichung, integrirt, giebt

$$z = C \cdot e^{-\frac{b^2}{4a^2}},$$

[illegible] zu bestimmende Constante ist. Setzt man aber [illegible] sieht man, daß C der Werth von z ist, den solcher [illegible] annimmt. Man hat also

$$C = \int_{\infty \div 0} e^{-a^2x^2} \cdot dx$$

[illegible] § 22. Anm[illegible] 3.), wenn man $ax = t$ setzt,

7) $$C = \frac{1}{a}\int_{\infty+0} e^{-t^2}\cdot dt,$$

Also findet man auf unserem Wege aus 5.)

8) $$\int_{\infty+0} e^{-a^2x^2}\cdot \cos bx\cdot dx$$

$$= \frac{1}{a}\cdot e^{-\frac{b^2}{4a^2}}\cdot\int_{\infty+0} e^{-t^2}\cdot dt \quad \text{(wenn a positiv)};$$

und es bleibt bloß noch dieses letztere Integral zu finden. Laplace, der das vorstehende Integral z auf diesem Wege zu finden unternommen hat, hat auch den Werth dieses letzteren, wegen seiner Anwendung in der Wahrscheinlichkeits-Rechnung bemerkenswerthen Integrals bestimmt. Man kann namentlich diesen Werth auf folgende Art finden:

Setzt man nämlich

$$\int_{\infty+(-\infty)} e^{-x^2}\cdot dx = k,$$

so ist auch

$$\int_{\infty+(-\infty)} e^{-y^2}\cdot dy = k;$$

folglich hat man, wenn man diese beiden Gleichungen mit einander multiplicirt, weil man bei jedem Integral einen constanten Faktor außen stehen lassen, oder auch unter das Integral-Zeichen mit hineinziehen kann,

$$\int_{\infty+(-\infty)}\left(\int_{\infty+(-\infty)} e^{-(x^2+y^2)}\cdot dx\right)\cdot dy = k^2.$$

Setzt man nun

$$e^{-(x^2+y^2)} = z,$$

so wird

$$k^2 = \int_{\infty+(-\infty)}\left(\int_{\infty+(-\infty)} z\cdot dx\right)\cdot dy.$$

Denkt man sich nun x, y, z als rechtwinkliche Koordinaten-Werthe der durch die Gleichung $z = e^{-(x^2+y^2)}$ gegebenen Fläche (welche um OZ herum nach allen Seiten hin sich in's Unendliche ausbreitet, dabei aber der Ebene XOZ rings um OZ herum in unendlicher Entfernung von OZ unendlich nahe kommt), so stellt k^2 offenbar den Inhalt des von dieser Oberfläche und von der Ebene XOY gebildeten Körpers vor. Und da sich der-

selbe Inhalt auch noch dadurch findet, [illegible] als gemeinschaftliche Axe, unendlich v[illegible] denkt, deren Grundflächen den Radiu[illegible] der nach und nach von 0 an bis in's [illegible] endlich kleine dr wächst, — und zul[illegible] Hohl-Cylinder addirt, — so findet [illegible]

$$k^2 = 2\pi \cdot \int_{\infty}$$

Nun ergiebt sich aber, wenn r

$$\int e^{-r^2} \cdot r \cdot dr = \frac{1}{2}$$

also wird

$$k^2 =$$

Man hat also nun g[illegible]

XV. $\int_{\infty+(-\infty)} e^{-}$

Daraus folgt nu[illegible]

$$dx = \partial z_a.$$

XVI. [illegible] ...chungen die Integral ...egrire man die 3.) und 4.) wobei nu[illegible] nach §. 4. N. 3., indem man e^{-b} wenn [illegible] zwisch[illegible] erhält nach §. 34.), weil der außerhall das [illegible] zu stehen kommende Theil an beiden Gr[illegible] $= 0$ und für $x = \infty$) verschwindet, und weil das Integral sich jedesmal als eine Summe zweier [illegible] ben läßt, augenblicklich

5) $$\partial y_a = -\frac{a}{b} \cdot \partial z_a - \frac{n}{b} z$$

und

6) $$\partial z_a = \frac{a}{b} \cdot \partial y_a + \frac{n}{b} y.$$

Aus diesen beiden Gleichungen muß nun y und gration gefunden werden. Man muß daher dami man z, ∂z_a etc. etc. eliminirt. Zu dem Ende Gleichungen 5.) und 6.) zuvor noch einmal differen Man erhält

Diese Formel hat schon Euler gefunden. Setzt man in ihr $z = e^{-x^2}$, so erhält man also aus ihr sogleich wieder die obige XV.) des Laplace.

§. 60.

Bestimmen wir noch mittelst derselben Methode den Werth y des Integrals

1) $$\int_{\infty \div 0} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} \cdot dx = y.$$

Differenziirt man zu dem Ende diese Gleichung nach a, so erhält man

2) $$-2a \int_{\infty \div 0} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot dx = \partial y_a.$$

Für $x = \frac{a}{z}$ geht diese Gleichung, wenn man a positiv sich denkt, über in

3) $$2 \int_{0 \div \infty} e^{-z^2 - \frac{a^2}{z^2}} \cdot dz = \partial y_a = -2 \int_{\infty \div 0} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} \cdot dx.$$

Die Gleichungen 1.) und 3.) führen daher zur Gleichung

4) $$\partial y_a + 2y = 0.$$

Integrirt man nun diese lineäre Gleichung, so erhält man

5) $$y = C \cdot e^{-2a}.$$

Für $a = 0$ findet man hieraus C als den Werth von y, der für $a = 0$ sich ergiebt, d. h.

6) $$C = \int_{\infty \div 0} e^{-x^2} \cdot dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad \text{(nach XV.)}.$$

Also findet sich aus 5.)

XVIII. $$\int_{\infty \div 0} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} \cdot dx = \tfrac{1}{2} e^{-2a} \cdot \sqrt{\pi},$$

wobei wiederum zu bemerken, daß dasselbe Integral, aber zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ genommen, (nach §. 24. II.) den doppelten Werth hat.

§. 61.

Einige andere Beispiele zur Methode der vorhergehenden Paragraphen wollen wir aus Poisson's Abhandlung über bestimmte Integrale in dem Journal de l'école polytechnique, Cah. XVI. und XVII. entnehmen.

Sind die beiden bestimmten Integrale

1) $\int_{\infty \div 0} e^{-bx} \cdot x^{n-1} \cdot \cos ax \cdot dx = y$

und

2) $\int_{\infty \div 0} e^{-bx} \cdot x^{n-1} \cdot \sin ax \cdot dx = z$

zu finden, so differenziire man beide nach a. Man erhält dann

3) $-\int_{\infty \div 0} e^{-bx} \cdot x^{n} \cdot \sin ax \cdot dx = \partial y_a$

und

4) $\int_{\infty \div 0} e^{-bx} \cdot x^{n} \cdot \cos ax \cdot dx = \partial z_a.$

Um nun aus diesen Gleichungen die Integral-Zeichen eliminiren zu können, integrire man die 3.) und 4.) zur Linken theilweise (d. h. nach §. 4. N. 3., indem man e^{-bx} statt ψ setzt); und man erhält nach §. 34.), weil der außerhalb des Integral-Zeichens zu stehen kommende Theil an beiden Grenzen (d. h. für $x = 0$ und für $x = \infty$) verschwindet, und weil das noch bleibende Integral sich jedesmal als eine Summe zweier Integrale schreiben läßt, augenblicklich

5) $\partial y_a = -\frac{a}{b} \cdot \partial z_a - \frac{n}{b} z$

und

6) $\partial z_a = \frac{a}{b} \cdot \partial y_a + \frac{n}{b} y.$

Aus diesen beiden Gleichungen muß nun y und z durch Integration gefunden werden. Man muß daher damit beginnen, daß man z, ∂z_a etc. etc. eliminirt. Zu dem Ende muß man beide Gleichungen 5.) und 6.) zuvor noch einmal differenziiren (nach a). Man erhält

7) $$\partial^2 y_a = -\frac{n+1}{b}\cdot\partial z_a - \frac{a}{b}\cdot\partial^2 z_a;$$

8) $$\partial^2 z_a = \frac{n+1}{b}\cdot\partial y_a + \frac{a}{b}\cdot\partial^2 y_a.$$

Substituirt man nun die Werthe aus 6.) und 8.) statt ∂z_a und $\partial^2 z_a$ in die Gleichung 7.), so ergiebt sich

9) $$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\cdot\partial^2 y_a + \frac{2(n+1)a}{b^2}\cdot\partial y_a + \frac{n(n+1)}{b^2}\,y = 0.$$

Dies ist nun die Gleichung ohne z, welche y zu liefern hat. Sie ist zwar eine lineäre Gleichung, aber mit veränderlichen Coefficienten. Um sie daher integriren zu können, führe man einen neuen Veränderlichen t ein, mittelst der Gleichung

10) $$\frac{1}{tg}\,\frac{a}{b} = t \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = tg\,t.$$

Dadurch geht die Gleichung 9.) über in

11) $$b^2\cdot\partial^2 y_t + 2nba\cdot\partial y_t + n(n+1)(b^2+a^2)y = 0,$$

wo statt a überall $b\cdot tg\,t$ gesetzt werden muß.

Nun wird abermals ein neuer Veränderlicher u eingeführt mittelst der Gleichung

12) $$y = (b^2+a^2)^m\cdot u = b^{2m}(sec\,t)^{2m}\cdot u,$$

wo m ein noch unbestimmt gelassener Exponent ist. Dadurch geht die Gleichung 11.) über in

13) $$b^2\cdot\partial^2 u_t + (2n+4m)ba\cdot\partial u_t + [(n(n+1)+2m)b^2 + (n+2m)(1+n+2m)a^2]\cdot u = 0,$$

wo überall $b\cdot tg\,t$ statt a gesetzt werden muß. Nimmt man aber nun m so, daß ∂u_t herausfällt, d. h. nimmt man

14) $$n+2m = 0 \quad \text{oder} \quad m = -\tfrac{1}{2}n,$$

so geht diese Gleichung 13.) über in

15) $$\partial^2 u_t + n^2\cdot u = 0,$$

und ist daher jetzt eine lineäre mit constanten Koefficienten, deren Integral (nach §. 42.)

16) $$u = A\cdot cos\,nt + B\cdot sin\,nt$$

ist, während A und B zwei noch, den Bedingungen der Aufgabe gemäß zu bestimmende willkührliche Constanten sind. Setzt

XXI. $\int_{\infty\div 0} e^{-\theta}.\theta^{n-1}.d\theta = (n-1)!$ d. h. $\Gamma_n = (n-1)!$, woraus auch noch, wenn $\theta = ax$ gesetzt wird,

XXII. $$\int_{\infty\div 0} e^{-ax}.x^{n-1}.dx = \frac{(n-1)!}{a^n}$$

hervorgeht.

Anmerkung. Die Formel XXI.), wenn man $n+1$ statt n schreibt, also die Formel

Γ_{n+1} oder $\int_{\infty\div 0} e^{-\theta}.\theta^n.d\theta = n! = 1^{n|1} = n^{n|-1}$,

kann Veranlassung zur Definition von positiv gebrochenen Faktoriellen geben (vgl. I. Bd. §§. 25.—28.). — Geschieht dies, so findet sich bald, daß die meisten der Formeln, die für ganze Faktoriellen, oder für Differenz-Faktoriellen gelten, auch noch für diese positiv gebrochenen Faktoriellen statt finden, so daß man mit diesen bestimmten Integralen nach jenen Formeln rechnen kann. Dadurch kann man aber auch die zusammengesetzteren Fälle (für größere Werthe von n) auf die einfacheren Fälle (wo $n<1$ ist) zurückführen, und einige dieser letztern selbst auswerthen.

Setzt man in der Formel XV.), nämlich in

$$\int_{\infty\div 0} e^{-x^2}.dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$x^2 = \theta$, also $2x.dx = d\theta$, so erhält man noch

$$\int_{\infty\div 0} e^{-\theta}.\theta^{-\frac{1}{2}}.d\theta = \sqrt{\pi},$$

d. h. $$\Gamma_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}.$$

Und die Formel (C) giebt nun für $n = \frac{1}{2}$

$$\Gamma_{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}.\Gamma_{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Dies würde geben

$$1^{-\frac{1}{2}|1} = \sqrt{\pi}$$

und

$$1^{+\frac{1}{2}|1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

§. 62.

Suchen wir auf demselben Wege das bestimmte Integral

Auf diese Weise sind die Werthe der bestimmten Integrale XIX.) und XX.) zur Linken, von dem Werthe des bestimmten, gewöhnlich durch $\Gamma(n)$, und von uns durch Γ_n bezeichneten Integrals

23) $$\int_{\infty\div 0} e^{-\theta}\cdot\theta^{n-1}\cdot d\theta \quad \text{oder} \quad \Gamma_n$$

allein noch abhängig, und es sind die Integrale XIX.) und XX.) in allen den Fällen bekannt, in denen dies Integral Γ_n bekannt ist.

Für $n=1$ wird das Integral $\Gamma_n=1$, weil es in

$$\int_{\infty\div 0} e^{-\theta}\cdot d\theta = [-e^{-\theta}]_{\infty\div 0} = 1$$

übergeht; für $n=1$ geben daher die Formeln XIX.) und XX.) augenblicklich die Formeln III.) und IV.) des §. 58.).

Für $n=0$ dagegen gehen die Formeln XIX.) und XX.) in die VI.) und VIII.) des §. 58.) über, sobald man nur einige kleine Umformungen noch in Anwendung bringt*).

Das Integral Γ_n (in 23.) wird zu den sogenannten „Euler'schen Integralen erster Klasse" gezählt. So oft n eine positive ganze Zahl ist, giebt die theilweise Integration, also die Formel hier unten in der Note, nämlich

(C)… $\int_{\infty\div 0} e^{-\theta}\cdot\theta^{n}\cdot d\theta = n\int_{\infty\div 0} e^{-\theta}\cdot\theta^{n-1}\cdot d\theta$, d. h. $\Gamma_{n+1} = n\cdot\Gamma_n$,

wenn man in ihr statt n nach und nach $1, 2, 3, \cdots n-1$ setzt, — alle Resultate links und rechts mit einander multiplicirt, — und dabei links und rechts weghebt, — augenblicklich

*) In der That findet man, wenn man theilweise integrirt, d. h. die Formel §. 4. N. 3.) anwendet,

$$\int e^{-\theta}\cdot\theta^{n-1}\cdot d\theta = \frac{1}{n}e^{-\theta}\cdot\theta^{n} + \frac{1}{n}\int e^{-\theta}\cdot\theta^{n}\cdot d\theta;$$

also, weil das erste Glied zur Rechten, so lange n positiv ist, für $\theta=0$ und für $\theta=\infty$ verschwindet,

$$\int_{\infty\div 0} e^{-\theta}\cdot\theta^{n-1}\cdot d\theta = \frac{1}{n}\int_{\infty\div 0} e^{-\theta}\cdot\theta^{n}\cdot d\theta.$$

Substituirt man nun dies in die XIX.) und bemerkt man, daß $\frac{\sin nt}{n}$ für $\iota = \frac{1}{\infty}$ in t übergeht, so folgt das Behauptete.

wenn $\sqrt{-1}$ durch i bezeichnet wird, wo p und q reell ſind und p nicht Null iſt. Deshalb geht die Gleichung 3.) über in

5) $y = \Sigma(\beta \cdot e^{-pa} \cdot \cos qa + \gamma \cdot e^{-pa} \cdot \sin qa + \beta' \cdot e^{pa} \cdot \cos qa + \gamma' \cdot e^{pa} \cdot \sin qa)$,

wo das Zeichen Σ die Summe von verſchiedenen ſolchen Partien vorſtellt, nach den verſchiedenen Werthen von p und q.

Da nun $\cos ax < 1$, höchſtens $= 1$ iſt, ſo iſt allemal (nach §. 24. V.)

$$y < \int_{\infty \div 0} \frac{1}{A + Bx^2 + Cx^4 + \cdots + x^{2n}} \cdot dx;$$

folglich wird y mit a nicht zugleich unendlich; demnach kann y, ſo lange a poſitiv gedacht iſt, nicht Glieder mit dem Faktor e^{+pa} enthalten; alſo ſind alle Conſtanten β' und γ' der Null gleich; und es bleibet daher

6) $y = \Sigma(\beta \cdot e^{-pa} \cdot \cos qa + \gamma \cdot e^{-pa} \cdot \sin qa)$,

ſo daß nur noch n Conſtanten zu beſtimmen bleiben. Um dieſe zu beſtimmen, ſey μ irgend eine ungerade Zahl, ſo hat man

7) $\partial^\mu y_a = \pm \int_{\infty \div 0} \frac{x^\mu \cdot \sin ax}{A + Bx^2 + Cx^4 + \cdots + x^{2n}} \cdot dx,$

oder, wenn $ax = z$ geſetzt wird,

8) $\partial^\mu y_a =$

$$\pm a^{2n-\mu-1} \int_{\infty \div 0} \frac{z^\mu \cdot \sin z}{Aa^{2n} + Ba^{2n-2}z^2 + Ca^{2n-4}z^4 + \cdots + z^{2n}} \cdot dz$$

Iſt nun $\mu + 1 < 2n$, ſo wird $\partial^\mu y_a$ mit a zugleich Null und iſt $\mu + 1 = 2n$, ſo wird für $a = 0$

9) $\partial^\mu y_a = \int_{\infty \div 0} \frac{\sin z}{z} \cdot dz = \frac{1}{2}\pi$ (nach VII. des §. 58.).

Differenziirt man daher den Ausdruck für y in 6.) 1, 3 5, 7, 2n—1 mal nach a, und ſetzt man die Reſultate all (nach 8.) der Null gleich für $a = 0$, bis auf das letzte, welches für $a = 0$, der Zahl $\frac{1}{2}\pi$ gleich geſetzt werden muß (nach 9.), ſo hat man die n Gleichungen zur Beſtimmung der n Con

stanten. Und so sieht sich also dann das bestimmte Integral 1.) gefunden.

Hat man aber y gefunden, so darf man solches nur nach a hinter einander zu differenziiren, um $\int \frac{x \cdot \sin ax}{A+Bx^2+\cdots+x^{2n}} \cdot dx$, etc. etc. und dann durch Zusammensetzung auch $\int \frac{P \cdot \cos ax + Qx \cdot \sin ax}{A+Bx^2+Cx^4+\cdots+x^{2n}} \cdot dx$, — die Integrale zwischen denselben Grenzen $x=0$ und $x=\infty$ genommen, — zu haben *), wenn P und Q ganze und gerade Funktionen von x vorstellen.

Man kann nun dies Verfahren auf $\int_{\infty \div 0} \frac{\cos ax}{1+x^{2n}} \cdot dx$ anwenden, und man findet, daß, um die Rechnungen fortsetzen zu können, man n ungerade, und n gerade unterscheiden und für jeden dieser beiden Fälle die Rechnung besonders durchführen muß.

Differenziirt man aber die so gefundenen Resultate 2m mal hinter einander nach a, und wird dann $a=0$ gesetzt, so erhält man auch den Werth des bestimmten Integrals $\int_{\infty \div 0} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} \cdot dx$.

Desgleichen kann man dasselbe Verfahren auf $\int_{\infty \div 0} \frac{\cos ax}{1-x^{2n}} \cdot dx$ anwenden, um zuletzt auch noch $\int_{\infty \div 0} \frac{x^{2m}}{1-x^{2n}} \cdot dx$ dadurch zu erhalten, daß man das erst gefundene Resultat hinter einander nach a differenziirt und dann $a=0$ setzt.

---

*) Laplace findet schon dasselbe, jedoch auf anderem Wege als solches hier nach Poisson gefunden worden. Laplace findet nämlich zuerst die Resultate für die beiden einfachsten Fälle, d. h.

$\int_{\infty \div 0} \frac{\cos ax}{1+x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-a}$ und $\int_{\infty \div 0} \frac{x \cdot \sin ax}{1+x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-a}$

auf einem besonderen Wege, und dann zerlegt er, wenn $A+Bx^2+Cx^4+\cdots+x^{2n}$ durch R bezeichnet wird, die Brüche $\frac{P}{R}$ und $\frac{Q}{R}$ in lauter ächte Partial-Brüche, und so das gesuchte Integral in lauter Partial-Integrale, die sich aus den vorstehenden beiden leicht herleiten lassen.

wenn $\sqrt{-1}$ durch i bezeichnet wird, wo p und q reell ſind und p nicht Null iſt. Deshalb geht die Gleichung 3.) über in

5) $y = \Sigma(\beta \cdot e^{-pa} \cdot cos\, qa + \gamma \cdot e^{-pa} \cdot sin\, qa + \beta' \cdot e^{pa} \cdot cos\, qa + \gamma' \cdot e^{pa} \cdot sin\, qa)$,

wo das Zeichen Σ die Summe von verſchiedenen ſolchen Partien vorſtellt, nach den verſchiedenen Werthen von p und q.

Da nun $cos\, ax < 1$, höchſtens $= 1$ iſt, ſo iſt allemal (nach §. 24. V.)

$$y < \int_{\infty \div 0} \frac{1}{A + Bx^2 + Cx^4 + \cdots + x^{2n}} \cdot dx;$$

folglich wird y mit a nicht zugleich unendlich; demnach kann y, ſo lange a poſitiv gedacht iſt, nicht Glieder mit dem Faktor e^{+pa} enthalten; alſo ſind alle Conſtanten β' und γ' der Null gleich; und es bleibet daher

6) $y = \Sigma(\beta \cdot e^{-pa} \cdot cos\, qa + \gamma \cdot e^{-pa} \cdot sin\, qa)$,

ſo daß nur noch n Conſtanten zu beſtimmen bleiben. Um dieſe zu beſtimmen, ſey μ irgend eine ungerade Zahl, ſo hat man

7) $\partial^\mu y_a = \pm \int_{\infty \div 0} \frac{x^\mu \cdot sin\, ax}{A + Bx^2 + Cx^4 + \cdots + x^{2n}} \cdot dx,$

oder, wenn $ax = z$ geſetzt wird,

8) $\partial^\mu y_a =$

$$\pm a^{2n-\mu-1} \int_{\infty \div 0} \frac{z^\mu \cdot sin\, z}{Aa^{2n} + Ba^{2n-2}z^2 + Ca^{2n-4}z^4 + \cdots + z^{2n}} \cdot dz.$$

Iſt nun $\mu + 1 < 2n$, ſo wird $\partial^\mu y_a$ mit a zugleich Null; und iſt $\mu + 1 = 2n$, ſo wird für $a = 0$

9) $\partial^\mu y_a = \int_{\infty \div 0} \frac{sin\, z}{z} \cdot dz = \frac{1}{2}\pi$ (nach VII. des §. 58.).

Differenziirt man daher den Ausdruck für y in 6.) 1, 3, 5, 7, $2n-1$ mal nach a, und ſetzt man die Reſultate alle (nach 8.) der Null gleich für $a = 0$, bis auf das letzte, welches für $a = 0$, der Zahl $\frac{1}{2}\pi$ gleich geſetzt werden muß (nach 9.), ſo hat man die n Gleichungen zur Beſtimmung der n Con-

stanten. Und so sieht sich also dann das bestimmte Integral 1.) gefunden.

Hat man aber y gefunden, so darf man solches nur nach a hinter einander zu differenziiren, um $\int \frac{x \cdot \sin ax}{A+Bx^2+\cdots+x^{2n}} \cdot dx$, etc. etc. und dann durch Zusammensetzung auch $\int \frac{P \cdot \cos ax + Qx \cdot \sin ax}{A+Bx^2+Cx^4+\cdots+x^{2n}} \cdot dx$, — die Integrale zwischen denselben Grenzen $x=0$ und $x=\infty$ genommen, — zu haben *), wenn P und Q ganze und gerade Funktionen von x vorstellen.

Man kann nun dies Verfahren auf $\int_{\infty \div 0} \frac{\cos ax}{1+x^{2n}} \cdot dx$ anwenden, und man findet, daß, um die Rechnungen fortsetzen zu können, man n ungerade, und n gerade unterscheiden und für jeden dieser beiden Fälle die Rechnung besonders durchführen muß.

Differenziirt man aber die so gefundenen Resultate $2m$ mal hinter einander nach a, und wird dann $a=0$ gesetzt, so erhält man auch den Werth des bestimmten Integrals $\int_{\infty \div 0} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} \cdot dx$.

Desgleichen kann man dasselbe Verfahren auf $\int_{\infty \div 0} \frac{\cos ax}{1-x^{2n}} \cdot dx$ anwenden, um zuletzt auch noch $\int_{\infty \div 0} \frac{x^{2m}}{1-x^{2n}} \cdot dx$ dadurch zu erhalten, daß man das erst gefundene Resultat hinter einander nach a differenziirt und dann $a=0$ setzt.

---

*) Laplace findet schon dasselbe, jedoch auf anderem Wege als solches hier nach Poisson gefunden worden. Laplace findet nämlich zuerst die Resultate für die beiden einfachsten Fälle, d. h.

$$\int_{\infty \div 0} \frac{\cos ax}{1+x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-a} \quad \text{und} \quad \int_{\infty \div 0} \frac{x \cdot \sin ax}{1+x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-a}$$

auf einem besonderen Wege, und dann zerlegt er, wenn $A+Bx^2+Cx^4+\cdots+x^{2n}$ durch R bezeichnet wird, die Brüche $\frac{P}{R}$ und $\frac{Q}{R}$ in lauter ächte Partial-Brüche, und so das gesuchte Integral in lauter Partial-Integrale, die sich aus den vorstehenden beiden leicht herleiten lassen.

Schluß-Anmerkung. Das Vorstehende mag ausreichen, um den Anfänger in diese Gattung mathematischer Untersuchungen einzuführen. Es enthält auch die meisten der bekanntern und gebrauchtern Resultate, und macht in letzterer Beziehung auf einige Vollständigkeit Anspruch, wenigstens auf eine solche, wie sie nur immer mit der, diesem Werke vorgeschriebenen Kürze sich vereinbaren läßt. Weil es uns aber vorzüglich um Methoden zu thun ist, so wollen wir noch zeigen, wie man, von den einfachsten dieser letzteren Resultate ausgehend (welche ohne Weiteres gefunden werden, weil man die allgemeinen Integrale finden kann), zu mehreren der in den frühern Paragraphen auf anderem Wege gefundenen zurückkommen kann.

A. Setzt man nämlich in den Formeln XXIX.) und XXX.) $a = 1$, und multiplicirt und dividirt man dann beide Resultate mit und durch einander, so erhält man

$$1) \quad \int \frac{x^{2r}\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} \times \int \frac{x^{2r+1}\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2r+1}\cdot\tfrac{1}{2}\pi,$$

$$2) \quad \int \frac{x^{2r+1}\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} : \int \frac{x^{2r}\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots \quad 2r\cdot 2r}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdots(2r-1)(2r+1)},$$

wenn alle diese Integrale zwischen den Grenzen 0 und 1 genommen sind.

Um zu sehen, was aus dieser Gleichung für $r = \infty$ wird, setze man $x^{2r} = z$, und man erhält

$$\int \frac{x^{2r+1}\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2r}\cdot\int \frac{z^{2:2r}\cdot dz}{\sqrt{1-z^{1:r}}}$$

und

$$\int \frac{x^{2r}\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2r}\cdot\int \frac{z^{1:2r}\cdot dz}{\sqrt{1-z^{1:r}}}.$$

Der Quotient der beiden Differentialien zur Rechten ist $= z^{1:r}$, also $= z^0$ oder 1 für $r = \infty$. Also wird in der

beim Einzelnen aufzuhalten, sogleich noch einige dieser Resultate her, nämlich:

$$\text{XXIX.}\quad \int_{a\div 0}\frac{x^{2r}}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot dx=\frac{1^{r|2}}{2^{r|2}}\cdot\frac{\pi\cdot a^{2r}}{2};$$

$$\text{XXX.}\quad \int_{a\div 0}\frac{x^{2r+1}}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot dx=\frac{2^{r|2}}{3^{r|2}}\cdot a^{2r+1};$$

$$\text{XXXI.}\quad \int_{a\div 0}x^{2r}\sqrt{a^2-x^2}\cdot dx=\frac{1^{r|2}}{4^{r|2}}\cdot\frac{a^{2r+2}}{4}\cdot\pi;$$

$$\text{XXXII.}\quad \int_{a\div 0}x^{2r+1}\sqrt{a^2-x^2}\cdot dx=\frac{2^{r|2}}{5^{r|2}}\cdot\frac{a^{2r+3}}{3};$$

wenn nur r eine positive ganze Zahl ist. — Ferner

$$\text{XXXIII.}\quad \int_{a\div 0}\sqrt{a^2-x^2}^{n}\cdot dx=\frac{1^{\frac{1}{2}(n+1)|2}}{2^{\frac{1}{2}(n+1)|2}}\cdot\frac{a^{n+1}}{2}\cdot\pi;$$

$$\text{XXXIV.}\quad \int_{a\div 0}x^{2r}\sqrt{a^2-x^2}^{n}\cdot dx$$
$$=\frac{1^{r|2}}{(n+3)^{r|2}}\cdot a^{2r}\times\int_{a\div 0}\sqrt{a^2-x^2}^{n}\cdot dx;$$

$$\text{XXXV.}\quad \int_{a\div 0}x^{2r+1}\sqrt{a^2-x^2}^{n}\cdot dx=\frac{2^{r|2}}{(n+4)^{r|2}}\cdot\frac{a^{n+2r+2}}{n+2};$$

wenn nur n eine ungerade positive ganze Zahl, r aber beliebig positiv ganz ist.

Ferner (aus XVII.)

$$\text{XXXVI.}\quad \int_{1\div 0}\left(log\frac{1}{x}\right)^{n+\frac{1}{2}}\cdot dx=\frac{1^{n|1}}{2^{n|1}}\cdot\sqrt{\pi}\quad\text{(Euler).}$$

Endlich, immer wenn n positiv ganz ist,

$$\text{XXXVII.}\quad \int_{\frac{1}{2}\pi\div 0}(sin\,x)^{2n}\cdot dx=\int_{\frac{1}{2}\pi\div 0}(cos\,x)^{2n}\cdot dx=\frac{1^{n|2}}{2^{n|2}}\cdot\frac{\pi}{2}$$

und

$$\text{XXXVIII.}\quad \int_{\frac{1}{2}\pi\div 0}(sin\,x)^{2n+1}\cdot dx=\int_{\frac{1}{2}\pi\div 0}(cos\,x)^{2n+1}\cdot dx=\frac{2^{n|2}}{3^{n|2}}\cdot$$

Schluß-Anmerkung. Das Vorstehe
um den Anfänger in diese Gattung mathema
gen einzuführen. Es enthält auch die meis
und gebrauchtern Resultate, und macht in
auf einige Vollständigkeit Anspruch, wenigste
wie sie nur immer mit der, diesem Werke v
sich vereinbaren läßt. Weil es uns abe
thoden zu thun ist, so wollen wir noch
den einfachsten dieser letzteren Resultate
Weiteres gefunden werden, weil man
finden kann), zu mehreren der in de
anderem Wege gefundenen zurückko

A. Setzt man nämlich in
XXX.) $a = 1$, und multiplic
Resultate mit und durch einan

1) $\int \frac{x^{2r} \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} \times \int x^{2}$

2) $\int \frac{x^{2r+1} \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$:

wenn alle diese In ... den h
nommen sind. ... $= z^{\alpha}$, dann a
Um zu sehe ... die XXV.) viel a
setze man x^{2r} ... $\frac{-1}{1+z^q} \cdot dz = \frac{\pi}{q \cdot \sin \frac{p\pi}{q}}$
... q ganz oder gebrochen seyn
und ... Auch dies Integral hat

Gleichung 2.) für $r=\infty$, der Ausdruck zur Linken $=1$, und die Gleichung 2.) geht deshalb über (für $r=\infty$) in

$$3)\quad \tfrac{1}{2}\pi = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot 10\cdot 10\cdot 12\cdot 12\cdots \text{in inf.}}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9\cdot 11\cdot 11\cdot 13\cdots \text{in inf.}}$$

und dies ist der von Wallis gegebene merkwürdige Ausdruck für $\frac{1}{2}\pi$.

B. Setzt man $x=e^{-qt^2}$, so verwandelt sich die Gleichung 1.) in eine andere, welche Integrale nach t hat; nimmt man dann $q=\frac{1}{2r+1}$, oder $2r+1=\frac{1}{q}$, so geht diese über in

$$4)\quad 2\int \frac{t\cdot e^{-t^2}\cdot dt}{\sqrt{\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}}} \times \int \frac{t\cdot e^{-(1+q)t^2}\cdot dt}{\sqrt{\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}}} = \tfrac{1}{2}\pi,$$

wo die Integrale zwischen 0 und ∞ genommen werden müssen (nach §. 22.).

Für $r=\infty$, also $q=0$, geht aber $\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}$ in t^2 über; folglich giebt diese Gleichung augenblicklich

$$2(\int_{\infty+0} e^{-t^2}\cdot dt)^2 = \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{d. h.} \quad \int_{\infty+0} e^{-t^2}\cdot dt = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

welches die oben gefundene Formel XV.) ist.

C. Laplace betrachtet das Integral $\int e^{-t^{m+1}}\cdot t^n\cdot dt$, bringt es unter die Form $\int t^{n-m}\times e^{-t^{m+1}}\cdot t^m\cdot dt$, integrirt theilweise und erhält

$$\int e^{-t^{m+1}}\cdot t^n\cdot dt = -\frac{e^{-t^{m+1}}}{m+1}(t^{n-m} - (n-m)\int e^{-t^{m+1}}\cdot t^{n-m-1}\cdot dt).$$

Nimmt man aber dieses Integral zwischen den Grenzen 0 und ∞, so wird diese Gleichung, so lange n—m positiv ist,

$$5)\quad \int_{\infty+0} e^{-t^{m+1}}\cdot t^n\cdot dt = \frac{n-m}{m+1}\int_{\infty+0} e^{-t^{m+1}}\cdot t^{n-m-1}\cdot dt \quad \begin{matrix}(\text{wenn } n-m\\ \text{positiv}).\end{matrix}$$

Für $m=1$ erhält man hieraus, wenn $n>1$ ist,

$$\int_{\infty\div 0} e^{-t^2}\cdot t^n\cdot dt = \frac{n-1}{2}\int_{\infty\div 0} e^{-t^2}\cdot t^{n-2}\cdot dt \quad (\text{wenn } n>1).$$

Setzt man hier r mal hinter einander immer $n-2$ ſtatt n, ſo daß zuletzt $n-2(r-1)$ ſtatt n zu ſtehen kommt, und multiplicirt man die entſtehenden Gleichungen mit einander, ſo erhält man nach gehöriger Reduktion

$$6)\quad \int_{\infty\div 0} e^{-t^2}\cdot t^n\cdot dt = \frac{(n-1)^{r|-2}}{2^r}\int_{\infty\div 0} e^{-t^2}\cdot t^{n-2r}\cdot dt,$$

wo aber $n-2(r-1)$ noch >1 ſeyn muß. Da nun das Integral zur Rechten für $n=2r$ in $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ übergeht (nach XV.), ſo giebt dies, wenn r eine poſitive ganze Zahl iſt,

$$7)\quad \int_{\infty\div 0} e^{-t^2}\cdot t^{2r}\cdot dt = \frac{(2r-1)^{r|-2}}{2^r}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{1^{r|2}}{2^r}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

Setzt man aber $e^{-t^{m+1}} = x$, ſo erhält man noch

$$\int_{\infty\div 0} e^{-t^{m+1}}\cdot t^n\cdot dt = \frac{1}{m+1}\int_{1\div 0}\left(log\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-m}{m+1}}\cdot dx$$

und dieſe Gleichung geht für $m=1$ und $n=0$ in

$$8)\quad \int_{\infty\div 0} e^{-t^2}\cdot dt = \tfrac{1}{2}\int_{1\div 0}\left(log\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

über, wie wir bereits in XVII.) gefunden haben.

D. Setzt man in XXV.) $x=z^\alpha$, dann aber $(2m+1)\alpha = p$ und $2n\alpha = q$, ſo erhält man die XXV.) viel allgemeiner, nämlich

$$\text{XXXIX.}\quad \int_{\infty\div 0}\frac{z^{p-1}}{1+z^q}\cdot dz = \frac{\pi}{q\cdot sin\frac{p\pi}{q}},$$

in ſo fern p und q ganz oder gebrochen ſeyn können, wenn nur $p<q$ iſt. — Auch dies Integral hat Euler ſchon gegeben.

VIII.

Höhere Analyſis.

Vierte Abtheilung.

ie Variations-Rechnung und die allgemeinſte Lehre vom Größten und Kleinſten.

Neuntes Kapitel.

Ganz allgemeine Methode zur Entwickelung in Reihen.

Erster Abschnitt.

Von der Entwickelung der Polynomial-Funktionen in Reihen.

Vorerinnerung.

So wie es bisher oft von Nutzen gewesen ist, eine Funktion V_x nach Potenzen von x in eine unendliche Reihe zu verwandeln, so kann es nöthig werden, V_y in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe zu verwandeln, während y selbst eine nach x fortlaufende Reihe ist. — Eben so kann es nöthig werden, eine Funktion $V_{y,z,u,\ldots}$ mehrerer Veränderlichen y, z, u, etc., während für letztere selbst wieder unendliche, nach x fortlaufende Reihen gesetzt werden, in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe zu verwandeln.

In beiden Fällen kann die Funktion V eine Ur-Funktion, und zwar eine entwickelt oder verwickelt (mittelst einer Gleichung) gegebene, seyn. Es kann aber auch V eine Differential- oder eine bestimmte Integral-Funktion vorstellen.

Die Lösung dieser Aufgabe giebt aber jedesmal der Maclaurin'sche Lehrsatz, nach welchem

$$V_{(x)} = V_0 + \delta V_0 \cdot \frac{x}{1} + \delta^2 V_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V_0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

oder

$$V_{(x)} = \delta^0 V + \delta^1 V \cdot \frac{x}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

ist, wenn man nur unter $\delta^n V$ das versteht, was aus $\delta^n V_{(x)}$ wird, sobald man Null statt x setzt, während n jede ganze Zahl vorstellt.

Zu dieser Lösung des Problems würde daher nichts weiter mehr hinzuzufügen seyn, wenn wir nicht die Absicht hätten, das Technische und Praktische des Verfahrens hier noch in ein näheres Licht zu stellen.

wo die eingeklammerten Ausdrücke zur Linken das jedesmalige b in dem Zeichen $\delta^a b$ vorſtellen, ſo alſo, daß man ſich in dieſen eingeklammerten Ausdrücken zur Linken, zuerſt $a_\varkappa$ unter dem a vorgeſtellt denken muß, um die Reihe $b_\varkappa$ zu haben, von welcher dann der ganze Ausdruck zur Linken, den Koefficienten von $\frac{\varkappa^a}{a!}$ bedeutet, während die Ausdrücke rechts ſehen laſſen, wie dieſer Koefficient aus dem gleichnamigen Koefficienten $\delta^a a$ der Reihe $a_\varkappa$ gefunden wird.

Anmerkung. Die Formeln VII. und VIII.) (oder III. und IV.) erleiden aber nach §. 23. III.) eine Abänderung, ſobald die eine oder die andere Grenze ſelbſt noch $\varkappa$ enthalten ſollte. Namentlich iſt ſtatt der Formel VII.) (nach §. 23. III.)

$$\delta \int_{\beta \div \alpha} a \cdot dx = \int_{\beta \div \alpha} \delta a \cdot dx + a_\beta \cdot \delta\beta - a_\alpha \cdot \delta\alpha$$

zu ſetzen, ſo oft β und α ſelbſt noch Reihen vorſtellen, die nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ fortlaufen, wenn nur zur Rechten überall Null ſtatt $\varkappa$ geſetzt, und unter a_β, a_α das verſtanden wird, was aus a als Funktion von x hervorgeht, ſo oft man bezüglich β oder α ſtatt x ſchreibt.

§. 66.

Erſte Haupt-Aufgabe.

Iſt nun V eine beliebige Funktion einer beliebigen unendlichen Reihe

$a_\varkappa$ oder $a_0 + a_1\varkappa + a_2\varkappa^2 + a_3\varkappa^3 + \cdots$

d. h. $\delta^0 a + \delta^1 a \cdot \frac{\varkappa}{1} + \delta^2 a \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta^3 a \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots,$

und ſoll ſolche Funktion V, ſelber wieder in eine nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ fortlaufende unendliche Reihe $V_\varkappa$ verwandelt werden; ſo hat man nach dem Maclaurin'ſchen Lehrſatze

$$V_\varkappa = \delta^0 V + \delta^1 V \cdot \frac{\varkappa}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots,$$

wenn unter $\delta^a V$ das verstanden wird, was aus $\partial^a V_x$ hervorgeht, wenn man 0 statt x schreibt.

Die ganze Aufgabe reducirt sich also darauf, die unbekannten Koefficienten $\delta^0 V$, $\delta^1 V$, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, etc. etc. auszudrücken in die gegebenen $\delta^0 a$, $\delta^1 a$, $\delta^2 a$, $\delta^3 a$, etc. etc. d. h. in a_0, a_1, $2 \cdot a_2$, $3! a_3$, etc. etc. Nun ist aber, weil V eine Funktion von a_x, und a_x wieder eine Funktion von x ist (nach I. Bd. §. 154.)

$$V_x = V_a \text{ *)};$$
$$\partial V_x = \partial V_a \cdot \partial a_x;$$
$$\partial^2 V_x = \partial^2 V_a \cdot (\partial a_x)^2 + \partial V_a \cdot \partial^2 a_x;$$
$$\partial^3 V_x = \partial^3 V_a \cdot (\partial a_x)^3 + 3\partial^2 V_a \cdot \partial a_x \cdot \partial^2 a_x + \partial V_a \cdot \partial^3 a_x;$$

u. s. w. f.; wo unter a überall die Reihe a_x zu verstehen ist.

Folglich wird für $x = 0$

1) $\delta^0 V = V_a;$
2) $\delta V = \partial V_a \cdot \delta a;$
3) $\delta^2 V = \partial^2 V_a \cdot \delta a^2 + \partial V_a \cdot \delta^2 a;$
4) $\delta^3 V = \partial^3 V_a \cdot \delta a^3 + 3\partial^2 V_a \cdot \delta a \cdot \delta^2 a + \partial V_a \cdot \delta^3 a;$

u. s. w. f.; wo aber jetzt in V_a, ∂V_a, $\partial^2 V_a$, $\partial^3 V_a$, etc. etc. unter a bloß der erste Koefficient a_0 oder $\delta^0 a$ der Reihe a_x verstanden werden darf, in so fern sich a_x für $x = 0$ auf diesen ersten Koefficienten zurückzieht.

Die praktische Regel für dieses mechanische Geschäft der Auffindung der Koefficienten $\delta^0 V$, δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, etc. etc. ist also folgende:

„Man setze in dem gegebenen V, statt der unendlichen Reihe „a_x bloß a, so daß V als eine bloße Funktion eines einzigen

*) Wir haben bisher häufig f_a geschrieben, um damit das auszudrücken, was aus f_x wird, wenn man a statt x schreibt. Wo keine Zweideutigkeit zu befürchten ist, mag das auch in der Folge noch so geschehen. Hier dagegen soll V_a die gegebene Funktion von a_x vorstellen, nur a statt a_x geschrieben, aber doch a_x unter diesem a verstanden, V_x dagegen stellt die nach x fortlaufende, hier für V_{a_x} gesuchte Reihe vor.

„Veränderlichen a erſcheint, denke ſich a wiederum als Funk„tion von x, nehme in dieſem Sinne bloß die Ableitungen von „V nach allem x, ſchreibe aber ſtatt der Ableitungszeichen ∂ „nach x, die Zeichen δ. In den Endreſultaten ſtellt dann a „wiederum das erſte Glied a_0 oder $\delta^0 a$ der Reihe a_x vor.“

Oder mit andern Worten: „Man differenzire V_a hin„ter einander unter der Vorausſetzung, daß a ſelbſt noch ver„änderlich iſt, und ſetze zuletzt ſtatt der da, d^2a, etc. etc. nun „δa, $\delta^2 a$, etc. etc., ſo hat man die hier geſuchten Koefficien„ten δV, $\delta^2 V$, etc. etc., wenn nur zuletzt in den Zuſammen„ſetzungen von a, das erſte Glied a_0 oder $\delta^0 a$ der Reihe a_x „unter a verſtanden wird*).“

Beiſpiel 1. Iſt z. B.

$$V=(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)^m=(a_x)^m$$

gegeben, ſo ſchreibe man

$$V=a^m, \text{ und man erhält } \delta^0 V=a^m;\ \delta V=ma^{m-1}\cdot\delta a;$$
$$\delta^2 V=m(m-1)a^{m-2}\cdot\delta a^2+ma^{m-1}\cdot\delta^2 a;$$
$$\delta^3 V=m^{3|-1}a^{m-3}\cdot\delta a^3+3m^{2|-1}a^{m-2}\cdot\delta a\cdot\delta^2 a+ma^{m-1}\cdot\delta^3 a;$$

u. ſ. w. f.; und dieſe Werthe ſtatt $\delta^0 V$, δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, etc. etc. in

$$\delta^0 V+\delta V\cdot\frac{x}{1}+\delta^2 V\cdot\frac{x^2}{2!}+\delta^2 V\cdot\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

ſubſtituirt, geben die Polynomial-Potenz

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)^m,$$

nach Potenzen von x geordnet, wenn man nur für jede ganze Zahl n, unter $\delta^n a$ den Ausdruck $n!\,a_n$, und in den Potenzen von a, das erſte Glied a_0 unter a verſteht.

Beiſpiel 2. Iſt ein andermal

$$V=log(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots) \text{ d. h. } V=log(a_x)$$

nach Potenzen von x zu entwickeln, ſo ſetze man $V=log\,a$ und finde daraus nach der obigen praktiſchen Regel [d. h. wenn man a als Funktion von x

*) Nimmt man die Koefficienten $\delta^0 a$, δa, $\delta^2 a$, $\delta^3 a$, etc. etc., einmal ſo daß $a_x=a+x$ wird, oder ein andermal ſo, daß bloß $a_x=x$ wird, ſo muß die Löſung dieſer Aufgabe das erſte Mal den Taylor'ſchen, das andere Mal den Maclaurin'ſchen Lehrſatz liefern, weil beide als beſondere Fälle in dieſer allgemeinen Aufgabe ſtecken.

anſteht, nach allem x die Ableitungen (oder die Differentialien) nimmt, und ſtatt der Ableitungs-Zeichen δ noch x (oder ſtatt der d, in da, d^2a, d^3a, etc. etc.) δ ſchreibt], außer

$$\delta^0 V = log\, a, \quad \text{noch} \quad \delta V = \frac{1}{a}\cdot\delta a; \quad \delta^2 V = -\frac{1}{a^2}\cdot\delta a^2 + \frac{1}{a}\cdot\delta^2 a;$$

$$\delta^3 V = \frac{2}{a^3}\cdot\delta a^3 - \frac{3}{a^2}\cdot\delta a\cdot\delta^2 a + \frac{1}{a}\cdot\delta^3 a; \text{ u. ſ. w. f.;}$$

und dies ſind die Koefficienten der Reihe V oder V_x, letztere in der Form gedacht

$$\delta^0 V + \delta V\cdot\frac{x}{1} + \delta^2 V\cdot\frac{x^2}{2!} + \delta^3 V\cdot\frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

wenn nur zu gleicher Zeit $n!\, a_n$ ſtatt $\delta^n a$ geſetzt wird, welche ganze Zahl unter n auch gedacht werden mag.

Beiſpiel 3. Auf demſelben Wege kann man auch verſuchen,

$$V = \frac{e^{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots}\sqrt{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots}}{sin(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)}$$

in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe umzuformen.

§. 67.

Zweite Haupt-Aufgabe.

Iſt aber V eine Funktion zweier unendlichen Reihen

$$a_x \quad \text{oder} \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

und $$b_x \quad \text{oder} \quad b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots,$$

wo a_0, a_1, a_2, etc. etc., b_0, b_1, b_2, etc etc. ganz beliebige Koefficienten ſind, — und ſoll nun V in die unendliche Reihe V_x oder

$$\delta^0 V + \delta V\cdot\frac{x}{1} + \delta^2 V\cdot\frac{x^2}{2!} + \delta^3 V\cdot\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

verwandelt werden, — ſo finden ſich die Koefficienten dieſer Reihe theoretiſch durch den Maclaurin'ſchen Lehrſatz, ſo nämlich, daß $\delta^n V$ das iſt, was aus $\delta^n V_{(x)}$ wird, wenn man Null ſtatt x ſetzt; hieraus aber praktiſch auf folgende Art:

„Man denkt ſich V bloß als eine Funktion der erſten „Glieder a_0 und b_0 dieſer Reihen, die jedoch durch a und b „vorgeſtellt ſeyn mögen, — betrachtet a und b als Funktionen „von x, nimmt die Ableitungen nach allem x (nach §. 154. d.

„I. Bd.), schreibt aber statt der Ableitungs-Zeichen ∂ nach ϰ, „überall das Zeichen δ. In den Endresultaten endlich denkt „man sich unter a und b nichts anders, als die ersten Glieder „der Reihen $a_ϰ$ und $b_ϰ$, so wie unter $\delta^n a$ und $\delta^n b$ bezüglich „$n!a_n$ und $n!b_n$.

Nach dieser Regel erhält man

1) $\delta^0 V = V_{a,b}$; 2) $\delta V = \partial V_a \cdot \delta a + \partial V_b \cdot \delta b$;

3) $\delta^2 V = \partial^2 V_a \cdot \delta a^2 + 2 \cdot \partial^{1,1} V_{a,b} \cdot \delta a \cdot \delta b + \partial^2 V_b \cdot \delta b^2 + \partial V_a \cdot \delta^2 a + \partial V_b \cdot \delta^2 b$;

u. s. w. s.

Der Grund dieser Regel ist der obige. Man erhält nämlich $\delta^n V$, wenn man $V_{a_ϰ, b_ϰ}$, — welches durch $V_{a,b}$ vorgestellt seyn kann, sobald man sich unter a, b, bezüglich $a_ϰ$, $b_ϰ$ denkt —, n mal hinter einander nach ϰ differenzirt, dann aber $ϰ = 0$ setzt. Durch dieses letztere gehen aber die Ableitungen $\partial^n a_ϰ$, $\partial^n b_ϰ$ bezüglich in $\delta^n a$ und $\delta^n b$ über.

§. 68.

Wäre V, d. h. $V_{a_ϰ, b_ϰ}$ für jeden Werth von ϰ identisch $= 0$, wäre also die so eben für $V_{a_ϰ, b_ϰ}$ gefundene Reihe

$$\delta^0 V + \delta V \cdot \frac{ϰ}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{ϰ^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{ϰ^3}{3!} + \ldots$$

identisch $= 0$, so würde jeder der einzelnen Koefficienten $\delta^0 V$, δV, $\delta^2 V$, etc. etc. einzeln der Null gleich seyn; und die aus 1.), 2.), 3.) etc. etc. entstehenden Gleichungen zeigten dann die Abhängigkeit, in welchen die Koefficienten $\delta^0 b$, δb, $\delta^2 b$, etc. etc., zu den Koefficienten $\delta^0 a$, δa, $\delta^2 a$, etc. etc. stehen, und dienten zur praktischen Auffindung der einen, in die andern ausgedrückt, — in dem Falle also, wo $b_ϰ$ eine durch die Gleichung $V_{a_ϰ, b_ϰ} = 0$ verwickelt gegebene Funktion der unendlichen Reihe $a^ϰ$ wäre.

§. 69.

Wären daher in V_{a_x, b_x} des §. 67.) die unendlichen Rei- b_x und a_x mittelst einer Gleichung $\varphi_{a_x, b_x} = 0$ von einan- abhängig, so würden die in den Gleichungen 1.—3.) des 67.) gefundenen Ausdrücke für die Koefficienten $\delta^0 V$, δV, V, $\delta^3 V$, etc. etc. nothwendig unverändert dieselben bleiben; gegen würden in diesen Ausdrücken die Koefficienten $\delta^0 b$, δb, b, $\delta^3 b$, etc. etc. von den Koefficienten $\delta^0 a$, δa, $\delta^2 a$, $\delta^3 a$, . etc. wiederum abhängig seyn, und zwar wären die einen die andern auszudrücken mittelst der Gleichungen $\delta^0 \varphi = 0$, $= 0$, $\delta^2 \varphi = 0$, $\delta^3 \varphi = 0$, etc. etc., welche mit $\varphi_{a_x, b_x} = 0$ gleicher Zeit statt finden (nach §. 68.), während $\delta^0 \varphi = \varphi_{a,b}$, und $\delta\varphi$, $\delta^2\varphi$, $\delta^3\varphi$, etc. etc. selbst nach §. 67.) entwickelt rden, oder bereits entwickelt stehen, wenn man daselbst überall statt V setzt, zugleich aber statt a und b die ersten Glieder r Reihen a_x und b_x schreibt.

Diese, aus den Gleichungen $\delta\varphi = 0$, $\delta^2\varphi = 0$, $\delta^3\varphi = 0$, c. etc. gefundenen Werthe von δb, $\delta^2 b$, $\delta^3 b$, etc. etc. müß- n dann in die Resultate des §. 67.) substituirt werden, wenn an die Entwicklung des dortigen V_{a_x, b_x} (in dem jetzigen Falle) loß in die Koefficienten von a_x ausgedrückt haben wollte.

Anmerkung. Die Aufgabe des §. 67.) enthält unter ren speciellen Fällen namentlich auch noch folgende:

1) Ist b eine durch die Gleichung $\varphi_{a,b} = 0$ gegebene Funk- on von a, und ist a_x ein anderer Werth von a und b_x der us $\varphi_{a,b} = 0$ dazu sich findende Werth von b, so hat man mit $_{a_x b_x} = 0$, zugleich auch $\delta\varphi = 0$, $\delta^2\varphi = 0$, $\delta^3\varphi = 0$ etc. etc.

2) Und diese Gleichungen gehen in die Differential-Glei- ungen $\partial\varphi_{(a)} = 0$, $\partial^2\varphi_{(a)} = 0$, $\partial^3\varphi_{(a)} = 0$, etc. etc. über, in em besonderen Falle, wo unter a_x bloß $a + x$ verstanden ird, so daß $\delta a = 1$, $\delta^2 a = \delta^3 a =$ etc. etc. $= 0$ ist; wenn ur zugleich statt δb, $\delta^2 b$, $\delta^3 b$, etc. etc., welche die Koefficien-

ten der für b_x d. h. jetzt für b_{a+x} zu findenden Reihe vorstellen, die bezüglich mit ihnen identischen Zeichen δb_a, $\delta^2 b_a$, $\delta^3 b_a$ etc. etc. *) substituirt werden.

3) Ist a_x bloß x, also $a_0 = 0$, $\delta a = 1$, $\delta^2 a = \delta^3 a =$ etc. etc. $= 0$, so ist b_x der Werth von b, wie er uns $\varphi_{a,b} = 0$ für $a = x$, also wie er sich aus $\varphi_{x,b} = 0$ ergiebt; so daß also dieser Satz auch dazu dient, die Auflösung einer Gleichung $\varphi = 0$ zwischen b und x, nach dem Unbekannten b, in Form einer nach ganzen Potenzen von x fortlaufenden Reihe b_x, herzustellen.

4) Man kann sich daher auch desselben Satzes zur „Umkehrung der Reihen" bedienen:

§. 70.

Umkehrung der Reihen.

Ist gegeben die Gleichung

I. $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ in inf.
$= p_0 + p_1 b + p_2 b^2 + p_3 b^3 + \cdots$ in inf.,

wo a_0, a_1, a_2, etc. etc. p_0, p_1, p_2, etc. etc. beliebig gegebene Koefficienten sind, und soll nun aus dieser Gleichung b gefunden werden, so hätte man, wenn die Reihe in I.) zur Linken durch a_x bezeichnet wird, zur Bestimmung von b oder b_x die aus I.) hervorgehende Gleichung

II. $(p_0 - a_x) + p_1 b_x + p_2 b_x^2 + p_3 b_x^3 + \cdots = 0$,

statt der Gleichung $\varphi_{a_x, b_x} = 0$. Aus dieser Gleichung gehen sogleich zur Bestimmung der Koefficienten b_0 oder $\delta_0 b$, ferner δb, $\delta^2 b$, $\delta^3 b$, etc. etc. hervor

1) $\varphi_{a,b} = 0$ wenn a_0 und b_0 statt a und b gesetzt werden

*) Setzt man nämlich $a + x = z$, so ist $b_{a+x} = b_z$ und $\delta b_{(x)} = \delta b_z \cdot \delta z_x = \delta b_z$. Wird nun $x = 0$ gesetzt, so geht z in a, also δb_z in δb_a über, so daß die vorstehende Gleichung in $\delta b = \delta b_a$ übergeht. — U. s. f.

d. h. $(p_0 - a_0) + p_1 b_0 + p_2 b_0^2 + p_3 b_0^3 + \cdots = 0;$

2) $\delta\varphi = 0$ d. h.

$$-\delta a + (p_1 + 2p_2 b_0 + 3p_3 b_0^2 + 4p_4 b_0^3 + \cdots)\cdot\delta b = 0;$$

3) $\delta^2\varphi = 0$ d. h.

$$\left.\begin{aligned} -\delta^2 a + (2p_2 + 2\cdot 3p_3\cdot b_0 + 3\cdot 4p_4\cdot b_0^2 + \cdots)\cdot\delta b^2 \\ + (p_1 + 2p_2\cdot b_0 + 3p_3\cdot b_0^2 + \cdots)\cdot\delta^2 b \end{aligned}\right\} = 0;$$

u. s. w. f.; so daß die erstere Gleichung b_0, die andere δb, die dritte $\delta^2 b$, etc. etc. liefert.

In dem besonderen Falle, wo $p_0 = a_0$ ist, würde $b_0 = 0$ einer der Werthe von b_0 seyn, welcher der Gleichung 1.) genügt; und zu diesem ersten Koefficienten b_0 fände sich dann aus 2.)

$$\delta b = \frac{\delta a}{p_1} = \frac{a_1}{p_1},$$

und aus 3.)

$$\delta^2 b = \frac{\delta^2 a - 2p_2\cdot\delta b^2}{p_1} = \frac{2a_2\cdot p_1^2 - 2p_2\cdot a_1^2}{p_1^3},$$

u. s. w. f.; während zuletzt allgemein

$$b \text{ oder } b_x = b_0 + \delta b\cdot\frac{x}{1} + \delta^2 b\cdot\frac{x^2}{2!} + \delta^3 b\cdot\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

ist.

§. 71.

Ist V_x eine Funktion bloß von b_x, und b_x selbst von a_x mittelst der Gleichung $\varphi_{a_x b_x} = 0$ abhängig, und soll nun V_x in die Koeficienten von a_x ausgedrückt werden, so hat man zuerst (nach §. 66.)

1) $\delta^0 V = V_b$; 2) $\delta V = \delta V_b\cdot\delta b$;

3) $\delta^2 V = \delta^2 V_b\cdot\delta b^2 + \delta V_b\cdot\delta^2 b$; u. s. w. f.,

wenn nur $\delta^0 b$ oder b_0 statt b in (V_b, δV_b, $\delta^2 V_b$, etc. etc.) gesetzt wird. — Hernach aber müssen statt b_0, δb, $\delta^2 b$, $\delta^3 b$, etc. etc. ihre aus den Gleichungen des §. 68.), wenn daselbst φ statt V gesetzt wird, genommenen Werthe substituirt werden.

Anmerkung. Dieses Problem dient zu gleicher Zeit auch dazu, um aus der Gleichung 1.) des §. 70.) nicht bloß b oder

sondern eine beliebige Funktion V_b oder V_{b_x}, nach Potenzen von x entwickelt hinschreiben zu können. Dies ist aber das allgemeinste Problem der Umkehrung der Reihen.

§. 72.

Dritter Haupt-Lehrsatz.

Ist aber V_{a_x, b_x, c_x} in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende und einstweilen durch V_x oder

$$\delta_0 V + \delta V \cdot \frac{x}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

bezeichnete Reihe zu verwandeln, so erhält man wiederum den Koefficienten $\delta^n V$ derselben, wenn man in $V_{a,b,c}$ die a, b, c selber wieder als Funktionen von x sich denkt, dann aber die n^{te} Ableitung nach allem x nimmt, und in dem End-Resultate (also natürlich auch schon während des mechanischen Schreibens) in allen Ableitungen nach x die hiesigen δ statt der ∂ setzt, übrigens unter a, b, c bezüglich die ersten Glieder $\delta^0 a$, $\delta^0 b$, $\delta^0 c$, etc. etc. der durch a_x, b_x, c_x vorgestellten unendlichen Reihen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots, \quad b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots, \quad c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

versteht, während zuletzt wiederum $n!\, a_n$ statt $\delta^n a$, und $n!\, b_n$ statt $\delta^n b$, so wie noch $n!\, c_n$ statt $\delta^n c$ substituirt werden muß.

Man findet daher nach den gewöhnlichen Regeln des Differenziirens, d. h. nach §. 154. des I. Bds.), indem man jedes Glied aufs neue nach denselben Regeln differenziirt:

$$\delta^0 V = V_{a,b,c};$$

$$\delta V = \partial V_a \cdot \delta a + \partial V_b \cdot \delta b + \partial V_c \cdot \delta c;$$

$$\delta^2 V = \partial V_a \cdot \delta^2 a + \partial V_b \cdot \delta^2 b + \partial V_c \cdot \delta^2 c + \partial^2 V_a \cdot \delta a^2 + \partial^2 V_b \cdot \delta b^2 + \partial^2 V_c \cdot \delta c^2 + 2\partial^{1,1} V_{a,b} \cdot \delta a \cdot \delta b + 2\partial^{1,1} V_{a,c} \cdot \delta a \cdot \delta c + 2\partial^{1,1} V_{b,c} \cdot \delta b \cdot \delta c;$$

u. s. w. f. *)

*) Wollte man die Form der Differential-Rechnung anwenden, so würde die oben gegebene praktische Regel für die Auffindung von $\delta^n V$ sich

§. 73.

Es geht sogleich hervor:

I. Ist $V_{a_x, b_x, c_x} = 0$, so ist auch $\delta^0 V = 0$, d. h. $_{,b,c} = 0$, aber auch $\delta V = 0$, $\delta^2 V = 0$, etc. etc., und aus sen Gleichungen bestimmen sich die Koefficienten von c_x in von a_x und b_x ausgedrückt.

II. Und hat man zwei solche Gleichungen

$$V_{a_x, b_x, c_x} = 0 \quad \text{und} \quad W_{a_x, b_x, c_x} = 0,$$

hat man nicht bloß

^0V oder $V_{a,b,c} = 0$ und $\delta V = 0$, $\delta^2 V = 0$, etc. etc., ıdern auch

^0W oder $W_{a,b,c} = 0$ und $\delta W = 0$, $\delta^2 W = 0$, etc. etc.; ıd diese Gleichungen dienen dazu, um die Koefficienten von und c_x in die von a_x auszudrücken.

§. 74.

In der allgemeinen Aufgabe des §. 72.) können

1) a_x, b_x, c_x von einander ganz unabhängig seyn, und ınn sind auch die Koefficienten δa, δb, δc, $\delta^2 a$, $\delta^2 b$, etc. etc. ın einander ganz unabhängig. — Oder

2) es kann zwischen a_x, b_x, c_x noch eine Gleichung $_{x, b_x, c_x} = 0$ statt finden, und dann sind nach §. 73. I.) die oefficienten δc, $\delta^2 c$, etc. etc., von denen δa, δb, $\delta^2 a$, $\delta^2 b$, c. etc. mittelst der Gleichungen $\delta\varphi = 0$, $\delta^2\varphi = 0$, etc. etc. ın einander abhängig, und δV, $\delta^2 V$, etc. etc. können dann oß in δa, δb, $\delta^2 a$, $\delta^2 b$, etc. etc. ausgedrückt werden. — Oder

3) es können zwischen a_x, b_x, c_x noch zwei Gleichungen

$$\varphi_{a_x, b_x, c_x} = 0 \quad \text{und} \quad \psi_{a_x, b_x, c_x} = 0$$

geben seyn, und dann hängen nach §. 73. II.) die Koefficien-

---

ausnehmen: Um $\delta^n V$ zu finden, nehme man das n^{te} Differential von V ls Funktion von a, b, c, unter der Voraussetzung, daß a, b, c selbst wie- r veränderlich sind; schreibe aber im Endresultate in den Differentialien a, db, dc, d^2a, d^2b, d^2c, etc. etc. jetzt überall δ statt d.

ten von b_x und c_x von denen von a_x ab, mittelſt der Gleichungen $\delta\varphi = 0$, $\delta^2\varphi = 0$, etc. etc. und $\delta\psi = 0$, $\delta^2\psi = 0$, etc. etc.; — und die Koefficienten δV, $\delta^2 V$, etc. etc. des §. 72.) laſſen ſich nun bloß in δa, $\delta^2 a$, $\delta^3 a$, etc. etc. allein ausdrücken.

Dieſer letztere Fall tritt ſchon ein, ſobald V eine Funktion von a, b und c iſt, und zwiſchen a, b, c zwei Gleichungen $\varphi_{a,b,c} = 0$ und $\psi_{a,b,c} = 0$ gegeben ſind, und nun das, was aus V wird, wenn man bloß $a + \varkappa$ ſtatt a ſetzt, in eine nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ fortlaufende Reihe verwandelt werden ſoll. — Denn wegen der Gleichungen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$, welche für jeden Werth von a und den zugehörigen Werthen von b und c ſtatt finden ſollen, gehen, ſo wie $a + \varkappa$ ſtatt a geſetzt wird, die Veränderlichen b und c ſogleich (nach dem Taylor'ſchen Lehrſatze) in Reihen über, welche nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ fortlaufen und welche nun durch b_x und c_x bezeichnet werden, während man, weil jetzt $a_x = a + \varkappa$ gedacht worden iſt, $\delta^0 a = a$, $\delta a = 1$, $\delta^2 a = \delta^3 a = \text{etc. etc.} = 0$ hat.

4) Es können aber auch b_x und c_x Ableitungen (Differentiale) oder auch Integrale ſeyn von a_x, nach x oder nach x und y, oder etc. Dann ſind die Koefficienten $\delta^0 b$, $\delta^0 c$, δb, δc, $\delta^2 b$, $\delta^2 c$, etc. etc., dieſelben Ableitungen und dieſelben Integrale bezüglich von $\delta^0 a$, δa, $\delta^2 a$, etc. etc., und zwar genau nach den Formeln des §. 65.).

5) Und in allen den vorbenannten Fällen kann die Funktion V auch nur zwei dieſer unendlichen Reihen b_x und c_x, oder auch gar nur eine derſelben c_x allein enthalten, während gerade a_x allein als unabhängig angeſehen werden kann, ſo daß alle Koefficienten $\delta^0 V$, δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, etc. etc. bloß in $\delta^0 a$, δa, $\delta^2 a$, $\delta^3 a$, etc. etc. allein ausgedrückt werden ſollen und können.

§. 75.

Allgemeinere Haupt-Aufgabe.

Das bisherige ſetzt uns in den Stand, eine Funktion V von beliebig vielen ſolchen unendlichen Reihen a_x, b_x, c_x, etc. etc. in eine nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ fortlaufende Reihe zu verwandeln, dadurch, daß man die geſuchte Reihe durch

$$\delta^0 V + \delta V \cdot \frac{\varkappa}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots$$

bezeichnet und nun δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, etc. etc. aus einander, (und den erstern aus $V_{a,b,c,\text{etc. etc.}}$) dadurch findet, daß man jeden vorhergehenden immer auf's neue nach allem $\varkappa$ differenziirt, dabei aber statt der ∂a, ∂b, etc. $\partial^2 a$, $\partial^2 b$, etc. etc. immer fort δa, δb, etc. $\delta^2 a$, $\delta^2 b$, etc. etc. schreibt, während man überall unter a, b, c, etc. etc. (in V, ∂V_a, ∂V_b, ∂V_c, $\partial^2 V_a$, $\partial^{1,1} V_{a,b}$, etc. etc.) bloß die ersten Glieder dieser Reihen a_x, b_x, c_x, etc. etc. sich denkt.

Und dies Verfahren bleibt allemal dasselbe, es mögen die Reihen a_x, b_x, c_x, etc. etc. von einander ganz unabhängig, oder einige derselben, Differentialien oder Integralien von den andern seyn; oder man mag eine Abhängigkeit zwischen diesen Reihen durch Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$, etc. etc. gegeben haben.

Als Beispiel denke man sich, daß V eine Funktion von a_x, b_x, $\delta(a_x)_x$ und $\delta(b_x)_x$ ist, und nun in eine nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ fortlaufende Reihe verwandelt werden soll. — Man hat dann, wenn man der Kürze wegen

$\delta(a_x)_x$ durch y, und $\delta(b_x)_x$ durch z

bezeichnet, und wenn, wie immer die gesuchte Reihe V_x durch

$$\delta^0 V + \delta V \cdot \frac{\varkappa}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots$$

vorgestellt wird, die Koefficienten dieser Reihe V_x wie folgt:

$$\delta^0 V = V_{a,b,y,z}$$

$$\delta V = \partial V_a \cdot \delta a + \partial V_b \cdot \delta b + \partial V_y \cdot \delta(\delta a)_x + \partial V_z \cdot \delta(\delta b)_x \text{ *);}$$

$$\begin{aligned}\delta^2 V = {} & \partial^2 V_a \cdot \delta a^2 + \partial^2 V_b \cdot \delta b^2 + \partial^2 V_y \cdot (\delta\delta a)^2 + \partial^2 V_z \cdot (\delta\delta b)^2 \\ & + 2\partial^{1,1} V_{a,b} \cdot \delta a \cdot \delta b + 2\partial^{1,1} V_{a,y} \cdot \delta a \cdot \delta\delta a + 2\partial^{1,1} V_{a,z} \cdot \delta a \cdot \delta\delta b \\ & + 2\partial^{1,1} V_{b,y} \cdot \delta b \cdot \delta\delta a + 2\partial^{1,1} V_{b,z} \cdot \delta b \cdot \delta\delta b + 2\partial^{1,1} V_{y,z} \cdot \delta\delta a \cdot \delta\delta b \\ & + \partial V_a \cdot \delta^2 a + \partial V_b \cdot \delta^2 b + \partial V_y \cdot \delta\delta^2 a + \partial V_z \cdot \delta\delta^2 b;\end{aligned}$$

wo man bloß ∂a, ∂b, $\partial^2 a$, etc. etc. statt bezüglich $\delta(\delta a)_x$, $\delta(\delta b)_x$, $\delta(\delta^2 a)_x$, etc. etc. geschrieben hat.

---

*) Es ist nämlich nach §. 65.) $\delta y = \delta(\delta a)_x$ und $\delta z = \delta(\delta b)_x$.

Eben ſo $\delta^3 V$, $\delta^4 V$, etc. etc. — Weil man nämlich $\delta(a_x)_x$ durch y_x und $\delta(b_x)_x$ durch z bezeichnet hat, ſo wird man in den einzelnen Gliedern der vorſtehenden Entwickelungen zu Faktoren erhalten: δy, δz, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$, etc. etc., welche man zwar häufig durch δa, δb, $\delta^2 a$, $\delta^2 b$, etc. etc. bezeichnet findet, welche aber allemal bezüglich δa, δb, δa^2, δa^2, etc. etc. vorſtellen (nach §. 65.). — In dieſer ganzen Unterſuchung ſind aber lauter Ableitungen δ nach x verſtanden.

§. 76.

Noch allgemeinere Haupt-Aufgabe.

Es iſt V eine Funktion von a, b, etc. und noch von x, y, etc. Zuerſt werden ſtatt x, y, etc. unendliche, nach Potenzen von $\varkappa$ fortlaufende Reihen $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, etc. geſetzt, deren Koefficienten $\delta^0 x$, δx, $\delta^2 x$, etc., $\delta^0 y$, δy, $\delta^2 y$, etc. ſelber wieder Funktionen von a, b, etc. ſind. Nachher aber werden überall ſtatt a, b, etc. (alſo ſowohl da, wo a, b, etc. explicit vorkommen, als auch da, wo ſolche implicit in $\delta^0 x$, δx, $\delta^2 x$, etc., $\delta^0 y$, δy, $\delta^2 y$, etc. erſcheinen) wiederum unendliche Reihen $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, etc. geſetzt, welche nach Potenzen von $\varkappa$ fortlaufen. Man ſoll nun die Koefficienten $\delta^0 V$, δV, $\delta^2 V$, etc. der nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ fortlaufenden Reihe $V_{(\varkappa)}$ finden, in welche V ſelbſt dadurch übergeht.

Erſte Auflöſung.

Um dieſe Aufgabe zu löſen, wird man ſich zuerſt bloß die Reihen für x, y, etc. allein geſetzt denken. Dadurch geht ſchon V in eine Reihe über, welche nach Potenzen von $\varkappa$ fortläuft, welche nicht die in der Aufgabe geſuchte iſt, welche wir aber einſtweilen nach §. 75.) aufſuchen, ihre Koefficienten jedoch (zum Unterſchiede von den Koefficienten in der eigentlich für V geſuchten Reihe) durch $\delta_1^0 V$, $\delta_1 V$, $\delta_1^2 V$, $\delta_1^3 V$, etc. bezeichnen wollen; ſo daß man nach §. 75.) erhält

1) $\delta_1^0 V = V_{a,b,\text{etc.}\,x,y,\text{etc.}}$;

2) $\delta_1 V = \partial V_x \cdot \delta x + \partial V_y \cdot \delta y + \cdots$;

3) $\delta_1^2 V = \partial^2 V_x \cdot \delta x^2 + \partial^2 V_y \cdot \delta y^2 + \cdots + 2\partial^{1,1} V_{x,y} \cdot \delta x \cdot \delta y + \cdots + \partial V_x \cdot \delta^2 x + \partial V_y \cdot \delta^2 y + \cdots$;

u. ſ. w. f.

u. s. w. f., wenn nur zur Rechten (in V, ∂V_x, ∂V_y, $\partial^2 V_x$, etc.) unter x, y, etc. überall $\delta^0 x$, $\delta^0 y$, etc. (d. h. die ersten Glieder der für x, y, etc. gesetzten Reihen $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, etc.) gedacht werden.

Bezeichnen wir nun diese einstweilen erhaltene unendliche Reihe

4) $\delta_1^0 V + \delta_1 V \cdot \frac{\varkappa}{1} + \delta_1^2 V \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta_1^3 V \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots$ durch $V_\varkappa$,

so wie die in der Aufgabe eigentlich gesuchte Reihe

5) $\delta^0 V + \delta V \cdot \frac{\varkappa}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots$ durch $V_{(\varkappa)}$,

so entsteht offenbar $V_{(\varkappa)}$ dadurch aus $V_\varkappa$, daß man in letzterem $V_\varkappa$ (als Funktion von $\delta_1^0 V$, $\delta_1 V$, $\delta_1^2 V$, etc. etc. angesehen, während diese letzteren Koefficienten die Buchstaben a, b, etc. explicit und auch implicit in $\delta^0 x$, δx, $\delta^2 x$, etc. $\delta^0 y$, δy, $\delta^2 y$, etc. enthalten) überall statt aller a, b, etc. diese Reihen

$$a_\varkappa \text{ oder } \delta^0 a + \delta a \cdot \frac{\varkappa}{1} + \delta^2 a \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots$$

$$b_\varkappa \text{ oder } \delta^0 b + \delta b \cdot \frac{\varkappa}{1} + \delta^2 b \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots$$

u. s. f. substituirt.

Nun findet man aber die Koefficienten $\delta^0 V$, δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, etc. etc., wenn man $V_{(\varkappa)}$ nach allem $\varkappa$ keinmal, einmal, zweimal, dreimal, etc. etc. differenziirt, zuletzt aber Null statt $\varkappa$ setzt.

Man erhält daher, wenn man der Kürze wegen voraussetzt, daß bloß statt der beiden Buchstaben a und b, die Reihen $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ gesetzt worden sind:

6) $$\delta^0 V = \delta_1^0 V = V_{a,b,x,y,\ldots};$$

wenn hier zuletzt unter x, y, etc. jene Anfangs-Glieder $\delta^0 x$, $\delta^0 y$, etc. verstanden werden, und wenn man nachher statt jedes δa und jedes δb, es mag explicit oder implicit vorkommen, die Anfangs-Glieder $\delta^0 a$, $\delta^0 b$ schreibt. — Ferner erhält man:

7) $$\delta V = \delta_1 V + \partial V_{(a)} \cdot \delta a + \partial V_{(b)} \cdot \delta b;$$

wo $\delta_1 V$ das Reſultat des Differenziirens von $V_{(x)}$ nach dem x außerhalb, das übrige aber das Reſultat des Differenziirens von $V_{(x)}$ nach dem x iſt, das in den Koefficienten von V_x nämlich in $\delta_1{}^0 V$ (oder V, nach 1.), $\delta_1 V$, $\delta_1{}^2 V$, etc. ſteckt, während δV das Reſultat des Differenziirens von $V_{(x)}$ nach allem x bedeutet (nur daß man zuletzt immer Null ſtatt x geſetzt denken muß).

Denkt man ſich nun von 7.) links und rechts noch einmal die Ableitungen nach allem x genommen, ſo erhält man

$$7_1) \quad \delta^2 V = \delta(\delta_1 V) + \delta(\partial V_{(a)} \cdot \delta a) + \delta(\partial V_{(b)} \cdot \delta b).$$

Setzt man aber in 7.) ſtatt V jetzt $\delta_1 V$, ſo erhält man

$$7_2) \quad \delta(\delta_1 V) = \delta_1{}^2 V + \partial(\delta_1 V)_{(a)} \cdot \delta a + \partial(\delta_1 V)_{(b)} \cdot \delta b.$$

Ferner hat man

$$7_3) \quad \delta(\partial V_{(a)} \cdot \delta a) = \delta(\partial V_{(a)}) \cdot \delta a + \partial V_{(a)} \cdot \delta^2 a;$$

ſo wie wiederum, wenn man in 7.) $\partial V_{(a)}$ ſtatt V ſetzt,

$$7_4) \quad \delta(\partial V_{(a)}) = \delta_1(\partial V_{(a)}) + \partial^2 V_a \cdot \delta a + \partial^{1,1} V_{(a,b)} \cdot \delta a \cdot \delta b;$$

während nach §. 65.)

$$7_5) \quad \delta_1(\partial V_{(a)}) = \partial(\delta_1 V)_{(a)}$$

iſt. — Aehnliches gilt für $\delta(\partial V_{(b)})$. — Setzt man aber dieſe Werthe gehörig in einander, ſo erhält man zuletzt aus 7_1.)

$$8) \quad \delta^2 V = \delta_1{}^2 V + 2\partial(\delta_1 V)_{(a)} \cdot \delta a + 2\partial(\delta_1 V)_{(b)} \cdot \delta b + \partial^2 V_{(a)} \cdot \delta a^2 + 2\partial^{1,1} V_{(a,b)} \cdot \delta a \cdot \delta b + \partial^2 V_{(b)} \cdot \delta b^2 + \partial V_a \cdot \delta^2 a + \partial V_b \cdot \delta^2 b,$$

ſo daß man $\delta^2 V$ aus den ſchon bekannten $\delta_1{}^0 V$ oder V, ferner aus $\delta_1 V$, $\delta_1{}^2 V$, etc. hergeholt erblickt.

Auf demſelben Wege kann man nun aus $\delta^2 V$ in 8.) wiederum $\delta^3 V$, und daraus wieder $\delta^4 V$ u. ſ. w. f. entwickeln, immer in die ſchon bekannten $\delta_1{}^0 V$, $\delta_1 V$, $\delta_1{}^2 V$, $\delta_1{}^3 V$, etc. etc. ausgedrückt. Nur darf man nicht überſehen, daß in den gefundenen Reſultaten 6.—8.) u. ſ. f. zur Rechten, ſtatt der in $\delta_1{}^0 V$ oder V, ferner in $\delta_1 V$, $\delta_1{}^2 V$, $\delta_1{}^3 V$, etc. etc. vorkommenden Buchſtaben x. y, ··· die erſten Glieder $\delta^0 x$, $\delta^0 y$, etc. der für x, y, etc. geſetzten Reihen x_x, y_x, etc., dann aber für jedes a und b, welches explicit oder implicit vorkommt, noch die er-

sten Glieder $\delta^0 a$, $\delta^0 b$, der für a und b gesetzten Reihen a_x b_x substituirt werden müssen.

Dieser Weg kann auch dann leicht betreten werden, wenn $\delta_1 V$, $\delta_1{}^2 V$, etc. bloß Funktionen von a allein, oder von mehr als zwei solchen Veränderlichen a, b, c, etc. seyn sollten, und statt letzterer wieder Reihen a_x oder a_x, b_x, c_x, etc. gesetzt werden.

Zweite Auflösung.

Das Verfahren der ersten Auflösung lehrt die Koefficienten $\delta^0 V$, δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, etc. etc. aus einander auf einem Wege finden, welcher, genau genommen, nichts weiter als ein fortgesetztes Differenziiren nach allem x ist. — Will man aber ein, mit dem bisher beobachteten Verfahren nicht ganz analoges einschlagen, so kann man die Koefficienten der Reihe 5.) nämlich der Reihe

$$V_{(x)} \text{ oder } \delta^0 V + \delta V \cdot \frac{x}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

aus denen der Reihe 4.) nämlich der Reihe

$$V_x \text{ oder } \delta_1{}^0 V + \delta_1 V \cdot \frac{x}{1} + \delta_1{}^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta_1{}^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

auch dadurch direkt und leichter finden, daß man sich in den letztern die Reihen a_x und b_x überall statt a und b gesetzt, und was daraus wird, in Reihen entwickelt denkt, welche ebenfalls nach Potenzen von x fortlaufen, — zuletzt aber das Endresultat nach Potenzen von x ordnet.

Weil jedoch, um den besondern Fall der vorigen Auflösung wieder fest zu halten, $\delta_1{}^0 V$, $\delta_1 V$, $\delta_1{}^2 V$, $\delta_1{}^3 V$, etc. Funktionen von a und b sind (welche a und b sowohl explicit, als auch implicit in $\delta^0 x$, $\delta^0 y$, δx, δy, $\delta^2 x$, $\delta^2 y$, etc. enthalten); so folgt, daß wenn in diesen Koefficienten $\delta_1{}^0 V$, $\delta_1 V$, $\delta_1{}^2 V$, etc. etc. und allgemein $\delta_1{}^n V$ die Reihen a_x, b_x statt a und b gesetzt werden, diese Ausdrücke $\delta_1{}^n V$ selber wieder in Reihen übergehen, welche man durch

$$\delta^0(\delta_1{}^n V) + \delta^1(\delta_1{}^n V) \cdot \frac{x}{1} + \delta^{12}(\delta_1{}^n V) \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^{13}(\delta_1{}^n V) \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

bezeichnen, und deren einzelne Koefficienten man nach dem §. 66.) finden kann, wenn man nur die dortigen δ in die hiesigen δ' umwandelt, welche hier absichtlich von den δ_1 und den bloßen δ, die außerdem hier schon vorkommen, unterschieden worden sind und unterschieden werden müssen. — Man kann nun die Auflösung ganz allgemein geben. Schreibt man nämlich die 4.) so

$$V_x = S\left[\delta_1{}^a V \cdot \frac{x^a}{a!}\right]$$

— wo S die Summe aller der Glieder vorstellt, welche aus dem allgemeinen, in eckigen Klammern eingeschlossenen Gliede hervorgehen, wenn nach und nach $0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ in inf. statt $\mathfrak{a}$ gesetzt wird, — und denkt man sich nun in $\delta_1{}^a V$ die Reihen a_x und b_x statt a und b substituirt; — so erhält man aus 4.) sogleich

$$6) \qquad V_{(x)} = S\left[\delta'^b(\delta_1{}^a V)\cdot\frac{x^b}{b!}\cdot\frac{x^a}{a!}\right],$$

wo statt $\mathfrak{a}$ alle Werthe $0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ in inf., und während $\mathfrak{a}$ irgend einen dieser Werthe hat, jedesmal noch statt $\mathfrak{b}$ nach und nach $0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ in inf. gesetzt, zuletzt aber die Summe aller dieser unendlich mal unendlich vielen Glieder genommen wird.

Führt man aber $\mathfrak{c}$ mittelst der Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$ ein, und denkt man daran, daß $\frac{c!}{a!b!} = \frac{(a+b)!}{a!b!} = (a+b)_b = (a+b)_a = c_b = c_a$ ist, wo c_a, c_b Binomial-Koefficienten vorstellen, so formt sich die Gleichung 6.) um in

$$7) \qquad V_{(x)} = S\left[c_b\cdot\delta'^b(\delta_1{}^a V)\cdot\frac{x^c}{c!}\right], \qquad a+b=c$$

wo statt $\mathfrak{c}$ nach und nach alle Werthe $0, 1, 2, 3, 4, 5,$ etc. in inf. gesetzt werden, während für jeden Werth von $\mathfrak{c}$, statt $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ wiederum alle Werthe gesetzt werden, welche 0 und ganze positive Zahlen sind, und deren Summe $=\mathfrak{c}$ ist, und wobei

das vorgesetzte S andeutet, daß die Summe aller dieser Glieder genommen werden soll.

Vergleicht man 7.) mit 5.) d. h. mit

$$5)\qquad V_{(x)} = S\left[\delta^c V \cdot \frac{x^c}{c!}\right],$$

so müssen die einzelnen, mit x^c afficirten Glieder in 5.) und 7.) einander gleich seyn; also muß für $c = n$,

$$8)\qquad \delta^n V = S[n_b \cdot \delta'^b(\delta_1{}^a V)]$$
$$a+b=n$$

seyn, wo rechts statt a und b nach und nach alle Werthe gesetzt werden müssen, welche 0 und ganze Zahlen sind, und deren Summe jedesmal $= n$ ist, während n_b den Binomial-Koefficienten $\frac{n^{bI-1}}{b!}$ vorstellt, und das vorgesetzte S anzeigt, daß die Summe aller dieser Glieder genommen werden muß.

Setzt man hier nun statt n zuerst 0, dann 1, hernach 2, u. s. f., so erhält man

$$\delta^0 V = \delta'^0(\delta_1{}^0 V) = V;$$
$$\delta V = \delta'^0(\delta_1 V) + \delta'(\delta_1{}^0 V) = \delta_1 V + \delta'(\delta_1{}^0 V);$$
$$\delta^2 V = \delta'^0(\delta_1{}^2 V) + 2\delta'(\delta_1 V) + \delta'^2(\delta_1{}^0 V);$$

u. s. w. f.; und diese Resultate stimmen genau mit denen in der ersten Auflösung gefundenen überein, sobald man nur noch die δ' nach §. 66.) auswerthet, indem man daselbst nach und nach $\delta_1{}^0 V$, $\delta_1 V$, $\delta_1{}^2 V$, etc. etc. statt des dortigen V setzt, links aber δ' statt der dortigen δ schreibt.

§. 77.

Von dieser im vorstehenden §. 76.) behandelten Aufgabe verdient noch (für die Anwendungen) der besondere Fall hervorgehoben zu werden, wo nämlich (nachdem x, y, z, etc. in x_x, y_x, z_x, etc. und dadurch V in V_x oder in

$$\delta_1{}^0 V + \delta_1 V \cdot \frac{x}{1} + \delta_1{}^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta_1{}^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

übergegangen sind) diese $\delta^0 x$, $\delta^0 y$, $\delta^0 z$, δx, δy, δz, $\delta^2 x$, etc.

bloß noch als Funktionen des einzigen a angesehen werden, der übrigens in V, also auch in $\delta_1{}^0V$, $\delta_1 V$, $\delta_1{}^2V$, etc. etc. noch explicit vorkommen mag (oder nicht), und wo endlich noch für jedes a die Reihe a_x d. h. $\delta^0a+\delta a\cdot\frac{x}{1}+\delta^2a\cdot\frac{x^2}{2!}+\cdots$ gesetzt wird.

In diesem Falle nämlich hat man

I. $$\delta^0V=\delta_1{}^0V=V_{a,x,y,z,\text{etc.}},$$

wenn unter x, y, z, etc. die Anfangs-Glieder δ^0x, δ^0y, δ^0z, etc. und überall unter a (sowohl da, wo es explicit, als auch da, wo es implicit vorkommt) das Anfangs-Glied δ^0a verstanden wird.

Ferner hat man in diesem besonderen Falle noch

II. $\delta V=\delta_1 V+\partial V_{(a)}\cdot\delta a$ und $\delta_1 V=\delta V-\partial V_{(a)}\cdot\delta a$;

III. $\delta^2V=\delta_1{}^2V+2\partial(\delta_1 V)_{(a)}\cdot\delta a+\partial^2V_{(a)}\cdot\delta a^2+\partial V_{(a)}\cdot\delta^2a$;

u. s. w. f., wenn man nur nicht unterläßt, in diesen Resultaten zur Rechten, wo x, y, z, etc. erscheint, sich δ^0x, δ^0y, δ^0z, etc. darunter zu denken, dann aber auch für jedes explicit oder implicit vorkommende a jedesmal das Anfangs-Glied δ^0a der Reihe a_x zu schreiben, oder doch geschrieben zu denken.

Anmerkung. Und weil hier überall nur der Maclaurin'sche Lehrsatz in Anwendung kommt, so hat man in jedem besonderen Falle der Anwendung, wo man die Reihe abbrechen mag, nach §. 25.) auch jedesmal noch Grenzen, zwischen denen das Ergänzungs-Glied liegt *).

*) In dieser Entwickelungs-Methode sind alle dem Verfasser bekannten Entwickelungs-Methoden enthalten, namentlich auch der Calcul des dérivations des Arbogast, so wie auch der (von Lagrange und Euler behandelte) Calcul des Variations, welches letztere der nächste Abschnitt dieses Kapitels noch besonders nachweist.

Zweiter Abschnitt.

Variations-Rechnung.

Vorerinnerung.

In manchen Fällen der Anwendung der so eben mitgetheilten Lehren, sind die Reihen a_x, b_x, V_x, etc. von ihren ersten Gliedern $\delta^0 a$, $\delta^0 b$, $\delta^0 V$, etc. unendlich-wenig verschieden, weil x unendlich-klein gedacht ist. Dann nennt man die einzelnen Glieder des Unterschiedes $a_x - \delta^0 a$, oder $b_x - \delta^0 b$, oder $V_x - \delta^0 V$, etc., die mit den verschiedenen Potenzen von x afficirt sind (so daß jedes folgende gegen das vorhergehende selbst wieder unendlich-klein ist) und wenn die ersten Glieder $\delta^0 a$, $\delta^0 b$, $\delta^0 V$, etc. selbst bezüglich a, b, V, etc. sind (für welche später die Reihen a_x, b_x, V_x, etc., welche für $x = 0$ bezüglich in a, b, V wieder übergehen, gesetzt worden sind) — und wenn diese einzelnen Glieder bezüglich mit 1!, 2!, 3!, etc. etc. multiplicirt werden, — die Variationen von a, b, V, etc.; und es enthält also der vorhergehende erste Abschnitt dieses Kapitels zugleich die sogenannte Variations-Rechnung (Calcul des Variations) ihrem Wesen nach. Wir wollen jedoch auch ihre gewöhnliche Form noch näher betrachten.

§. 78.

Gewöhnlicher Begriff der Variation.

Verwandelt sich a, oder b, oder V, in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe (entweder freiwillig oder abhängig), welche bezüglich durch a_x, b_x, V_x bezeichnet und bezüglich jedesmal in der Form

$$\delta^0 a + \delta a \cdot \frac{x}{1} + \delta^2 a \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 a \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\delta^0 b + \delta b \cdot \frac{x}{1} + \delta^2 b \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 b \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\delta^0 V + \delta V \cdot \frac{x}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

geschrieben wird; wird dabei x unendlich klein gedacht, und sind $\delta^0 a$, $\delta^0 b$, $\delta^0 V$, von a, b, V nicht verschieden, so nennt man in diesen Reihen, die Produkte

$$\delta^n a \cdot x^n, \quad \delta^n b \cdot x^n, \quad \delta^n V \cdot x^n,$$

die n^{ten} **Variationen** bezüglich von a, b, V; und dieſelben bezeichnet man bezüglich durch

$$\delta^n a, \quad \delta^n b, \quad \delta^n V;$$

und der Unterſchied $a_x - a$, oder $b_x - b$, oder $V_x - V$ wird die **Geſammt-Variation** oder **Total-Variation** von a, oder b, oder V genannt.

§. 79.

Aus dieſer Definition folgt ſogleich:

I. $\varkappa \cdot \delta V = \delta V$ und überhaupt $\varkappa^a \cdot \delta^a V = \delta^a V$.

II. $V_x = V + \delta V + \frac{1}{2!} \cdot \delta^2 V + \frac{1}{3!} \cdot \delta^3 V + \cdots$.

III. $\delta^m \frac{d^n V}{dx^n} = \frac{d^n (\delta^m V)}{dx^n}$; $\delta \int_{\beta \div \alpha} V \cdot dx = \int_{\beta \div \alpha} \delta V \cdot dx$;

$$\delta^a \frac{d^{m+n} V}{dx^m \cdot dy^n} = \frac{d^{m+n} (\delta^a V)}{dx^m \cdot dx^n}; \text{ u. ſ. f.;}$$

alles aus §. 65.) in Verbindung mit vorſtehender I.).

Und multiplicirt man die Gleichungen in den Auflöſungen der Aufgaben der §§. 66. 67. 72. 75 und 76.) bezüglich mit $\varkappa$, $\varkappa^2$, $\varkappa^3$, etc. etc., ſo gehen jene Gleichungen ſogleich in die hieher gehörigen über, und die hieſigen bilden ſich aus jenen, wenn man hier bloß überall δ ſtatt der dortigen δ ſchreibt.

Jene praktiſche Regel, die Koefficienten δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, etc. etc. in jeder einzelnen Aufgabe zu finden, gilt daher unverändert für die Auffindung der **Variationen** δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, etc. etc.

Beiſpiel. Iſt z. B. U eine Funktion von x, y_x, z_x, ∂y_x, $\partial^2 y_x$, ∂z_x, $\partial^2 z_x$, $\partial^3 z_x$; iſt ferner $V = \int_{b \div a} U \cdot dx$; und denkt man ſich nun y in eine unendliche Reihe y_x oder $y + \delta y + \frac{1}{2!} \delta^2 y + \frac{1}{3!} \delta^3 y + \text{etc.}$, und eben ſo z in eine unendliche Reihe $z + \delta z + \frac{1}{2!} \delta^2 z + \frac{1}{3!} \delta^3 z + \text{etc.}$ übergehend, ſo geht dadurch V in eine unendliche Reihe über, welche wir mit

$V+\delta V+\frac{1}{2!}\delta^2V+\frac{1}{3!}\delta^3V+$ etc. bezeichnen. Soll nun die Funktion δV in die andern Variationen δy, δz, etc. etc. ausgedrückt werden, so hat man

$$\text{I.}\qquad \delta V=\int_{b\div a}\delta U\cdot dx,$$

und, wenn man δy_x, $\delta^2 y_x$, δz_x, $\delta^2 z_x$, $\delta^3 z_x$ bezüglich durch y_1, y_2, z_1, z_2, z_3 bezeichnet, wiederum

$$\text{II.}\quad \delta U=\frac{dU}{dy}\cdot\delta y+\frac{dU}{dy_1}\cdot\delta y_1+\frac{dU}{dy_2}\cdot\delta y_2 +\frac{dU}{dz}\cdot\delta z+\frac{dU}{dz_1}\cdot\delta z_1+\frac{dU}{dz_2}\cdot\delta z_2+\frac{dU}{dz_3}\cdot\delta z_3,$$

während jedoch

$$\delta y_1=\delta\delta y=\delta\delta y,\quad \delta y_2=\delta\delta^2 y=\delta^2\delta y,\quad \text{u. s. w.;}$$
$$\delta z_1=\delta\delta z=\delta\delta z,\quad \delta z_2=\delta\delta^2 z=\delta^2\delta z,\quad \text{u. s. w.}$$

ist, wo alle δ sich auf x beziehen, so daß, wenn man überhaupt Ableitungs-Zeichen statt der Differential-Zeichen schreibt,

$$\text{III.}\quad \delta V=\int_{b\div a}\left\{\begin{matrix}\partial U_y\cdot\delta y+\partial U_{y_1}\cdot\partial\delta y+\partial U_{y_2}\cdot\partial^2\delta y\\ +\partial U_z\cdot\delta z+\partial U_{z_1}\cdot\partial\delta z+\partial U_{z_2}\cdot\partial^2\delta z+\partial U_{z_3}\cdot\partial^3\delta z\end{matrix}\right\}\cdot dx$$

wird, wobei man nicht vergessen muß, daß das Zeichen $\int\varphi\cdot dx$ allemal das Integral nach allem x bedeutet, was in φ explicit oder implicit steckt. Dabei ist noch zu bemerken, daß die Variationen von y und von z als gegeben angesehen werden, so daß die Gleichung III.) nur die Abhängigkeit der Variation δV von den vorher genannten Variationen δy, δz, ausdrückt.

Es versteht sich dabei von selbst, daß der so eben für δV erhaltene Ausdruck noch auf mannigfache Art umgeformt werden kann, sobald irgend ein praktisches Bedürfniß eine andere bestimmte Form wünschenswerth oder nothwendig macht. So z. B. könnte man alle die einzelnen Glieder in III.) zur Rechten, welche noch mit den Ableitungen $\partial\delta y$, $\partial^2\delta y$, $\partial\delta z$, $\partial^2\delta z$, $\partial^3\delta z$ behaftet sind, so lange theilweise integriren, indem man dabei die Formel des §. 22.) in Anwendung bringt, bis alle Ableitungen von δy und δz (nach x) außerhalb des Integral-Zeichens stehen; dann würde man sogleich umgeformt erhalten:

$$\text{IV.}\quad \delta V=\int_{b\div a}[\partial U_y-\partial(\partial U_{y_1})+\partial^2(\partial U_{y_2})]\cdot\delta y\cdot dx +\int_{b\div a}[\partial U_z-\partial(\partial U_{z_1})+\partial^2(\partial U_{z_2})-\partial^3(\partial U_{z_3})]\cdot\delta z\cdot dx +\left[\begin{matrix}[\partial U_{y_1}-\partial(\partial U_{y_2})]\cdot\delta y+\partial U_{y_2}\cdot\partial\delta y\\ +[\partial U_{z_1}-\partial(\partial U_{z_2})+\partial^2(\partial U_{z_3})]\cdot\delta z\\ +[\partial U_{z_2}-\partial(\partial U_{z_3})]\cdot\partial\delta z+\partial U_{z_3}\cdot\partial^2\delta z\end{matrix}\right]_{b\div a}$$

wo das rechts unten angehängte $b\div a$ bedeutet, daß in dem, in den großen eckigen Klammern befindlichen Ausdrucke überall statt x zuerst b, dann a substituirt, das letztere aber vom erstern subtrahirt werden soll; während die bloßen ∂, allemal nach allem x genommen, zu verstehen sind.

Solche Umformungen erscheinen aber als müssig, so lange sie nicht durch irgend eine praktische Anwendung motivirt werden.

Anmerkung. Wir müssen noch hinzufügen, daß es in allen Anwendungen evidenter und bequemer ist, die Variationen von a oder V durch $\varkappa \cdot \delta a$, $\varkappa^2 \cdot \delta^2 a$, etc., $\varkappa \cdot \delta V$, $\varkappa^2 \cdot \delta^2 V$, etc. statt bloß durch δa, $\delta^2 a$, etc., δV, $\delta^2 V$. etc. zu bezeichnen, so daß δa, δV, $\delta^2 a$, $\delta^2 V$, etc. etc. endliche Ausdrücke bleiben, während bloß $\varkappa$ unendlich klein gedacht wird. Diese endlichen, in dem erstern Abschnitt dieses Kapitels behandelten δa, $\delta^2 a$, etc., δV, $\delta^2 V$, etc. kann man dann die Variations-Koefficienten nennen.

Aus diesem Grunde wollen wir künftighin jene, in dem erstern Abschnitt dieses Kapitels behandelte allgemeine Entwickelungs-Methode ebenfalls schon Variations-Rechnung nennen, gerade so, wie wir hier häufig uns des Wortes differenziiren bedienen, wenn wir das Geschäft der Auffindung der Ableitungen ausdrücken wollen.

Zehntes Kapitel.

Die allgemeinſte Lehre vom Größten und Kleinſten.

Vorerinnerung.

Obgleich wir bereits im I. Bd. §. 61. und §. 167.) eine Theorie vom Größten und Kleinſten gegeben haben, ſo ſind jene Unterſuchungen doch nur als ſehr ſpecielle Fälle der hier folgenden allgemeinſten Lehre vom Größten und Kleinſten anzuſehen.

§. 80.

Die allgemeinſte Aufgabe vom Größten und Kleinſten.

Iſt V eine Funktion von beliebigen Veränderlichen, mit oder ohne deren Ableitungen, mit oder ohne Integrale derſelben, ja mit oder ohne uns zur Zeit noch unbekannten Ausdrucks-Formen; und ſtellt $V_\varkappa$ dieſelbe, auf eine beliebige, aber in jedem Falle gegebene Weiſe durch $\varkappa$ **variirte** Funktion V vor (d. h. diejenige Funktion, welche aus V hervorgeht, wenn man ſtatt eines, oder ſtatt einiger, oder ſtatt aller ihrer Veränderlichen z. B. ſtatt der in ihr vorkommenden

x, y, z, δy_x, δz_x, etc. $\delta^{1,1}u_{x,y}$, etc. $\int_{b+a} y\cdot dx$, $\int_{n+m} U_{x,y,\delta y\ldots}\cdot dx$,

unendliche Reihen ſetzt, die bezüglich mit x, y, z, etc. etc. etc. ſelbſt anfangen, aber nach Potenzen eines unendlich-klein gedachten $\varkappa$ fortlaufen); — ſo liefert $V_\varkappa$, je nachdem $\varkappa$ poſitiv oder negativ, wenn nur immer unendlich-klein gedacht wird, **zwei** an V nächſt angrenzende Werthe, beide (nach dem vorhergehenden Kapitel) durch

$$V+\delta V\cdot\frac{\varkappa}{1}+\delta^2 V\cdot\frac{\varkappa^2}{2!}+\delta^3 V\cdot\frac{\varkappa^3}{3!}+\cdots$$

vorgestellt. — Man soll nun die Bedingungen aufsuchen, unter welchen V größer ist, als diese beiden nächsten Nachbar-Werthe V_x und in dieser Beziehung ein Größtes (ein Maximum) genannt wird, oder bestimmen, wenn V kleiner ist, als diese beiden nächsten Nachbar-Werthe, d. h. in dieser Beziehung ein Kleinstes (ein Minimum) ist.

Auflösung. Da

$$V_x - V = \delta V \cdot \frac{x}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

ist, so kann der Unterschied $V_x - V$ nicht immer einerlei (+, −) Zeichen behalten (bei dem Uebergange des x vom Positiven zum Negativen), so lange das Glied $\delta V \cdot x$ (welches mit x zugleich sein + oder — Zeichen wechselt, und dessen + oder — Zeichen, wegen des unendlich-klein gedachten x, das des ganzen Unterschiedes $V_x - V$ ist) noch vorhanden sich zeigt. Also ist

I. $$\delta V = 0$$

eine Bedingung, welche erfüllt seyn muß, wenn überhaupt ein Maximum oder Minimum von V soll statt finden können.

Ist dann noch $\delta^2 V$ (für diese aus $\delta V = 0$ gefundenen Werthe der Veränderlichen) $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$, so ist $V_x - V$ allemal $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ (weil x^2 sein Zeichen nicht ändert, es mag x positiv oder negativ gedacht werden), d. h. V selbst allemal ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\\text{Maximum}\end{matrix}\right\}$.

Ist für $\delta V = 0$ auch noch $\delta^2 V = 0$ und auch noch $\delta^3 V = 0$, so fängt die Entwickelung von $V_x - V$ mit dem Gliede $\delta^4 V \cdot \frac{x^4}{4!}$ an, und da x^4 immer positiv wird, so entscheidet dann $\delta^4 V$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$, ob V ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\\text{Maximum}\end{matrix}\right\}$ ist. — U. s. w. f.

Weil aber die Entwickelung von $V_x - V$ in die Reihe

$\delta V \cdot x +$ etc. etc. mittelst des Maclaurin'schen Lehrsatzes erhalten wird, so wäre es möglich, daß gerade die Werthe der Veränderlichen, welche V zu einem Maximum oder Minimum machen, zu den Ausnahms-Werthen gehörten, für welche die Maclaurin'sche Reihe nach §. 158. d. I. Bds.) deshalb nicht mehr statt findet, weil entweder δV, oder $\delta^2 V$, oder doch $\delta^3 V$, $\delta^4 V$, etc. etc. die Form $\frac{1}{0}$ annehmen. — Ist aber dann für diese Werthe der Veränderlichen, noch nicht $\delta V = \frac{1}{0}$, so hat man doch (nach §. 158. d. I. Bds.) noch immer

$$V_x - V = \delta V \cdot x + P \cdot x^\mu + \cdots,$$

so daß also noch immer $\delta V = 0$ seyn muß, wenn V für diese Werthe der Veränderlichen ein Maximum oder Minimum soll seyn können. — Weil aber die Werthe der Veränderlichen, welche V zu einem Maximum oder Minimum machen, zu denjenigen Ausnahms-Werthen gehören könnten, welche bereits δV auf die Form $\frac{1}{0}$ bringen, so wird man, um diese etwa vorhandenen Werthe nicht zu verfehlen, auch noch

II: $\quad \delta V = \frac{1}{0} \quad$ d. h. $\quad \frac{1}{\delta V} = 0$

setzen und aus dieser Gleichung ebenfalls die Werthe der Veränderlichen bestimmen, für letztere aber die Differenz $V_x - V$ direkt in Reihen (nach gebrochenen Potenzen von x) verwandeln, und zusehen, ob diese Differenz $V_x - V$ mit x zugleich ihr ($+$ oder $-$) Zeichen wechselt, oder nicht. Im erstern Fall ist V für diese Werthe kein Maximum und auch kein Minimum; im andern Falle ist dagegen V gegen V_x ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\\text{Maximum}\end{matrix}\right\}$, wenn $V_x - V$ immerfort $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ bleibt.

Anmerkung. Der Gang ist derselbe wie der im I. Bd. §. 61.) und §. 167.) bereits betretene; auch sind jene Fälle in

dieſer allgemeinſten Aufgabe enthalten. — Man ſetzt alſo $\delta V = 0$, findet aus dieſer Gleichung, welche ſich häufig in zwei oder mehrere Gleichungen zerlegt, die Werthe der unabhängigen Veränderlichen. Man ſetzt dann auch $\frac{1}{\delta V} = 0$, und findet auch aus dieſer Gleichung die Werthe der unabhängigen Veränderlichen. Für jedes zuſammengehörige Syſtem dieſer gefundenen Werthe unterſucht man die Differenz $V_\varkappa - V$. Aendert ſie mit $\varkappa$ zugleich ihr $+$ oder $-$ Zeichen, ſo machen dieſe Werthe die Funktion V weder zu einem Maximum, noch zu einem Minimum; — ändert aber $V_\varkappa - V$, während $\varkappa$ vom Poſitiven zum Negativen übergeht, ſein $+$ oder $-$ Zeichen nicht, ſo iſt V für dieſe Werthe ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right\}$, wenn dieſe Differenz $V_\varkappa - V$ immerfort $\left\{\begin{matrix}\text{poſitiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ bleibt.

Das Schwierigſte in der praktiſchen Durchführung der Aufgabe des §. 80.) iſt gewöhnlich die weitere Behandlung der Gleichung $\delta V = 0$ (wenn wir $\delta V = \frac{1}{0}$, wie ſolches hier geſchehen mag, nicht näher betrachten wollen). Theils um die Schwierigkeiten zu zeigen, theils um ſie heben zu lehren, mögen daher folgende Fälle noch näher betrachtet werden.

§. 81.

I. Iſt V bloß eine Funktion von x allein, und iſt $V_\varkappa$ nichts anders als $V_{x+\varkappa}$, ſo wird (nach §. 66.)

$$\delta V = \delta V_x \cdot \delta x = \delta V_x,$$

weil jetzt $x_\varkappa = x + \varkappa$, alſo $\delta x = 1$, $\delta^2 x = 0$, $\delta^3 x = 0$, etc. etc. vorausgeſetzt wurde; alſo geht jetzt $\delta V = 0$ in $\delta V_x = 0$ über, und dies iſt die Aufgabe des I. Bds. §. 167. I.), womit die hieſige Auflöſung genau übereinſtimmt.

II. Iſt V eine Funktion von x und y, und $V_\varkappa$ das, was aus V hervorgeht, wenn

statt x jetzt $x_\varkappa$ d. h. $x+\delta x\cdot\varkappa+\cdots$
statt y jetzt $y_\varkappa$ d. h. $y+\delta y\cdot\varkappa+\cdots$

etzt wird, — so ist nun (nach §. 67.)

$$\delta V=\partial V_x\cdot\delta x+\partial V_y\cdot\delta y.$$

erden nun x und y, also auch $x_\varkappa$ und $y_\varkappa$, mithin auch δx d δy als von einander ganz unabhängig gedacht, so zerfällt Gleichung $\delta V=0$, da sie für $\delta y=0$ und für jedes , und auch für $\delta x=0$ und für jedes δy, immer statt den muß, in die beiden Gleichungen

$$\partial V_x=0 \quad \text{und} \quad \partial V_y=0;$$

d dies ist die Aufgabe des I. Bds. §. 167. II.), mit deren ıflösung die hiesige genau übereinstimmt.

Sind aber x und y mittelst der Gleichung $\varphi_{x,y}=0$ derstalt von einander abhängig, daß gleichzeitig auch noch $_{x,y_x}=0$, also auch $\delta\varphi=0$ seyn muß, so hat man noch :il $\delta\varphi=\partial\varphi_x\cdot\delta x+\partial\varphi_y\cdot\delta y$ ist, die Gleichung

$$\partial\varphi_x\cdot\delta x+\partial\varphi_y\cdot\delta y=0,$$

elche die Abhängigkeit zwischen δx und δy ausdrückt. Elimirt man nun δy aus $\delta V=0$ und $\delta\varphi=0$, so geht die leichung $\delta V=0$ über in

$$\left(\partial V_x-\partial V_y\cdot\frac{\partial\varphi_x}{\partial\varphi_y}\right)\cdot\delta x=0, \quad \text{oder} \quad \partial V_x\cdot\partial\varphi_y-\partial\varphi_x\cdot\partial V_y=0;$$

nd diese Gleichung in Verbindung mit $\varphi_{x,y}=0$ giebt nun ie Werthe von x und y, welche $V_{x,y}$ zu einem Maximum der Minimum machen können. Ob aber dies Ereigniß eintritt der nicht, hängt erst von der Untersuchung des Werthes von $_x-V$ ab, wie er für diese Werthe von x und y hervorgeht.

Es kann aber auch $\varphi_{x,y}$ ohne der Null gleich zu seyn für lle zusammengehörigen Werthe $x_\varkappa$ und $y_\varkappa$ immerfort einen und nselben constanten Werth behalten sollen. Dann ist $\varphi_\varkappa-\varphi=0$, lso doch noch $\delta\varphi\cdot\varkappa+\cdots=0$, d. h. noch immer $\delta\varphi=0$, ie kurz vorher auch. Also bleibt die Zerfällung der Glei-

chung $\delta V = 0$ doch genau so, wie bei der nächst vorhergehenden Annahme.

III. Ist V eine Funktion von x, y und ∂y_x, welche letztere Ableitung ∂y_x durch y_1 bezeichnet seyn mag; und entsteht $V_\varkappa$ dadurch, daß man

bloß statt y setzt $y_\varkappa$ oder $y + \delta y \cdot \varkappa + \cdots$,

aber dann auch

statt ∂y_x oder y_1 setzen muß $\partial(y_\varkappa)_x$ d. h. $\partial y_x + \partial\delta y \cdot \varkappa + \cdots$,

wo die bloßen ∂ sich auf x beziehen, so hat man nach dem §. 67.) in Verbindung mit §. 65.)

1) $$\delta V = \partial V_y \cdot \delta y + \partial V_{y_1} \cdot \partial\delta y \text{ *).}$$

A. Soll nun die Gleichung $\delta V = 0$ für jede beliebige Funktion von x gelten, welche statt δy gesetzt werden mag, so zerfällt sie jetzt wiederum (weil δy eine beliebige Constante haben kann, die in $\partial\delta y$ nicht vorkommt, weil also die Werthe von δy und $\partial\delta y$ von einander unabhängig bleiben, so daß gleichzeitig $\partial\delta y = 0$ und δy beliebig seyn, und gleichzeitig $\delta y = 0$

---

*) Dem Geiste unserer Behandlung im vorhergehenden Kapitel gemäß, bezeichnet man die, obgleich gegebene Reihe

1) $$\partial y_x + \partial\delta y \cdot \varkappa + \partial^2\delta y \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots$$

welche statt y_1 gesetzt werden muß, um $V_\varkappa$ aus V zu erhalten, abermals nach demselben Schema durch

2) $$(y_1)_\varkappa \text{ d. h. durch } y_1 + \delta y_1 \cdot \varkappa + \delta^2 y_1 \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots,$$

so daß δy_1, $\delta^2 y_1$, etc. wiederum bloß bezeichnete Koefficienten sind, welche jedoch, da die Reihe 2.) von der Reihe 1.) nicht verschieden seyn soll, bereits in die Koefficienten δy, $\delta^2 y$, etc. ausgedrückt sind, so daß man $\delta y_1 = \partial\delta y$, $\delta^2 y_1 = \partial\delta^2 y$, etc. etc. hat. Da nun V als Funktion von y und y_1, welche bezüglich in $y_\varkappa$ und $(y_1)_\varkappa$ übergehen, betrachtet werden muß, so hat man

$$\delta V = \partial V_y \cdot \delta y + \partial V_{y_1} \cdot \delta y_1;$$

und so findet sich der obige Ausdruck für δV.

$\delta y = 0$ und $\delta\delta y$ einen beliebigen Werth haben kann) in die beiden Gleichungen

2) $\quad \delta V_y = 0 \quad$ und $\quad$ 3) $\delta V_{y_1} = 0.$

B. Soll die Gleichung 1.) nicht für jedes δy, gelten, d. h. ſoll die Funktion V nicht gegen *jedes* V_x, ſondern nur gegen diejenigen V_x ein Maximum oder Minimum werden, welche aus einem δy hervorgehen, das für jeden andern Werth von x anders und immer ſo wird, daß entweder

bloß $\delta y = 0$, aber *nicht* $\delta\delta y = 0$,

oder bloß $\delta\delta y = 0$, aber nicht $\delta y = 0$ wird,

ſo reducirt ſich die Gleichung 1.) im erſtern Falle bloß auf

4) $\quad \delta V_{y_1} = 0,$

im andern Falle aber bloß auf

5) $\quad \delta V_y = 0.$

Ehe wir weiter gehen, mag das vorſtehende durch einige Beiſpiele erläutert werden.

Beiſpiel 1. Man ſoll die Kurve finden (d. h. ihre auf die rechtwinklichen Koordinaten-Axen OX und OY bezogene Gleichung zwiſchen x und y), welche durch einen gegebenen Punkt (α, β) hindurchgeht, und welche dabei an jedem ihrer Punkte M (Fig. 21.) (deſſen Abſciſſen-Werth OP, $=x$ ſeyn mag, ſo daß $PM = y$ iſt) die Eigenſchaft hat, daß die durch dieſen Punkt M hindurchgehende und von zweien, zu den Abſciſſen-Werthen $OS_1 = a$ und $OT_1 = b$ gehörigen Ordinaten-Richtungen SS_1 und TT_1 begrenzte Tangente SMT kleiner iſt, als die zu derſelben Abſciſſe $OP = x$ gehörige und eben ſo begrenzte Tangente einer jeden andern nächſt anliegenden Nachbar-Kurve, welche ebenfalls durch denſelben gegebenen Punkt (α, β) hindurchgeht.

Iſt hier $y = y_x$ die Ordinate MP der geſuchten Kurve, ſo drückt

$$y_\varkappa \text{ d. h. } y + \delta y \cdot \varkappa + \delta^2 y \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots,$$

wenn δy, $\delta^2 y$, etc. etc. als ganz beliebige Funktionen von x gedacht ſind und $\varkappa$ unendlich klein genommen wird, — den, zu demſelben Abſciſſen-Werthe x gehörigen Ordinaten-Werth der nächſten Nachbar-Kurven aus, und es ſind dieſe Funktionen δy, $\delta^2 y$, etc. etc. keiner andern Bedingung unterworfen, als daß für $x = \alpha$, allemal $y_\varkappa = y = \beta$, alſo δy_α, $\delta^2 y_\alpha$*),

*) Wir verſtehen unter δy_α, $\delta\delta y_\alpha$, $\delta^2 y_\alpha$, etc. etc. hier immer das, was aus δy, $\delta(\delta y)_x$, $\delta^2 y$, etc. wird, ſo oft man α ſtatt x ſchreibt,

etc. etc. $=0$ werden muß; eine Bedingung, welche keinen Einfluß auf die Form der Funktionen δy. $\delta^2 y$. etc. hat, sondern bei jeder beliebigen Form dieser Funktionen durch die schickliche Annahme einer einzigen Constante in dieser Form erfüllt werden kann.

Nun findet sich nach I. Bd. §§. 170. 171.) die Länge V der Tangente SMT so, nämlich

$$V=(b-a)\cdot\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}}=(b-a)\cdot\sqrt{1+y_1^{\,2}}.$$

wenn wir ∂y_x durch y_1 bezeichnen. Die Länge V_x derselben Tangente für jede nächste Nachbar-Kurve ist daher

$$V_x=(b-a)\cdot\sqrt{1+\partial(y_x)_x^{\,2}}.$$

Man findet nun $\delta V_y=0$, $\delta V_{y_1}=(b-a)\cdot\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^{\,2}}}$,

also $$\delta V=(b-a)\cdot\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^{\,2}}}\cdot\partial\delta y.$$

Die Gleichung $\delta V=0$ geht daher dasmal über in

$$y_1=0,\quad \text{d. h.}\quad \partial y_x=0 \quad \text{und giebt} \quad y=c$$

wo c eine willkührliche Constante ist. Da für $x=\alpha$, $y=\beta$ werden soll, so erhält man noch $c=\beta$; und es ist daher die Gleichung der gesuchten Kurve dasmal

$$y=\beta,$$

welches eine mit OX parallele und durch den Punkt (α,β) hindurchgehende Gerade vorstellt.

Es wird ferner dasmal

$$\delta^2 V=(b-a)\cdot\frac{1}{(1+y_1^{\,2})\sqrt{1+y_1^{\,2}}}\cdot(\partial\delta y)^2;$$

und da hier überall $\sqrt{1+y_1^{\,2}}$ ihren positiven Werth vorstellt, so zeigt sich $\delta^2 V$ positiv. Also ist V ein Minimum.

Beispiel 2. Es wird die Kurve NMR (Fig. 21.) gesucht, in welcher das Produkt $SS_1\cdot TT_1=V$ ein Minimum wird.

Dasmal findet sich

$$V=[y+(a-x)y_1]\times[y+(b-x)y_1];$$

daher, weil die Gleichung $\delta V=0$ in $\partial V_y=0$ und $\partial V_{y_1}=0$ zerfällt,

$$\partial V_y=\qquad 2y+(a+b-2x)\cdot\partial y_x\qquad =0$$

und

$$\partial V_{y_1}=(a+b-2x)y+2(a-x)(b-x)\cdot\partial y_x=0.$$

Diese beiden Gleichungen geben, wenn ∂y_x eliminirt wird $y=0$, und da $y=0$ beiden Gleichungen zugleich wirklich genügt, so löst solches die Aufgabe. Dies giebt eine Gerade, die mit der Abscissen-Axe zusammen fällt. Ist daher β nicht $=0$, so hat diese Aufgabe gar keine Auflösung.

Aber auch, wenn $\beta=0$ gegeben ist, zeigt es sich, daß für $y=0$ $\delta^2 V$ nicht

immerfort poſitiv und auch nicht immerfort negativ wird, daß alſo auch $y=0$ unſer V nicht zu einem Maximo oder Minimo machen kann.

Beiſpiel 3. Hätte man aber in der vorhergehenden Aufgabe verlangt, daß V ein Minimum werden ſoll bloß in Bezug auf diejenigen nächſten Nachbar-Kurven, welche gerade allemal auch durch denſelben Punkt M hindurchgehen, an welchen jetzt eben die Tangente SMT gedacht wird, ſo hätte man jetzt den erſtern der Fälle III. B.) nämlich den Fall, wo für jedes eben gedachte x, $y_x=y$, aber nicht $\delta(y_x)_x=\delta y_x$ werden ſoll. Dasmal hat man alſo bloß die einzige Gleichung $\delta V_{y_I}=0$, welche aus $\delta V=0$ hervorgeht; alſo die Gleichung

$$(a+b-2x)y+2(a-x)(b-x)\cdot\delta y_x=0$$

oder

$$\frac{\delta y_x}{y}=\frac{2x-a-b}{2(x-a)(x-b)}.$$

Dieſe Gleichung integrirt, giebt

$$y^2=C(a-x)(b-x).$$

Weil aber für $x=\alpha$, $y=\beta$ werden ſoll, ſo hat man noch zur Beſtimmung der Conſtante C die Gleichung

$$\beta^2=C(a-\alpha)(b-\alpha);$$

ſo daß die Gleichung der geſuchten Kurve wird

$$\frac{y^2}{\beta^2}=\frac{(a-x)(b-x)}{(a-\alpha)(b-\alpha)}.$$

Dies iſt die Gleichung einer Hyperbel, wenn α größer als a und b, oder wenn α kleiner als a und b iſt; dagegen giebt dieſelbe Gleichung eine Ellipſe, wenn α zwiſchen a und b liegt.

Es wird noch gefunden

$$\delta^2V=\partial^2V_{y_I}\cdot(\delta\delta y)^2=2(a-x)(b-x)\cdot(\delta\delta y)^2.$$

Alſo macht die Kurve V zu einem Maximum, ſo oft der Punkt M zwiſchen S und T liegt; dagegen zu einem Minimum, ſo oft der Punkt M, an welchem die Tangente gezogen wird, links von S oder rechts von T genommen wird.

Beiſpiel 4. Sollte aber daſſelbe Produkt $V=SS_I\times TT_I$ ein Minimum werden, aber bloß in Bezug auf alle diejenigen nächſten Nachbar-Kurven, deren Tangenten für denſelben jedesmaligen Werth von x alle mit einander und mit SMT parallel laufen; — ſo wäre dasmal für den jedesmaligen Werth von x, $\delta(y_x)_x=\delta y_x$ gedacht, alſo δy zwar beliebig, aber für einen jedesmaligen anderen Werth von x anders und ſo gedacht, daß für denſelben Werth von x, $\delta(\delta y)_x=0$ wird. Dies wäre alſo der zweite der Fälle III. B.).

Dasmal hat man daher $\partial V_y=0$, d. h.

$$2y+(a+b-2x)\cdot\delta y_x=0 \quad \text{oder} \quad \frac{\delta y_x}{y}=\frac{1}{x-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b},$$

also wenn man integrirt

$$y=C(x-\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}b) \quad \text{oder} \quad y-\beta=\frac{\beta}{\alpha-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b}(x-\alpha),$$

wenn man C so bestimmt, daß $y=\beta$ wird für $x=\alpha$.

Diese Gleichung stellt eine Gerade vor, welche die Abscissen-Axe genau in der Mitte U zwischen S_I und T_I trifft, übrigens durch den gegebenen Punkt (α, β) hindurchgeht, wie (Fig. 22.) zeigt.

Aus $\delta V=\partial V_y\cdot\delta y$ folgt sogleich für den hier gefundenen Werth von y, $\delta^2V=2\cdot\delta y^2$; also wird δ^2V positiv; folglich ist für diesen Werth von y, die Funktion V wirklich ein Minimum *).

§. 82.

Ist

1) $$V=\int_{b\div a}U\cdot dx,$$

dagegen U selbst wieder eine der im §. 81. II. III.) aufgezählten Funktionen; sind ferner die nächsten Nachbar-Werthe V_x, gegen welche V ein Maximum oder Minimum werden soll, folgende:

2) $$V_x=\int_{b\div a}U_x\cdot dx,$$

wo U_x das bedeutet, was aus U hervorgeht, wenn statt der Elemente y, z, etc. jetzt die mit denselben Elementen anfangenden Reihen $y+\delta y\cdot x+\cdots$, $z+\delta z\cdot x+\cdots$ gesetzt werden, — so wird man

---

*) Verfolgt man diese Auflösung geometrisch, so sieht man (Fig. 22.) S mit N, T dagegen mit R zusammenfallen. Der Ausdruck V, welcher das Produkt der beiden Ordinaten-Werthe der Tangente vorstellt, ist dasmal negativ, weil der zweite Faktor den negativen Werth $-TT_I$ hat. — Das Produkt der als positiv gedachten Linien SS_I und TT_I ist daher eigentlich ein Maximum, weil nur dann $V=-SS_I\cdot TT_I$ ein Minimum seyn kann. — Und in der That ist jetzt, wo $S_IU=T_IU$ ist, auch $SS_I=TT_I$; während jede andere mit dieser ST parallele Tangente z. B. VW für jede andere nächst-anliegende Kurve, die eine der Ordinaten um ein Stück $SV=TW=z$ größer, die andere um dasselbe Stück kleiner macht, so daß das Produkt derselben durch $(SS_I-z)(SS_I+z)$ d. h. $SS_I^2-z^2$ ausgedrückt, also offenbar um das Stück z^2 kleiner wird, als das erstere Produkt $SS_I\cdot TT_I$, welches hier $=SS_I^2$ gefunden wurde.

3) $$\delta V = \int_{b\div a} \delta U \cdot dx$$

so finden, wie etwa in dem Beispiele zu §. 79.), so daß, wenn z. B. U eine Funktion von x, y, y_1, y_2, z und z_1 ist, man haben wird

4) $$\delta V = \int_{b\div a} \left\{ \begin{matrix} \partial U_y \cdot \delta y + \partial U_{y_1} \cdot \partial\delta y + \partial U_{y_2} \cdot \partial^2 \delta y \\ + \partial U_z \cdot \delta z + \partial U_{z_1} \cdot \partial\delta z \end{matrix} \right\} \cdot dx,$$

wo die bloßen ∂ sich allemal auf alles x beziehen, d. h. wo $\partial\delta y$ statt $\partial(\delta y)_x$ steht, u. s. w.

Um aber die Behandlung der Gleichung $\delta V = 0$ gehörig durchführen zu können, muß man jedes solche Integral vorher, durch wiederholte theilweise Integration, so lange umformen, bis kein mit $\partial\delta y$, $\partial\delta z$, $\partial^2\delta y$, etc. etc. behaftetes Glied, sonder lauter nur mit δy oder δz behaftete Glieder allein noch unter dem Integral-Zeichen vorkommen, eine Umformung, welche wir im Beispiel zu §. 79.) durchgesetzt haben.

Diese Umformung ist allemal möglich, da jedes einzelne Glied integrirt werden muß. Gesetzt nun, ein Glied von δV hätte die Form

α) $$\int_{b\div a} \partial U_{z_2} \cdot \partial^2 \delta z \cdot dx,$$

so würde man durch Anwendung der Formel

β) $$\int_{b\div a} (u \cdot \partial v_x) \cdot dx = [uv]_{b\div a} - \int_{b\div a} (v \cdot \partial u_x) \cdot dx,$$

wenn $\partial\delta z$ statt v gesetzt wird, zunächst erhalten

γ) $$\int_{b\div a} \partial U_{z_2} \cdot \partial^2 \delta z \cdot dx = [\partial U_{z_2} \cdot \partial\delta z]_{b\div a} - \int_{b\div a} \partial(\partial U_{z_2}) \cdot \partial\delta z \cdot dx,$$

wo die bloßen ∂ sich auf alles x beziehen. Das letztere Integral giebt aber nach derselben Formel β), wenn jetzt δz statt v gesetzt wird, sogleich noch

δ) $$\int_{b\div a} \partial(\partial U_{z_2}) \cdot \partial\delta z \cdot dx = [\partial(\partial U_{z_2}) \cdot \delta z]_{b\div a} - \int_{b\div a} \partial^2(\partial U_{z_2}) \cdot \delta z \cdot dx.$$

Substituirt man daher diesen Werth in die γ), so ergiebt sich

ε) $$\int_{b\div a} \partial U_{z_2} \cdot \partial^2 \delta z \cdot dx = [\partial U_{z_2} \cdot \partial\delta z]_{b\div a} - [\partial(\partial U_{z_2}) \cdot \delta z]_{b\div a} + \int_{b\div a} \partial^2(\partial U_{z_2}) \cdot \delta z \cdot dx,$$

so daß nur noch δz allein, aber keine der Ableitungen $\partial\delta z$, $\partial^2\delta z$ mehr unter dem Integral-Zeichen erscheint.

Auf diese Weise wird also, unter unserer obigen beispielsweise gemachten Voraussetzung, der Variations-Koefficient δV in 4.) so umgeformt erscheinen, nämlich

5) $\delta V = ([\partial U_{y_1} - \partial(\partial U_{y_2})]\cdot\delta y + \partial U_{y_2}\cdot\partial\delta y + \partial U_{z_1}\cdot\delta z)_{b\div a}$
$+\int_{b\div a}\left(\begin{matrix}[\partial U_y - \partial(\partial U_{y_1}) + \partial^2(\partial U_{y_2})]\cdot\delta y \\ +[\partial U_z - \partial(\partial U_{z_1})]\cdot\delta z\end{matrix}\right)\cdot dx.$

So wie diese Umformung von δV bewerkstelligt ist, so kann man, und nur dann erst, behaupten, daß $\delta V = 0$ im Allgemeinen nicht existiren kann, wenn nicht der noch unter dem Integral-Zeichen befindliche Theil für sich, und auch der außerhalb des Integral-Zeichens befindliche Theil für sich, der Null gleich ist*). — Dadurch zerlegt sich $\delta V = 0$ in zwei Gleichungen, von denen jede wieder, nach den besonderen Umständen der besonderen Aufgaben auf's Neue sich zerlegt. — Die erstere Gleichung giebt aber allemal Differenzial-Gleichungen, welche noch integrirt werden müssen; und sie heißen die allgemeinen Gleichungen des Maximums und Minimums. Die andere Gleichung, auch wenn sie wieder in mehrere zerfällt, giebt allemal Gleichungen, in denen kein x mehr vorkommt, weil statt der x bereits die Grenz-Werthe gesetzt worden sind. Man nennt sie deshalb die Grenz-Gleichungen für das Maximum oder Minimum, und sie dienen nebst den etwanigen übrigen Nebenbedingungen der Aufgabe, zur Bestimmung der durch die Integration der erstern Gleichungen eingegangenen willkührlichen Constanten.

Folgende Beispiele mögen dies deutlicher machen.

Beispiel 1. Es soll die Kurve $y = y_x$ gefunden werden, welche zwischen gegebenen, zu $x = a$ und $x = b$ gehörigen Grenz-Ordinaten die kürzeste ist.

Wird durch V die Länge dieser Kurve bezeichnet, so hat man hier

1) $V = \int_{b\div a}\sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot dx,$

so daß

2) $U = \sqrt{1+y_1^2};$ 3) $V = \int_{b\div a} U\cdot dx;$

4) $\delta U = \frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\cdot\partial\delta y$ und 5) $\delta V = \int_{b\div a}\delta U\cdot dx;$

*) Ueber den Beweis dieser Behauptung lese man die §§. 334—337. d. VI. Th. d. „Syst. d. Mathem."

ist; folglich hat man, wenn man theilweise integrirt,

$$6)\quad \delta V=\left[\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\cdot\delta y\right]_{b\div a}-\int_{b\div a}\partial\left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right)\cdot\delta y\cdot dx$$

$$=\left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right)_b\cdot\delta y_b-\left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right)_a\cdot\delta y_a-\int_{b\div a}\partial\left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right)\cdot\delta y\cdot dx,$$

wo zuerst b statt x, dann a statt x gesetzt worden ist.

Die Gleichung $\delta V=0$ giebt daher jetzt zunächst die allgemeine Gleichung des Maximums oder Minimums

$$7)\quad \partial\left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right)=0,\ \text{oder}\ \frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}=c\ \text{oder}\ y_1\ \text{d. h.}\ \partial y_x=C,$$

wo C eine willkührliche Constante ist. Integrirt man diese Gleichung noch einmal, so erhält man

$$8)\quad y=Cx+c',$$

wo C und c' zwei noch zu bestimmende Constanten sind.

Weil aber auch δy_b und δy_a ganz willkührlich sind, so zerfällt die Grenz-Gleichung

$$9)\quad \left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right)_b\cdot\delta y_b-\left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right)_a\cdot\delta y_a=0$$

sogleich wieder in die beiden Gleichungen

$$10)\quad \left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right)_b=0\quad\text{und}\quad 11)\quad \left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right)_a=0,$$

welche beide, weil $y_1=C$ ist, dasmal in die einzige Gleichung

$$12)\quad C=0$$

zusammenfallen. — Die gesuchte Linie ist daher dasmal durch die Gleichung

$$13)\quad y=c'$$

gegeben, und diese Gleichung drückt eine, mit der Abscissen-Axe OX parallele Gerade aus.

Soll sie noch durch den Punkt (α, β) hindurchgehen, so zeigt sich noch $c'=\beta$, so daß dann die gesuchte Linie ausgedrückt ist durch

$$14)\quad y=\beta.$$

Für $y_1=0$ zeigt sich $\delta^2U=(\delta\delta y)^2$, also $\delta^2V=\int_{b\div a}(\delta\delta y)^2\cdot dx$ allemal positiv; daher ist für diesen Werth von y, die Länge V wirklich ein Minimum.

Beispiel 2. Hätte man nicht unter allen möglichen, sondern nur unter allen denen nächsten Nachbar-Kurven, welche durch dieselben, gegebenen oder nicht gegebenen Endpunkte hindurchgehen, die Kurve der vorhergehenden Aufgabe gesucht, so hätte man zwar δy beliebig, aber doch so sich denken müssen, daß $\delta y_a=\delta y_b=0$ ist. Dann wäre die Grenz-Gleichung 9.) von selbst erfüllt, und die Gleichung der gesuchten Linie wäre nun ausgedrückt gewesen durch

$$15)\quad y=Cx+c',$$

wo die Constanten C und c′ so lange unbestimmt bleiben, als sie nicht durch Neben-Bedingungen näher bestimmt werden.

Sind z. B. entweder die Endpunkte gegeben, oder sind überhaupt zwei Punkte (α, β) und (γ, δ) gegeben, durch welche diese Gerade hindurchgehen soll, so hat man zur Bestimmung dieser Constanten C und c′ die beiden Gleichungen

16) $$\beta = C\alpha + c' \quad \text{und} \quad \delta = C\gamma + c'.$$

Beispiel 3. Es wird in einer Ebene die **kürzeste** Linie $y = y_x$ gesucht, unter allen denjenigen nächsten Nachbar-Kurven, welche zwischen gegebenen, zu $x = a$ und $x = b$ gehörigen Ordinaten-Richtungen einerlei Inhalt haben.

Hier ist, wenn V wiederum die Länge der Kurve ausdrückt, abermals

1) $$V = \int_{b\div a} \sqrt{1 + y_x^2} \cdot dx;$$

aber dasmal ist δy nicht willkührlich, sondern δy muß dasmal der Bedingung genügen, daß

2) $$\int_{b\div a} y \cdot dx = \int_{b\div a} y_x \cdot dx \quad \text{d. h.} \quad \int_{b\div a} \delta y \cdot dx = 0$$

ist. Weil jedoch diese Bedingung 2.) für jede **Form** von δy sich erfüllen läßt (durch zweckmäßige Bestimmung einer einzigen in dieser Form vorhandenen Constante), so bleibt die allgemeine Gleichung des Maximums oder Minimums doch wieder dieselbe

$$y = Cx + c'.$$

Und weil selbst δy_a und δy_b von einander unabhängig bleiben, so bleiben die Grenz-Gleichungen wieder wie im Beispiel 1.), so daß $C = 0$ und

$$y = c'$$

wird. Diese Constante c′ bestimmt sich aber, wenn der Inhalt $\int_{b\div a} y \cdot dx$ ein gegebener und $= g$ ist; denn dies giebt die Gleichung

$$\int_{b\div a} y \cdot dx = \int_{b\div a} c' \cdot dx = c'b - c'a = c'(b-a) = g,$$

woraus $c' = \frac{g}{b-a}$ sich ergiebt.

Sollten die Grenz-Punkte aller nächsten Nachbar-Kurven mit denen der gesuchten Kurve zusammenfallen, wären aber selbige nicht gegeben, so wäre $\delta y_a = \delta y_b = 0$, und so hätte man wieder, wie im Beispiel 2.)

$$y = Cx + c';$$

und **eine** der Constanten bestimmte sich aus der Gleichung

$$\int_{b\div a} y \cdot dx = C(b^2 - a^2) + c'(b-a) = g,$$

während die andere Constante etwa noch dadurch bestimmt werden kann, daß man die Linie auch durch einen gegebenen Punkt (α, β) gehen läßt.

Beispiel 4. Man soll die Kurve finden, welche von $x = a$ an bis zu $x = b$ hin, die **kürzeste** ist, unter allen denjenigen nächsten Nachbar-Kurven, deren zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = x$ genommenen Inhalte ganz beliebig und unabhängig sich ändern, aber für $x = b$ einander gleich

erden, ſo daß dieſe Kurven zwiſchen $x=a$ und $x=b$ alle einerlei Inhalt haben.

Hier iſt die Ordinate y_x von dem Inhalte z_x abhängig und zwar mittelſt der Gleichung

$$\int_{x\div a} y_x \cdot dx = z_x, \quad \text{oder} \quad y_x = \partial(z_x)_x.$$

Es hängen daher dasmal δy, $\delta^2 y$, etc. von δz, $\delta^2 z$, etc. etc. ab, und letztere ſind die unabhängigen und willkührlichen. Wenn daher jetzt noch immer

$$\delta V = \int_{b\div a} \frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}} \cdot \delta\partial y \cdot dx$$

iſt, ſo gilt dieſe Gleichung doch nicht für jedes δy, ſondern nur für diejenigen δy, welche von δz mittelſt der aus

$$y = \partial z_x$$

hervorgehenden Gleichung

$$\delta y = \partial\delta z$$

abhängen. Man erhält daher, wenn man δy eliminirt,

$$\delta V = \int_{b\div a} \frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}} \cdot \partial^2\delta z \cdot dx.$$

Integrirt man nun hier zweimal hinter einander theilweiſe, ſo ergiebt ſich

$$\delta V = \left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}} \cdot \partial\delta z - \partial\left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right) \cdot \delta z\right)_{b\div a} + \int_{b\div a} \partial^2\left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right) \cdot \delta z \cdot dx.$$

Und die Gleichung $\delta V = 0$ zerfällt daher, weil nach der Vorausſetzung δz ganz beliebig und willkührlich gedacht werden kann, jetzt in die allgemeine Gleichung

$$\text{I.} \qquad \partial^2\left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right) = 0, \quad \text{alſo} \quad \frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}} = cx + c',$$

wo c und c' zwei durch dieſe letztern Integrationen eingegangene willkührliche Conſtanten ſind, und in die Grenz-Gleichung

$$\text{II.} \quad \left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right)_b \cdot \partial\delta z_b - \left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right)_a \cdot \partial\delta z_a - \partial\left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right)_b \cdot \delta z_b + \partial\left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right)_a \delta z_a = 0.$$

Löſt man die Gleichung I.) nach y_1 oder ∂y_x algebraiſch auf, ſo erhält man

$$\partial y_x = \frac{cx+c'}{\sqrt{1-(cx+c')^2}};$$

und hieraus, wenn man nach x links und rechts die Integrale nimmt,

$$y = c'' - \frac{1}{c} \cdot \sqrt{1-(cx+c')^2},$$

oder

$$(y-c'')^2 + \left(x+\frac{c'}{c}\right)^2 = \frac{1}{c^2}.$$

Dies ist die Gleichung der gesuchten Kurve. Sie stellt eine Kreislinie vor, deren Radius $\frac{1}{c}$ ist, und deren Mittelpunkt die Koordinaten-Werthe $-\frac{c'}{c}$ und c'' hat. Die drei, durch die Integration eingegangenen Constanten c, c′ und c″ erwarten nun aus der Grenz-Gleichung II.) ihre nähere Bestimmung.

Weil aber nach der Voraussetzung der Inhalt z von der Grenze, wo $x=b$ ist, unveränderlich seyn soll, so hat man aus

$$\int_{b\div a} y\cdot dx = \int_{b\div a} y_x\cdot dx \quad \text{noch} \quad \int_{b\div a}\delta y\cdot dx = \delta z_b - \delta z_a = 0.$$

Setzt man nun in die Grenz-Gleichung II.) statt y den gefundenen Werth in x, so wie δz_b statt δz_a, so reducirt sich solche bloß auf

$$(cb+c')\cdot\delta\delta z_b - (ca+c')\cdot\delta\delta z_a = 0.$$

Wird nun noch die Bedingung hinzugefügt, daß die gesuchte Kurve und alle nächsten Nachbar-Kurven, mit denen sie verglichen wird, durch dieselben gegebenen, zu $x=a$ und $x=b$ gehörigen Punkte hindurchgehen sollen, so hat man noch

$$\delta y_b = \delta y_a = 0, \quad \text{d. h.} \quad \delta\delta z_b = \delta\delta z_a = 0.$$

Die Grenz-Gleichung ist daher nun von selbst erfüllt, und die drei Constanten c, c′ und c″ können nun beliebig und so gewählt werden, daß noch dreien Nebenbedingungen genügt wird, z. B. daß die gefundene Kurve noch durch drei gegebene Punkte hindurchgeht.

§. 83.

Ist jedoch U eine solche Funktion, wie sie so eben im §. 82.) gedacht worden ist, und ist wiederum

$$1) \qquad V = \int_{b\div a} U\cdot dx;$$

sind dagegen die nächsten Nachbar-Werthe V_x, in Bezug auf welche die Funktion V ein Maximum oder ein Minimum werden soll, noch umfassender, — ist nämlich

$$2) \qquad V_x = \int_{b_x\div a_x} U_x\cdot dx,$$

so kommen zu dem δV des §. 82.) (nach §. 65., besonders aber nach Anmerkung zu §. 65.), die beiden Glieder

$$U_b\cdot\delta b - U_a\cdot\delta a$$

noch hinzu. Weil aber diese Glieder zu denen gehören, welche nicht unter dem Integral-Zeichen stehen, so zerfällt $\delta V = 0$ genau in dieselbe allgemeine Gleichung, wie im §. 82.), während zu der Grenz-Gleichung eben daselbst die beiden Glie-

der $U_b \cdot \delta b - U_a \cdot \delta a$ noch hinzutreten, um die hiesigen Gleichungen zu geben.

Beispiel 1. Es sind zwei Kurven ANB und DRF Fig. 24.) gegeben, bezüglich durch die Gleichungen

1) $y = \varphi_x$ und 2) $y' = \psi_{x'}$.

Man soll zwischen diesen Kurven die kürzeste Linie NMR finden.

Ist $y = y_x$ die Gleichung der gesuchten Kurve NMR, so sind die Abscissen-Werthe a und b der Grenzpunkte N und R dasmal selbst noch gesucht, weil diese Grenzpunkte zwar in den gegebenen Kurven liegen, aber so gesucht werden, daß eben NMR die kürzeste Linie zwischen diesen gegebenen Kurven wird. Werden nun die Ordinaten der nächsten Nachbar-Kurven durch y_x bezeichnet, so muß man auch die Abscissen-Werthe ihrer Grenzpunkte durch a_x und b_x ausdrücken; und wenn daher jetzt noch, wie im Beispiel 1. zu §. 82.)

$$V = \int_{b \div a} \sqrt{1 + \delta y_x^2} \cdot dx$$

ist, so hat man doch dasmal

$$V_x = \int_{b_x \div a_x} \sqrt{1 + \delta (y_x)_x^2} \cdot dx.$$

Die allgemeine Gleichung des Maximums und Minimums bleibt daher jetzt dieselbe wie dort, nämlich

I. $$\delta \left(\frac{y_1}{\sqrt{1 + y_1^2}} \right) = 0 \quad \text{oder} \quad y = Cx + c',$$

während zu der Grenz-Gleichung noch die Glieder

$$(\sqrt{1 + y_1^2})_b \cdot \delta b - (\sqrt{1 + y_1^2})_a \cdot \delta a$$

hinzutreten; so daß diese Grenz-Gleichung jetzt wird

II. $$\left(\frac{y_1}{\sqrt{1 + y_1^2}} \right)_b \cdot \delta y_b - \left(\frac{y_1}{\sqrt{1 + y_1^2}} \right)_a \cdot \delta y_a + (\sqrt{1 + y_1^2})_b \cdot \delta b - (\sqrt{1 + y_1^2})_a \cdot \delta a = 0.$$

Da nun $y_1 = \delta y_x = C$ ist, so wird diese Grenz-Gleichung jetzt

3) $$\frac{C}{\sqrt{1 + C^2}} \cdot \delta y_b - \frac{C}{\sqrt{1 + C^2}} \cdot \delta y_a + \sqrt{1 + C^2} \cdot \delta b - \sqrt{1 + C^2} \cdot \delta a = 0.$$

Nun hängen aber δa und δy_a vermöge der Gleichung 1.), nämlich $y = \varphi_x$ von einander ab, da diese Gleichung nicht bloß gelten soll, wenn a statt x, und y_a statt y, sondern auch noch, wenn a_x statt x und $(y_x)_{a_x}$ statt y gesetzt werden. Dies giebt die Gleichung

4) $$\delta y_a + \partial y_a \cdot \delta a = \partial \varphi_a \cdot \delta a^*),$$

wo ∂y_a und φ_a das bedeuten, was aus ∂y_x und φ_x hervorgeht, wenn man a ſtatt bezüglich x und x ſchreibt. — Aber eben aus demſelben Grunde hängen auch δb und δy_b von einander ab mittelſt der Gleichung

5) $$\delta y_b + \partial y_b \delta b = \partial \psi_b \cdot \delta b.$$

Subſtituirt man nun dieſe Werthe von δy_b und δy_a in die Grenz-Gleichung 3.), ſo geht ſolche über in

6) $$\left(\frac{C}{\sqrt{1+C^2}} \cdot (\partial \psi_b - \partial y_b) + \sqrt{1+C^2}\right) \cdot \delta b - \left(\frac{C}{\sqrt{1+C^2}} \cdot (\partial \varphi_a - \partial y_a) + \sqrt{1+C^2}\right) \cdot \delta a = 0.$$

Sind nun δb und δa von einander ganz unabhängig gedacht, ſo zerfällt dieſe Gleichung wieder in zwei Gleichungen, nämlich in

7) $$\frac{C}{\sqrt{1+C^2}} \cdot (\partial \psi_b - \partial y_b) + \sqrt{1+C^2} = 0$$

und

8) $$\frac{C}{\sqrt{1+C^2}} \cdot (\partial \varphi_a - \partial y_a) + \sqrt{1+C^2} = 0.$$

Da nun aus $y = Cx + c'$, $\partial y_x = C$, alſo $\partial y_b = \partial y_a = C$ hervorgeht, ſo werden dieſe letztern beiden Gleichungen in folgende übergehen, nämlich in

9) $C \cdot \partial \psi_b + 1 = 0$ und 10) $C \cdot \partial \varphi_a + 1 = 0.$

Da nun die Gleichung 1.) und die Gleichung 2.) für die Grenz-Werthe b und y_b $(= Cb + c')$ ſtatt finden muß, ſo geben dieſe noch

11) $Ca + c' = \varphi_a$ und 12) $Cb + c' = \psi_b.$

Aus den vier Gleichungen 9.—12.) beſtimmen ſich aber die vier Unbekannten C, c', a und b.

Die Form der Gleichungen 9.) und 10.) läßt noch ſehen (wegen I. Bd. §. 121. VI. und I. Bd. §.§. 170. 171.), daß die gefundene Gerade NR auf jeder der beiden gegebenen Kurven ſenkrecht ſteht.

Statt der erſtern Kurve, oder ſtatt der andern, kann auch bloß die Ordinaten-Richtung gegeben ſeyn. Dann geht bloß b in b_x über, während a nicht variirt, alſo $\delta a = 0$ iſt. Dann wird die Rechnung bei den Grenz-Gleichungen ein klein wenig anders. Man findet jetzt $C = 0$, und $y = c'$, und c' beſtimmt ſich ſo, daß die geſuchte Linie NR (Fig. 25.) auf der Or-

*) Es iſt dies die Gleichung, welche aus

$$(y_x)_{a_x} = \varphi_{a_x}$$

hervorgeht, wenn man ſolche einmal nach x differenziirt und dann $x = 0$ ſetzt.

dinaten-Richtung SS_1 und auf der gegebenen Kurve DRF zugleich ſenkrecht ſteht.

§. 84.

Enthält die Funktion U wiederum x, y und z und die Ableitungen von y und z nach x bis zu einer beliebigen Ordnung hin; iſt wiederum wie im §. 82.)

1) $V = \int_{b\div a} U \cdot dx$ und 2) $V_\varkappa = \int_{b\div a} U_\varkappa \cdot dx$,

ſind aber y und z von einander abhängig, mittelſt einer Differenzial-Gleichung

3) $L_{x,y,z,y_1,z_1,\text{etc. etc.}} = 0$,

wo y_1, z_1, etc. bezüglich die Ableitungen ∂y_x, ∂z_x, etc. etc. vorſtellen; ſo hat man zunächſt

4) $\delta V = \int_{b\div a} (\partial U_y \cdot \delta y + \partial U_z \cdot \delta z + \partial U_{y_1} \cdot \partial\delta y + \partial U_{z_1} \cdot \partial\delta z + \cdots) \cdot dx$,

oder, wenn man auf die beſchriebene Weiſe, durch theilweiſe Integration umformt

I. $\delta V = \int_{b\div a} \left\{ \begin{matrix} [\partial U_y - \partial(\partial U_{y_1}) + \cdots]\delta y \\ + [\partial U_z - \partial(\partial U_{z_1}) + \cdots]\delta z \end{matrix} \right\} \cdot dx + \left\{ \begin{matrix} \text{die übrigen v.} \\ \text{Integralzeich.} \\ \text{bereits befrei-} \\ \text{ten Glieder} \end{matrix} \right\}$.

Aus der Gleichung $\delta V = 0$ muß man aber nun, da wegen $L = 0$ $z_\varkappa$ von $y_\varkappa$, alſo δz von δy abhängig iſt, δz eliminiren, um die Gleichung zu bekommen, welche wegen der Willkührlichkeit von δy erſt gehörig zerfällt werden kann. Nun folgt zwar aus $L = 0$ noch $\delta L = 0$ d. h.

$$\partial L_y \cdot \delta y + \partial L_z \cdot \delta z + \partial L_{y_1} \cdot \partial\delta y + \partial L_{z_1} \cdot \partial\delta z + \cdots = 0;$$

man muß aber, um die Elimination ſtatt finden laſſen zu können, ſich der von Lagrange und Euler gebrauchten „Methode der Multiplikatoren" bedienen. Dieſe Methode iſt zwar dem Weſen nach diejenige Eliminations-Methode, „welche in der gemeinen Algebra unter dem Namen der franzöſiſchen oder der Bezout'ſchen Eliminations-Methode" beſchrieben wird, muß aber hier nachſtehende Modification erleiden, um ihren Zweck zu erfüllen.

Man multiplicirt nämlich die gegebene und auf Null gebrachte Gleichung

II. $L = 0$

mit einer ganz unbestimmt gelassenen Funktion λ von x, addirt das Produkt λL (welches = Null ist) zu U, um

III. $U = U + \lambda L$

zu erhalten, und setzt dann in der Gleichung I.) für δV, überall $U + \lambda L$ statt U, so daß man also eigentlich $\delta V = \int_{b \div a} (\delta U + \lambda \cdot \delta L) \cdot dx$ genommen hat. Hernach denkt man sich λ so bestimmt, daß in I.) der Koefficient von δz der Null gleich wird, also

IV. $\partial(U + \lambda L)_z - \partial(\partial(U + \lambda L)_{z_1}) + \cdots = 0.$

Diese Gleichung ist aber in Bezug auf λ eine Differenzial-Gleichung, welche, wenn y und z bekannt wären, integrirt gedacht werden kann, so daß sie λ mit noch einer Anzahl willkührlicher Constanten liefert. Diese Constanten kann man sich nun weiter so bestimmt denken, daß auch von den übrigen, außerhalb des Integral-Zeichens liegenden Gliedern, alle mit δz_a, δz_b, $\partial \delta z_a$, $\partial \delta z_b$, etc. etc. behafteten Glieder herausfallen (d. h. man setzt ihre Koefficienten gerade zu der Null gleich und bedient sich dieser Gleichungen zur völligen Bestimmung von λ). Weil aber dann in δV nur noch das völlig willkührliche δy (und nicht mehr δz) vorkommt, so zerfällt $\delta V = 0$ jetzt noch in die allgemeine Gleichung

V. $\partial(U + \lambda L)_y - \partial(\partial(U + \lambda L)_{y_1}) + \cdots = 0,$

und in die Grenz-Gleichungen. Die Gleichungen IV., V. und II.) sind nun drei Differenzial-Gleichungen zwischen y, z und λ, welche, integrirt, diese Funktionen von x mit der eingehenden Anzahl willkührlicher Constanten liefern. Diese letztern bestimmen sich aber aus allen den übrigen Gleichungen, in denen statt x bereits die Grenz-Werthe a und b gesetzt worden sind.

Es ist leicht diese Methode auf zusammengesetztere Fälle anzuwenden, wo V außer y, z, auch noch u, v, etc. etc. enthält, und wo außer $L = 0$, auch noch $M = 0$, etc. etc.

gegeben ist. Man nimmt dann $U+\lambda L+\mu M+\cdots$ statt U, in dem Ausdrucke für δV.

Dasselbe Verfahren muß man natürlich auch anwenden, wenn in der Aufgabe $V_x=\int_{b_x}^{a_x} U_x\cdot dx$ gedacht und dabei die übrigen hier vorstehenden Bedingungen gemacht seyn sollten, d. h. wenn die Grenzen a und b selbst nicht bestimmt gegeben, sondern noch so gesucht seyn sollten, daß eben gerade das Maximum oder Minimum eintreten kann.

Beispiel. In einer vertikalen Ebene sind zwei Punkte A und B gegeben (Fig. 26.). Man soll die Kurve der festen Bahn AMB finden, in welcher ein schwerer Punkt in der kürzesten Zeit von A nach B gelangt, unter der Voraussetzung, daß weder Reibung noch Widerstand der Luft noch sonst ein Hinderniß in Rechnung gebracht werden soll.

Es sey die Abscissen-Axe OX horizontal, OY vertikal; die Schwere $=g$; x und y seyen die Koordinaten eines Punktes M, z die Geschwindigkeit an M. Ferner seyen $OA_1=AA_2=a$, $OB_1=BB_2=b$ die Abscissen-Werthe der gegebenen Punkte A und B, so sind y_a und y_b die gegebenen Ordinaten-Werthe der Punkte A und B. Die Zeit, welche ein Minimum werden soll, bezeichne man durch V, so hat man nach den Gesetzen der Mechanik

$$V=\int_{b-a}\frac{\sqrt{1+\partial y_x^2}}{z}\cdot dx,$$

während zwischen z und y noch die Gleichung statt findet

$$L=z\cdot\partial z_x+g\cdot\partial y_x=0.$$

Man hat also dasmal

$$U=\frac{\sqrt{1+y_1^2}}{z},\quad L=z\cdot z_1+g\cdot y_1$$

$$\partial(U+\lambda L)_y=0;\quad \partial(U+\lambda L)_z=-\frac{\sqrt{1+y_1^2}}{z^2}+\lambda\cdot z_1;$$

$$\partial(U+\lambda L)_{y_1}=\frac{y_1}{z\sqrt{1+y_1^2}}+g\lambda\quad\text{und}\quad \partial(U+\lambda L)_{z_1}=\lambda z.$$

Die Gleichungen IV.) und V.) werden daher jetzt, weil noch

$$\lambda z_1-\partial(\lambda z)\quad\text{d. h.}\quad \lambda\cdot\partial z_x-\partial(\lambda z)_x=-z\cdot\partial\lambda$$

ist, die nachstehenden

$$-\frac{\sqrt{1+y_1^2}}{z^2}-z\cdot\partial\lambda=0,$$

und

$$-\partial\left(\frac{y_1}{z\sqrt{1+y_1^2}}+g\lambda\right)=0,$$

wo sich alle bloßen ∂ auf x beziehen.

Dies ſind alſo dasmal die allgemeinen Gleichungen, aus denen in Verbindung mit der 2.) λ, y und z durch Integration und mit willkührlichen Conſtanten gefunden werden. —

Es vereinfachen ſich aber die hier nöthigen Rechnungen ſehr, wenn man gleich von vorne herein y als den unabhängigen Veränderlichen einführt, und $z^2 = u$ ſetzt, und u in der Rechnung fortführt. Es wird dann, wenn man die gegebenen Grenzen $OB_2 = \alpha$ und $OA_2 = \beta$ ſetzt,

$$1) \qquad V = \int_{\beta}^{\alpha} \frac{\sqrt{1+\partial x_y^{\,2}}}{\sqrt{u}} \cdot dy$$

und

$$2) \qquad L = \partial u_y + 2g = 0.$$

Daraus folgt, weil ∂x_y durch x_1 und ∂u_y durch u_1 bezeichnet wird,

$$3) \qquad U = \frac{\sqrt{1+x_1^{\,2}}}{\sqrt{u}} \quad \text{und} \quad L = u_1 + 2g,$$

alſo

$$\partial(U+\lambda L)_x = 0; \quad \partial(U+\lambda L)_u = -\frac{\sqrt{1+x_1^{\,2}}}{2u\sqrt{u}};$$

$$\partial(U+\lambda L)_{x_1} = \frac{x_1}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{1+x_1^{\,2}}} \quad \text{und} \quad \partial(U+\lambda L)_{u_1} = \lambda.$$

Die Gleichungen IV.) und V.) werden daher jetzt

$$4) \quad -\frac{\sqrt{1+x_1^{\,2}}}{2u\cdot\sqrt{u}} - \partial\lambda = 0 \text{ d. h. } \frac{\sqrt{1+\partial x_y^{\,2}}}{2u\cdot\sqrt{u}} + \partial\lambda_y = 0,$$

$$5) \quad -\partial\left(\frac{x_1}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{1+x_1^{\,2}}}\right) = 0 \text{ oder } \partial\left(\frac{\partial x_y}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{1+\partial x_y^{\,2}}}\right)_{(y)} = 0,$$

wo ſich alle bloßen ∂ auf y beziehen.

Was die Grenz-Gleichungen betrifft, ſo ſind ſolche nach der Rechnung des §. 82. N. 5.) jetzt folgende, nämlich

$$(\partial(U+\lambda L)_{u_1})_\beta \cdot \partial u_\beta = 0 \quad \text{und} \quad (\partial(U+\lambda L)_{u_1})_\alpha \cdot \partial u_\alpha = 0;$$

denn es ſind ∂x_α und ∂x_β der Null gleich, weil x_α und x_β auch für alle die nächſten Nachbar-Kurven, mit denen die Geſuchte verglichen wird, dieſelben Werthe behalten (in ſo fern alle Kurven durch dieſelben Endpunkte A und B gehen ſollen); alſo fallen die mit ∂x_α und ∂x_β behafteten Glieder von ſelbſt heraus.

Dieſe Grenz-Gleichungen werden alſo jetzt

$$6) \qquad \lambda_\beta \cdot \partial u_\beta = 0 \qquad \text{und} \qquad 7) \quad \lambda_\alpha \cdot \partial u_\alpha = 0.$$

Nun muß man die Gleichungen 2.), 4.) und 5.) integriren, d. h. λ und u eliminiren, um zuletzt eine Gleichung zwiſchen y und x und den Ableitungen von x nach y zu erhalten. Weil aber die Gleichungen 2.) und 5.) bereits λ nicht enthalten, ſo braucht man aus 2.) und 5.) bloß noch

u,

u, δu_y, etc. zu eliminiren. Zu dem Ende müßte man eigentlich jede der beiden Gleichungen 2.) und 5.) noch einmal nach allem y differenziiren, um vier Gleichungen zu haben, aus denen die drei Veränderlichen u, δu_y und $\delta^2 u_y$ eliminirt werden können. Allein, weil ſich die 2.) und auch die 5.) nach allem y integriren laſſen, ſo kann man hier vorziehen, ſogleich zu integriren. Man erhält dann aus der 2.)

8) $$u = c - 2gy,$$

wo c eine willkührliche Conſtante iſt. Aus der 5.) erhält man dagegen

9) $$\frac{\delta x_y}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{1+\delta x_y^2}} = c',$$

wo c' eine zweite willkührliche Conſtante. Eliminirt man nun vollends u aus dieſen letztern beiden Gleichungen, ſo ergiebt ſich

10) $$\frac{\delta x_y^2}{(c-2gy)(1+\delta x_y^2)} = c'^2.$$

Löſt man dieſe Gleichung jetzt nach δx_y algebraiſch auf, ſo findet ſich δx_y, und daraus dann

11) $$x = \int\left(\frac{c'^2(c-2gy)}{1-c'^2(c-2gy)}\right)\cdot dy + c'',$$

wo c'' die dritte willkührliche Conſtante iſt. Dies iſt die Gleichung einer Cykloide, deren Erzeugungs-Kreis $\frac{1}{2c'^2g}$ zum Durchmeſſer hat.

Hat man aber auf dieſe Weiſe x in y gefunden, ſo löſt dieſe Gleichung 11.) in Verbindung mit der 8.), welche auch bereits u d. h. z^2 in y liefert, das Problem vollſtändig. Die drei Conſtanten c, c' und c'' beſtimmen ſich aus den Umſtänden, 1) daß für $y=\alpha$ $x=b$, und für $y=\beta$ $x=a$ werden muß, und endlich 2) daß für $y=\beta$ der Werth von z oder $\sqrt{u}$ in die gegebene Anfangs-Geſchwindigkeit übergehen muß.

Die Grenz-Gleichungen 6.) und 7.) ſind zum Theil von ſelbſt erfüllt, (in ſo fern $\delta u_\beta = 0$ iſt) oder dienen zur weiteren Beſtimmung der Hülfs-Funktion λ, haben alſo dasmal auf die weitere Löſung des Problems keinen Einfluß mehr *).

Anmerkung. Hierher gehören auch die Aufgaben, in denen ſogenannte „relative Maxima oder Minima" geſucht werden, d. h. in denen ein Integral V ein Maximum oder Minimum werden ſoll, unter allen V_n, für welche ein

*) Da ſich übrigens in dieſem Beiſpiele die Gleichung $L=0$ ſogleich integriren ließ; da man alſo hier ſogleich u in y haben konnte, ſo hätte man die Löſung dieſer Aufgabe einfacher noch nach einem der vorhergehenden Paragraphen behandelt.

anderer ähnlicher Integral-Ausdruck W conſtant bleiben ſoll; z. B. wenn unter allen Kurven von einerlei Inhalt, die des kleinſten Umfangs, — oder von allen Kurven, welche einerlei Umfang haben, die des größten Inhalts geſucht wird. — Man vgl. hiermit das Beiſpiel 4. zu §. 82.) und verſuche, daſſelbe auf dem gegenwärtigen Wege zu löſen, indem man dort $L = y - \partial z_x = 0$ hat.

Wir müſſen hier aber dieſe Unterſuchungen beſchließen und hinſichtlich des Weiteren auf das „Syſt. d. Math." Th. VII. Kap. XXI. und Anhang 2.) verweiſen.

Diejenigen der hieher gehörigen Aufgaben aber, in denen V keine Ur-Funktion, ſondern ein Integral, oder eine Funktion iſt, in welcher ein Integral (oder mehrere Integrale) noch vorkommt(en), haben aber in der Geſchichte der Mathematik den Namen der „iſoperimetriſchen Aufgaben" erhalten. — Ehe Lagrange (in dem dritten Bande der alten Turiner Memoiren) ſeinen „Calcul des Variations" mittheilte, konnte man ſolche Aufgaben nur ſehr unvollſtändig löſen, da das früher von Euler angewandte Verfahren die Grenz-Gleichungen nicht lieferte.

IX.

Höhere Analysis.

Fünfte Abtheilung.

Von den Differenz- und Summen-Reihen. Vom endlichen Differenziren und endlichen Integriren. Von der Interpolation und von der Summation der Reihen. Von den Fourier'schen Reihen.

Einleitung.

1) Man kann leicht die Bemerkung machen, daß wenn man von der Reihe der Quadrat-Zahlen

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, etc. etc.,

die Unterschiede je zweier nächst auf einander folgenden nimmt, diese Unterschiede

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, etc. etc.

eine sogenannte arithmetische Reihe, und zwar die Reihe der ungeraden Zahlen bilden. Aus dieser Reihe der Differenzen (Differenz-Reihe) kann man sich also die Reihe der Quadrat-Zahlen leicht durch bloße Addition zusammensetzen, indem man von der ersten 1 ausgeht, dann aber die übrigen (4, 9, 16, etc.) dadurch berechnet, daß man zu jedem bereits berechneten Gliede, das eben so vielte Glied der Differenz-Reihe addirt.

2) Nimmt man die Reihe der Kubik-Zahlen

I. 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, etc. etc.,

so bilden die Unterschiede je zweier auf einander folgender dieser Zahlen die Differenz-Reihe

II. 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, etc. etc.

Diese Differenz-Reihe befolgt kein so einfaches Gesetz, wie dies bei den Differenzen der Quadrat-Zahlen der Fall gewesen ist; nimmt man aber von je zweien nächst auf einander folgenden ihrer Glieder abermals die Differenzen, so erhält man diese „zweite Differenz-Reihe"

III. 12, 18, 24, 30, 36, 42, etc. etc.

und diese bildet eine arithmetische Reihe mit der Differenz 6.

Verlängert man nun diese arithmetische Reihe III.) immer weiter und weiter, indem man zu jedem vorhergehenden Glie de noch 6 addirt, so kann man auch die vorhergehende „erste Differenz-Reihe" II.) immer weiter und weiter verlängern, indem man zu jedem Gliede derselben das eben so vielte Glied ihrer Differenz-Reihe (III.) addirt. Dann aber kann man auch die Reihe I.) der Kubik-Zahlen dadurch immer weiter und weiter verlängern, daß man zu jedem schon bekannten ihrer Glieder, das eben so vielte Glied ihrer Differenz-Reihe (II.) addirt. — Hätte man aber eine Tafel aller Kubik-Zahlen anzufertigen, etwa von 1 bis 10000, so könnte man auf diesem Wege die Glieder derselben bloß durch fortgesetzte Addition, d. h. durch

fortgesetzte Verlängerung der Reihen III. II. und I.) auf dem so eben beschriebenen Wege erhalten; ein Verfahren, welches dem Kubiren der einzelnen Zahlen, besonders wenn letztere anfangen groß zu werden, bei weitem vorzuziehen ist *). — Dazu kommt noch, daß man einzelne entfernte dieser Kubik-Zahlen direkt berechnen kann, also die bequemste Controlle der Rechnung hat.

3) Man hat ferner bemerkt, daß wenn man von der Reihe der Logarithmen

$log\,n$, $log(n+1)$, $log(n+2)$, $log(n+3)$, $log(n+4)$, ...

wiederum ihre Differenz-Reihe bildet, und von dieser abermals die Differenz-Reihe, endlich von dieser nochmals die Differenz-Reihe, dann die Glieder dieser dritten Differenz-Reihe eine längere Zeit fort sehr nahe hin eine arithmetische Reihe bilden. Darauf hat man eine bequemere Berechnung der Logarithmen-Tafeln gegründet, indem man nach und nach die dritte, die zweite, die erste Differenz-Reihe durch fortgesetztes Addiren (wie solches für die Reihe der Kubik-Zahlen so eben beschrieben worden ist) nach Belieben verlängert, und zuletzt auf demselben Wege auch die Haupt-Reihe, d. h. die Reihe der Logarithmen der auf einander folgenden ganzen Zahlen verlängert. Dabei hat man bei den Logarithmen dadurch wieder eine Controlle der Rechnung, daß man die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen aus den Logarithmen ihrer Faktoren durch Addition noch einmal berechnen kann.

4) Die ähnliche Verfahrungs-Art kann man auch bei Berechnung von Sinus- und Kosinus-Tafeln anwenden, wie noch bei Berechnung vieler anderen Tabellen.

5) Es ist aber dazu nöthig, daß man eine nähere Kenntniß der Eigenthümlichkeiten der Ausdrücke, die tabellarisch berechnet werden sollen, in Bezug auf die Differenzen ihrer einzelnen Werthe besitze. Diese Kenntniß nun sollen die nächst folgenden Kapitel verschaffen.

---

*) Sind n und $n+1$ zwei nächst auf einander folgende ganze Zahlen, so sind ihre Würfel bezüglich n^3 und n^3+3n^2+3n+1; also ist der Unterschied dieser Würfel $=3n^2+3n+1$. Danach konnte man auch schon $(n+1)^3$ aus n^3 berechnen; allein die Rechnung erforderte doch noch ein Quadriren und Multipliciren, welches in der Ausführung sehr unangenehm und zeitraubend wird.

Eilftes Kapitel.

Von den allgemeinen Differenz- und Summen-Reihen, namentlich von dem Verhalten ihrer Glieder zu einander im Allgemeinen.

§. 85.

Erklärung der Differenz-Reihen.

Denkt man ſich beliebig viel beliebiger Ziffern- oder Buchſtaben-Ausdrücke, welche durch

$$\ldots, u_{r-2}, u_{r-1}, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, u_{r+3}, u_{r+4}, \ldots$$

bezeichnet ſeyn mögen, wo r eine beliebige poſitive oder negative ganze Zahl oder Null vorſtellt, während ſich links und rechts ſtatt der Punkte noch unendlich viele, auf analoge Weiſe bezeichnete Glieder befinden ſollen (welche aber auch zum Theil oder alle den Werth Null haben können); denkt man ſich aus dieſer Reihe von Gliedern, welche die Ur-Reihe genannt werden mag, neue Reihen von Gliedern gebildet, dadurch, daß man unter jedes Glied irgend einer Reihe, die Differenz zwiſchen dem nächſtfolgenden und dem genannten Gliede derſelben Reihe, als Glied der neuen Reihe ſetzt, ſo nennt man dieſe neuen Reihen bezüglich die erſte, zweite, dritte, etc. etc. Differenz-Reihe.

Denkt man ſich z. B. als Ur-Reihe die folgende,

$\ldots, 7, 9, 6, 11, 3, -7, 8, 14, -1, -3, \ldots$

ſo ſind die Differenz-Reihen folgende

I^te, $\ldots, 2, -3, 5, -8, -10, 15, 6, -15, -2, \ldots$

II^te, $\ldots, -5, 8, -13, -2, 25, -9, -21, 13, \ldots$

III^te, $\ldots, 13, -21, 11, 27, -34, -12, 34, \ldots$

u. ſ. w. f.

wo jedes Glied in jeder Reihe, z. B. −34 in der IIIten Reihe, erhalten worden, indem man das grade darüber stehende Glied (25) der nächst vorhergehenden Reihe von dem nächst folgenden (−9) derselben nächst vorhergehenden Reihe subtrahirte.

§. 86.

Bezeichnung der Glieder dieser Reihen.

Führt man die Zeichen Δu_s, $\Delta^2 u_s$, $\Delta^3 u_s$, $\cdots$ $\Delta^p u_s$ ein, vermöge der Definitionen, daß für jede positive oder negative ganze Zahl oder auch die Null, welche unter s gedacht werden mag, allemal

1) $\Delta u_s = u_{s+1} - u_s$ oder $u_{s+1} = u_s + \Delta u_s$;
2) $\Delta^2 u_s = \Delta u_{s+1} - \Delta u_s$ oder $\Delta u_{s+1} = \Delta u_s + \Delta^2 u_s$;
3) $\Delta^3 u_s = \Delta^2 u_{s+1} - \Delta^2 u_s$ oder $\Delta^2 u_{s+1} = \Delta^2 u_s + \Delta^3 u_s$;

und allgemein

(♂)$\cdots$ $\Delta^{p+1} u_s = \Delta^p u_{s+1} - \Delta^p u_s$ oder $\Delta^p u_{s+1} = \Delta^p u_s + \Delta^{p+1} u_s$

seyn soll, so kann man im Allgemeinen die Ur-Reihe und ihre zugehörigen Differenz-Reihen in nachstehendem Schema übersehen:

Ur-Reihe $\cdots$, u_{r-3}, u_{r-1}, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, u_{r+3}, $\cdots$
1te D. R. $\cdots$, Δu_{r-2}, Δu_{r-1}, Δu_r, Δu_{r+1}, Δu_{r+2}, Δu_{r+3}, $\cdots$
2te D. R. $\cdots$, $\Delta^2 u_{r-3}$, $\Delta^2 u_{r-1}$, $\Delta^2 u_r$, $\Delta^2 u_{r+1}$, $\Delta^2 u_{r+2}$, $\Delta^2 u_{r+3}$, $\cdots$
3te D. R. $\cdots$, $\Delta^3 u_{r-3}$, $\Delta^3 u_{r-1}$, $\Delta^3 u_r$, $\Delta^3 u_{r+1}$, $\Delta^3 u_{r+2}$, $\Delta^3 u_{r+3}$, $\cdots$
u. s. w. f.,

wo jedes Glied in jeder Reihe die Differenz vorstellt, die erhalten wird, wenn man das gerade darüber stehende Glied, von dem nächstfolgenden Gliede dieser nächst vorhergehenden Reihe subtrahirt.

Dabei zeigen die Gleichungen (1. 2. 3. ♂.) an, wie die unter u_s stehenden Glieder Δu_s, $\Delta^2 u_s$, $\Delta^3 u_s$, etc. etc. erhalten werden, während s jedoch alle möglichen Werthe vorstellt, die solches haben kann, nämlich Null oder jede positive oder negative ganze Zahl. Jede dieser eben angeführten Gleichungen ist daher der Repräsentant von beliebig viel Gleichungen, welche alle aus ihr hervorgehen, wenn man dem s nach und nach beliebig viele seiner Werthe giebt.

§. 87.

Erklärung der Summen-Reihen.

Man kann sich auch das Schema des §. 86.) aufwärts erweitert denken, indem man über die Ur-Reihe und über einander, neue Reihen setzt, nach dem Gesetze gebildet, daß jede dieser Reihen, als die erste Differenz-Reihe der zunächst über ihr stehenden Reihe angesehen werden kann. Bezeichnet man die Glieder dieser Reihen dadurch, daß man den Gliedern der Ur-Reihe nach und nach Δ^{-1}, Δ^{-2}, Δ^{-3}, etc. etc. vorsetzt, und nennt man diese neuen Reihen bezüglich die $(-1)^{te}$, $(-2)^{te}$, $(-3)^{te}$, etc. etc. Differenz-Reihe oder auch bezüglich die erste, zweite, dritte, etc. etc. Summen-Reihe, so lassen sich diese Summen- und Differenz-Reihen in folgendem Schema übersehen, nämlich:

$(-3)^{te}$ D. R. $\cdots, \Delta^{-3}u_{r-2}, \Delta^{-3}u_{r-1}, \Delta^{-3}u, \Delta^{-3}u_{r+1}, \Delta^{-3}u_{r+2}, \cdots$
$(-2)^{te}$ D. R. $\cdots, \Delta^{-2}u_{r-2}, \Delta^{-2}u_{r-1}, \Delta^{-2}u_r, \Delta^{-2}u_{r+1}, \Delta^{-2}u_{r+2}, \cdots$
$(-1)^{te}$ D. R. $\cdots, \Delta^{-1}u_{r-2}, \Delta^{-1}u_{r-1}, \Delta^{-1}u_r, \Delta^{-1}u_{r+1}, \Delta^{-1}u_{r+2}, \cdots$
Ur-Reihe $\cdots, u_{r-2}, u_{r-1}, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \cdots$
1te D. R. $\cdots, \Delta u_{r-2}, \Delta u_{r-1}, \Delta u_r, \Delta u_{r+1}, \Delta u_{r+2}, \cdots$
2te D. R. $\cdots, \Delta^2 u_{r-2}, \Delta^2 u_{r-1}, \Delta^2 u_r, \Delta^2 u_{r+1}, \Delta^2 u_{r+2}, \cdots$
u. s. w. f.;

wo die Reihen alle aus einander nach dem Gesetze gebildet gedacht sind, daß jedes Glied in jeder Reihe z. B. das Glied $\Delta^{-2}u_{r+1}$ erhalten wird, wenn das gerade darüber stehende Glied $\Delta^{-3}u_{r+1}$ der nächst vorhergehenden Reihe von dem nächst folgenden Gliede $\Delta^{-3}u_{r+2}$ derselben nächst vorhergehenden Reihe subtrahirt, also wenn

$$\Delta^{-2}u_{r+1} = \Delta^{-3}u_{r+2} - \Delta^{-3}u_{r+1}$$

genommen wird.

Das Bildungs-Gesetz aller Glieder in allen diesen Reihen aus einander, spricht sich also einzig und allein in der Gleichung des §. 86.), nämlich in der Gleichung

$$(\sigma)\cdots \qquad \Delta^{p+1}u_s = \Delta^p u_{s+1} - \Delta^p u_s$$

oder $$\Delta^p u_{s+1} = \Delta^p u_s + \Delta^{p+1} u_{s+1}$$

oder $$\Delta^p u_s = \Delta^p u_{s+1} - \Delta^{p+1} u_s$$

aus, wenn man ſolche gelten läßt, während nicht bloß s, ſondern auch p jede beliebige poſitive oder negative ganze Zahl bedeutet, oder auch die Null; ſobald man nur noch feſtſetzt, daß man die Glieder der Ur-Reihe auch noch durch

$$\cdots \Delta^0 u_{r-2},\ \Delta^0 u_{r-1},\ \Delta^0 u_r,\ \Delta^0 u_{r+1},\ \Delta^0 u_{r+2},\ \cdots$$

vorſtellen wolle, d. h. ſobald man nur noch $\Delta^0 u_s$ für gleichbedeutend hält mit u_s ſelbſt, und $\Delta^1 u_s$ für gleichbedeutend mit Δu_s.

§. 88.

Folgerungen.

Da jedes Glied in jeder Reihe, im Schema des §. 87.), die Differenz iſt zwiſchen zweien Gliedern der nächſt vorhergehenden Reihe, ſo folgt noch:

1) Sind die Glieder der Ur-Reihe gegeben, ſo ſind die Glieder aller poſitiven Differenz-Reihen ebenfalls völlig beſtimmt und gegeben; dagegen verlieren die Summen-Reihen (d. h. die negativen Differenz-Reihen) ihre Eigenſchaft nicht, wenn alle Glieder einer und derſelben Summen-Reihe um gleich viel vermehrt oder vermindert werden.

2) Irgend ein Glied einer jeden Summen-Reihe muß daher gegeben ſeyn, oder kann beliebig angenommen werden. Dann ſind aber alle übrigen Glieder derſelben Summen-Reihe durch die Gleichung ♂ des §. 87.), welche die Differenz zwiſchen je zwei auf einander folgenden Gliedern derſelben Summen-Reihe angiebt, völlig beſtimmt und gegeben.

3) Sollen daher die Glieder der q^{ten} Summen-Reihe

$$\cdots,\ \Delta^{-q} u_{r-2},\ \Delta^{-q} u_{r-1},\ \Delta^{-q} u_r,\ \Delta^{-q} u_{r+1},\ \cdots$$

völlig beſtimmt ſeyn, ſobald die Glieder der Ur-Reihe gegeben ſind, ſo muß man von jeder der q Summen-Reihen ein Glied gegeben haben oder beliebig annehmen, ſo daß die q^{te} Sum-

men-Reihe, außer ihrer Haupt-Eigenschaft, noch einer Anzahl q von Nebenbedingungen genügen kann.

Es ist aber ganz einerlei, ob man von jeder der q Summen-Reihen ein Glied gegeben hat, oder beliebig annimmt; oder ob man q nächst auf einander folgende Glieder von der q^{ten} Summen-Reihe selbst gegeben hat, oder beliebig annimmt. — Denn die q Glieder der q^{ten} Summen-Reihe bestimmen $q-1$ Differenzen, also $q-1$ Glieder der $(q-1)^{ten}$ Summen-Reihe, folglich $q-2$ Glieder der $(q-2)^{ten}$ Summen-Reihe, u. s. w. f., zuletzt 1 Glied in der ersten Summen-Reihe, und lassen die Glieder der Ur-Reihe selbst ganz und völlig unbestimmt, so daß letztere völlig beliebig gegeben seyn können.

4) Sind daher die Glieder der Ur-Reihe gegeben, und noch q Glieder der q^{ten} Summen-Reihe ebenfalls gegeben oder beliebig angenommen, so sind die übrigen Glieder der q^{ten} Summen-Reihe, und deshalb auch alle Glieder aller niedrigern (der $q-1^{ten}$, $q-2^{ten}$, ... 3ten, 2ten, 1ten) Summen-Reihen völlig bestimmt und gegeben.

Die q Glieder der q^{ten} Summen-Reihe, welche mit den Gliedern der Ur-Reihe nicht zugleich gegeben sind, sondern welche entweder willkührlich angenommen oder so bestimmt werden können, daß diese q^{te} Summen-Reihe noch einer Anzahl q von Nebenbedingungen genügt, nennt man zuweilen auch „die in die q^{te} Summen-Reihe eingehenden q willkührlichen Constanten.

5) Obgleich die Gleichung des §. 87.), nämlich:

$$(\delta')\cdots \qquad \Delta^{p+1}u_s = \Delta^p u_{s+1} - \Delta^p u_s$$

oder

$$\Delta^p u_{s+1} = \Delta^p u_s + \Delta^{p+1}u_s$$

oder

$$\Delta^p u_s = \Delta^p u_{s+1} - \Delta^{p+1}u_s,$$

die einzige Gleichung ist, welche man hat, um das Bildungs-Gesetz aller Glieder dieser Reihen im Schema des §. 87.) ganz und vollkommen ausgesprochen zu haben, so darf man doch nicht übersehen, daß diese Gleichung δ'.) der Repräsentant ist von un-

endlich (mal unendlich) vielen Gleichungen, welche alle aus ihr hervorgehen, indem man statt s alle positiven und alle negativen ganzen Zahlen oder Null setzt, — für jeden bestimmten Werth von s aber, auch statt p wieder nach und nach jede ganze positive, jede ganze negative Zahl und die Null gesetzt sich denkt.

Diese (unendlich mal) unendlich vielen einzelnen Gleichungen lassen sich aber nachher wieder mit einander verbinden zu neuen Gleichungen in beliebiger Menge.

So kann man unter einander schreiben die verschiedenen Glieder einer der Reihen, ausgedrückt in die Differenzen der Glieder der nächst vorhergehenden Reihe, nämlich:

$$\begin{aligned}
\Delta^{p+1}u_r &= \Delta^p u_{r+1} - \Delta^p u_r,\\
\Delta^{p+1}u_{r+1} &= \Delta^p u_{r+2} - \Delta^p u_{r+1},\\
\Delta^{p+1}u_{r+2} &= \Delta^p u_{r+3} - \Delta^p u_{r+2},\\
\Delta^{p+1}u_{r+3} &= \Delta^p u_{r+4} - \Delta^p u_{r+3},\\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots\\
\Delta^{p+1}u_{r+n-1} &= \Delta^p u_{r+n} - \Delta^p u_{r+n-1}.
\end{aligned}$$

Dann kann man diese Gleichungen alle zu einander addiren, so daß man links die Summe von n Gliedern der einen Reihe erhält, während sich rechts alle Zwischen-Glieder aufheben, und nur die Differenz der, um n Glieder von einander entfernten Glieder der vorhergehenden Reihe erscheint, nämlich:

$$\Delta^{p+1}u_r + \Delta^{p+1}u_{r+1} + \Delta^{p+1}u_{r+2} + \cdots + \Delta^{p+1}u_{r+n-1} = \Delta^p u_{r+n} - \Delta^p u_r.$$

Diese Gleichung enthält folgende Wahrheit:

6) Im Schema des §. 87.) ist die Summe von n auf einander folgenden Gliedern einer jeden der Reihen, ausgedrückt durch ein einziges Glied der über ihr stehenden Reihe, welches dem, gerade über dem n^{ten} der summirten Glieder stehenden Gliede in der nächst vorhergehenden Reihe zunächst zur Rechten liegt, wenn man nur davon noch eine zu bestimmende Constante subtrahirt. Diese Constante ist aber dem Gliede derselben Reihe

gleich, welches gerade über dem ersten der summirten Glieder steht. — Man sieht auf diese Weise den Namen der Summen-Reihen, für die rückwärts gebildeten Reihen gerechtfertigt.

Anmerkung. Unsere nächste Aufgabe ist es aber, die für die Anwendung wichtigsten neuen Gleichungen, welche aus der Verbindung der aus

$$\Delta^{p+1}u_s = \Delta^p u_{s+1} - \Delta^p u_s$$

hervorgehenden (unendlich mal) unendlich vielen einzelnen Gleichungen sich ergeben, herzustellen. Um nun dieses auf die bequemste Weise zu bewerkstelligen, wollen wir zunächst einen auf unsere Bezeichnungsweise gegründeten einfachen Algorithmus dazu bemerklich machen.

§. 89.

Algorithmus zur einfachen und bequemen Bildung der Gleichungen zwischen den Gliedern der verschiedenen Reihen.

1) Betrachtet man irgend eine der Reihen im Schema des §. 87.) als eine Ur-Reihe, so sind alle unter ihr stehenden oder folgenden Reihen ihre (positiven) Differenz-Reihen, und alle über ihr stehenden oder vorhergehenden, ihre Summen-Reihen oder negativen Differenz-Reihen. — Betrachtet man namentlich die p^{te} Differenz-Reihe

$$\cdots, \Delta^p u_{r-2}, \quad \Delta^p u_{r-1}, \quad \Delta^p u_r, \quad \Delta^p u_{r+1}, \quad \Delta^p u_{r+2}, \cdots$$

als eine Ur-Reihe, so sind die $p \pm 1^{ten}$, $p \pm 2^{ten}$, $p \pm 3^{ten}$ u. s. w. f. Differenz-Reihen, zu gleicher Zeit auch bezüglich die $(\pm 1)^{te}$, $(\pm 2)^{te}$, $(\pm 3)^{te}$, etc. etc. Differenz-Reihe der p^{ten}, letztere als Ur-Reihe gedacht. — Und dies gilt, es mag p eine positive oder eine negative ganze Zahl seyn, oder auch Null.

2) Deshalb müssen alle Gleichungen zwischen den Gliedern einer Ur-Reihe und denen ihrer (positiven oder negativen) Differenz-Reihen, eben so statt finden, wenn man statt der Glieder der Ur-Reihe bezüglich die gleichnamigen*) Glieder ihrer

*) Gleichnamig nennen wir die Glieder in den verschiedenen Reihen des Schema des §. 87.) welche daselbst genau unter einander stehen; also in denen die u, Δu, etc. alle einerlei Zeiger (rechts unten) anzuhängen haben.

p^ten Differenz-Reihe (wo p eine beliebige poſitive oder negative ganze Zahl vorſtellt), dagegen zu gleicher Zeit ſtatt der Glieder der $(\pm 1)^{ten}$, $(\pm 2)^{ten}$, $(\pm 3)^{ten}$, etc. etc. Differenz-Reihe, bezüglich die gleichnamigen Glieder der $(p\pm 1)^{ten}$, $(p\pm 2)^{ten}$, $(p\pm 3)^{ten}$, etc. etc. Differenz-Reihe ſubſtituirt; d. h. wenn man jedes Glied in der Gleichung von der Form $\Delta^r u_s$ in $\Delta^{p+r} u_s$ umwandelt.

3) Alſo erhält man aus jeder zwiſchen den Gliedern der Ur-Reihe und ihren (poſitiven oder negativen) Differenz-Reihen gegebenen Gleichung, eine neue und wiederum richtige Gleichung, wenn man die erſtere gleichſam mit Δ^p multiplicirt, wo p jede beliebige poſitive oder negative ganze Zahl oder auch die Null vorſtellt, wenn man nur dann ſtatt der Ausdrücke von der Form $\Delta^p \cdot \Delta^r u_s$ ſogleich $\Delta^{p+r} u_s$ ſchreibt, d. h. wenn man nur Δ^p, Δ^r, etc. etc. als Potenzen behandelt, in denen die Zeiger p, r, etc. etc. als ihre Exponenten angeſehen werden, zuletzt aber darauf ſieht, daß man wiederum Glieder der Reihen (z. B. $\Delta^{p+r} u_s$) habe.

4) Aber eben ſo deutlich fällt in die Augen, daß man aus jeder, zwiſchen den Gliedern der Ur-Reihe und denen ihrer (poſitiven oder negativen) Differenz-Reihen gegebenen Gleichung, eine neue richtige Gleichung erhält, wenn man in der erſtern Gleichung alle an den verſchiedenen Gliedern rechts unten (an u, Δu, etc. etc.) ſtehenden Zeiger um gleich viel vermehrt oder vermindert; d. h. wenn man die erſtere Gleichung gleichſam mit u_q multiplicirt (wo q jede beliebige poſitive oder negative ganze Zahl oder auch die Null vorſtellt), ſobald man nur zu gleicher Zeit die dadurch entſtehenden Ausdrücke von der Form

$$u_q \cdot u_r, \quad \text{oder} \quad u_q \cdot \Delta^p u_r$$

augenblicklich in

$$u_{q+r}, \quad \text{oder} \quad \Delta^p u_{q+r}$$

umwandelt, alſo u_q, u_r, etc. etc. als Potenzen behandelt, deren Exponenten durch die Zeiger q, r, etc. etc. vorgeſtellt ſind; zuletzt aber darauf ſieht, daß man wiederum Glieder der Reihen habe.

Dieſes Vermehren oder Vermindern aller Zeiger in einer ſolchen Gleichung um gleichviel, iſt deshalb erlaubt, weil auch in allen den einfachen, aus der Gleichung σ^r des §. 87.) hervorgehenden Gleichungen, welche allein zur Bildung der gegebenen Gleichung beigetragen haben können, alle Zeiger um gleichviel vermehrt oder vermindert werden dürfen, in ſo fern in dieſer angeführten Gleichung

$$\Delta^{p+1}u_s = \Delta^p u_{s+1} - \Delta^p u_s$$

der Zeiger s jeden möglichen Werth annehmen kann, welcher Null oder eine poſitive oder eine negative ganze Zahl iſt.

§. 90.

Fortſetzung der Principien des hieſigen Algorithmus.

Aus dieſen Grund-Prinzipien des von uns hier aufgeſuchten Algorithmus geht aber ſogleich noch weiter hervor:

1) Eine ſolche gegebene Gleichung zwiſchen Gliedern des Schema des §. 87.) kann mit $\Delta^\alpha u_a$ multiplicirt werden (wo α und a Null oder beliebige poſitive oder negative ganze Zahlen vorſtellen), wenn man $\Delta^\alpha u_a$ als ein Produkt aus Δ^α und u_a anſieht, und alle Ausdrücke von der Form Δ^α und Δ^r, oder u_a und u_s ſo lange als Potenzen behandelt (in denen die Zeiger α, r, oder a, s die Stelle der Exponenten vertreten), bis in den einzelnen Gliedern der neuen Gleichung wiederum die Zeichen gebildet ſind, welche Glieder der, im Schema befindlichen Reihen vorſtellen.

2) Eine ſolche Gleichung kann auch mit Ausdrücken von der Form

$$A\cdot\Delta^\alpha + B\cdot\Delta^\beta + C\cdot\Delta^\gamma + \ldots + P$$

oder $$A\cdot u_\alpha + B\cdot u_\beta + C\cdot u_\gamma + \ldots + P$$

oder $$A\cdot\Delta^\alpha u_a + B\cdot\Delta^\beta u_b + C\cdot\Delta^\gamma u_c + \ldots + P$$

multiplicirt werden; — wenn man nur dieſelbe in 1.) beſchriebene Vorſicht und Regel anwendet, ſo wird die neue Gleichung

auch allemal eine richtige Gleichung zwischen den Gliedern der Ur-Reihe und der (positiven oder negativen) Differenz-Reihen seyn. — Dabei können α, β, γ, etc., a, b, c, etc. etc. beliebige positive oder negative ganze Zahlen oder auch Null seyn, während A, B, C, etc. P ganz beliebige Koeffizienten vorstellen.

§. 91.

Anwendungen dieses Algorithmus.

Vermittelst dieses Algorithmus lassen sich nun sogleich folgende Gleichungen erhalten:

1) Geht man nämlich von

$$u_{r+1} = u_r + \Delta u_r = (1+\Delta)\cdot u_r$$

aus, und multiplicirt man solche und jede neu entstehende Gleichung fortwährend mit u_1, so erhält man

$$\begin{aligned} u_{r+2} &= (1+\Delta)\cdot u_{r+1} \\ u_{r+3} &= (1+\Delta)\cdot u_{r+2} \\ &\vdots \\ \text{und zuletzt} \quad u_{r+n} &= (1+\Delta)\cdot u_{r+n-1}. \end{aligned}$$

Eliminirt man nun aus diesen n Gleichungen die Glieder u_{r+1} bis u_{r+n-1} dadurch, daß man diese Gleichungen mit einander multiplicirt und rechts und links durch die gemeinschaftlichen Faktoren dividirt, so erhält man *)

I.

*) Man kann auch so verfahren: die Gleichung

$$(1+\Delta)u_r = u_{r+1}$$

multiplicire man nach §. 90. N. 2.) mit $1+\Delta$, so erhält man

$$(1+\Delta)^2 u_r = (1+\Delta)u_{r+1}.$$

Multiplicirt man aber dieselbe erstere Gleichung mit u_1, so ergiebt sich

$$(1+\Delta)\cdot u_{r+1} = u_{r+2}.$$

Daraus aber, wenn man die beiden letztern Gleichungen mit einander vergleicht, folgt

$$(1+\Delta)^2 u_r = u_{r+2}.$$

Multiplicirt man diese wieder mit $1+\Delta$, die vorhergehende mit u_1, und vergleicht beide, so ergiebt sich

$$(1+\Delta)^3 u_r = u_{r+3}.$$

u. s. w. f.

I. $\begin{cases} u_{r+n} = (1+\Delta)^n \cdot u_r = S[n_a \cdot \Delta^a u_r] \text{ *)}, \\ \text{wo } a \text{ nach und nach } 0 \text{ und jede positive ganze Zahl vorstellt, d. h.} \\ u_{r+n} = u_r + n \cdot \Delta u_r + n_2 \cdot \Delta^2 u_r + n_3 \cdot \Delta^3 u_r + \cdots + n_n \cdot \Delta^n u_r; \end{cases}$

wo n eine positive ganze Zahl bedeutet, während r jede positive, oder jede negative ganze Zahl seyn kann oder auch Null. Die Zeichen $n_1, n_2, n_3, n_4, \cdots n_a, \cdots$ sind dabei, wie sich von selbst versteht, Binomial-Koefficienten, so daß z. B. n_4 den Quotienten $\frac{n^{\underline{4}|-1}}{4!}$ d. h. $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ vorstellt.

2) Geht man aber von derselben Gleichung aus wie in 1.), schreibt man dieselbe aber in dieser andern Form

$$\Delta u_r = u_{r+1} - u_r = (u_1 - 1) \cdot u_r,$$

und multiplicirt man diese Gleichung fortwährend mit Δ, so erhält man nach und nach die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta^2 u_r &= (u_1 - 1) \cdot \Delta u_r \\ \Delta^3 u_r &= (u_1 - 1) \cdot \Delta^2 u_r \\ &\vdots \\ \text{und zuletzt } \Delta^n u_r &= (u_1 - 1) \cdot \Delta^{n-1} u_r. \end{aligned}$$

Multiplicirt man nun alle diese n Gleichungen mit einander, um durch Division der gemeinschaftlichen Faktoren links und rechts Δu_r, $\Delta^2 u_r$, $\cdots$ $\Delta^{n-1} u_r$ zu eliminiren, so erhält man zuletzt **)

---

*) Der binomische Lehrsatz §. 38. d. I. Bds. läßt sich nämlich so schreiben:

$$(1+b)^n = S[n_a \cdot b^a]$$

wenn unter n_a verstanden wird $\frac{n^{\underline{a}|-1}}{a!}$ oder $\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-a+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots a}$, wenn statt a nach und nach gesetzt wird Null, und alle positiven ganzen Zahlen, und wenn das vorgesetzte S ausdrückt, daß die Summe aller der für diese verschiedenen Werthe von a hervorgehenden Glieder genommen werden soll.

**) Auch hier könnte man wieder so verfahren: die erstere Gleichung

$$\Delta u_r = (u_r - 1) u_r$$

II. $\begin{cases} \Delta^n u_r = (u_1 - 1)^n \cdot u_r = S[(-1)^a \cdot n_a \cdot u_{r+n-a}], \\ \text{wo } a \text{ nach und nach } 0 \text{ und alle positiven ganzen Zahlen vorstellt; d. h.} \\ \Delta^n u_r = u_{r+n} - n_1 \cdot u_{r+n-1} + n_2 \cdot u_{r+n-2} - \cdots \pm n_n \cdot u_r, \end{cases}$

wo alle Zeichen dieselbe Bedeutung wie in N. 1.) haben.

3) Geht man endlich noch einmal von derselben Gleichung aus, wie in 1.), schreibt man dieselbe aber jetzt in dieser dritten noch möglichen Form, nämlich

$$u_{r-1} = u_r - \Delta u_{r-1} = u_r \cdot (1 - \Delta u_{-1}),$$

indem man zugleich $r-1$ statt r gesetzt hat, so hat man noch

$$\begin{aligned} u_{r-2} &= u_{r-1} \cdot (1 - \Delta u_{-1}) \\ u_{r-3} &= u_{r-2} \cdot (1 - \Delta u_{-1}) \\ &\vdots \\ u_{r-n} &= u_{r-(n-1)} \cdot (1 - \Delta u_{-1}). \end{aligned}$$

Multiplicirt man nun alle diese Gleichungen mit einander, und dividirt man links und rechts durch die gemeinschaftlichen Faktoren wieder weg, so ergiebt sich noch:

III. $\begin{cases} u_{r-n} = (1 - \Delta u_{-1})^n \cdot u_r = S[(-1)^a \cdot n_a \cdot \Delta^a u_{r-a}], \\ \text{d. h.} \\ u_{r-n} = u_r - n_1 \cdot \Delta u_{r-1} + n_2 \cdot \Delta^2 u_{r-2} - n_3 \cdot \Delta^3 u_{r-3} + \cdots \\ \qquad \pm n_{n-1} \cdot \Delta^{n-1} u_{r-(n-1)} \mp n_n \cdot \Delta^n u_{r-n}. \end{cases}$

Dies sind also die drei zusammengesetztern Relationen, zu denen man unmittelbar gelangt, wenn man von jeder der drei Formen der Gleichung §. 87. ♂.) ausgeht.

---

multiplicire man zuerst mit Δ, dann mit $u_r - 1$; und man erhält

$$\Delta^2 u_r = (u_r - 1) \cdot \Delta u_r;$$

$$(u_r - 1)\Delta u_r = (u_r - 1)^2 \cdot u_r.$$

Folglich, wenn man diese beiden Gleichungen mit einander vergleicht, zeigt sich

$$\Delta^2 u_r = (u_r - 1)^2 \cdot u_r.$$

Wird nun diese Gleichung wiederum mit Δ, die vorhergehende Gleichung aber mit $u_r - 1$ multiplicirt, und werden die Resultate gerade so verglichen, so ergiebt sich sogleich

$$\Delta^3 u_r = (u_r - 1)^3 \cdot u_r;$$

u. s. w. f.

4) Multiplicirt man die I.) noch mit Δ^p, so findet sich noch

1.) $$\Delta^p u_{r+n} = (1+\Delta)^n \cdot \Delta^p u_r = S[n_a \cdot \Delta^{p+a} u_r] .$$
$$= \Delta^p u_r + n_1 \cdot \Delta^{p+1} u_r + n_2 \cdot \Delta^{p+2} u_r + \cdots$$
$$+ n_n \cdot \Delta^{p+n} u_r .$$

Multiplicirt man aber die II.) noch mit Δ^p, so findet sich

1.) $$\Delta^{p+n} u_r = (u_1 - 1)^n \cdot \Delta^p u_r = S[(-1)^a \cdot n_a \cdot \Delta^p u_{r+n-a}]$$
$$= \Delta^p u_{r+n} - n_1 \cdot \Delta^p u_{r+n-1} + n_2 \cdot \Delta^p u_{r+n-2} - \cdots$$
$$\pm n_n \cdot \Delta^p u_r .$$

Multiplicirt man endlich die III.) ebenfalls noch mit Δ^p, findet sich

1.) $$\Delta^p u_{r-n} = (1 - \Delta u_{-1})^n \cdot \Delta^p u_r = S[(-1)^a \cdot n_a \cdot \Delta^{p+a} u_{r-a}]$$
$$= \Delta^p u_r - n_1 \cdot \Delta^{p+1} u_{r-1} + n_2 \cdot \Delta^{p+2} u_{r-2} - \cdots$$
$$\pm n_n \cdot \Delta^{p+n} u_{r-n} .$$

5) Die Gleichungen I. und I. 1.) drücken das $(r+n)^{te}$ lied irgend einer der Reihen, in die r^{ten} Glieder derselben eihe und ihrer n nächsten positiven Differenz-Reihen aus*); so auch das $(n+1)^{te}$ Glied irgend einer Reihe, in das erste lied derselben Reihe und in die ersten Glieder ihrer n nächn Differenz-Reihen.

Die Gleichungen III. und III. 1.) dagegen drücken das $-n)^{te}$ Glied irgend einer Reihe in das r^{te} Glied derselben eihe und in die nach und nach immer mehr zurückliegenden lieder ihrer nächsten n Differenz-Reihen aus.

Die Gleichungen II. und II. 1.) endlich drücken das r^{te} lied irgend einer n^{ten} Differenz-Reihe, in $n+1$ nächst auf ander folgende Glieder ihrer n^{ten} Summen-Reihe (letztere

*) Der Bequemlichkeit wegen verstehen wir hier unter dem r^{ten} Gliede jenige, welches den Zeiger r hat, also u_r, Δu_r, $\Delta^2 u_r$, etc. etc. Unter n $(r+n)^{ten}$ Gliede verstehen wir daher in den verschiedenen Reihen die ieder, welche den Zeiger $r+n$ haben, also die Glieder u_{r+n}, Δu_{r+n}, u_{r+n}, etc. etc.

als Ur-Reihe gedacht) aus, vom r^{ten} ab bis zum $(r+n)^{ten}$ Gliede hin. Sie drücken alſo auch das erſte Glied irgend einer n^{ten} Differenz-Reihe in die $n+1$ erſten Glieder ihrer n^{ten} Summen-Reihe (letztere als Ur-Reihe gedacht) aus.

6) Dieſes alles gilt aber nur, ſo lange n eine poſitive ganze Zahl iſt, während r und p jede poſitive und jede negative ganze Zahl vorſtellen können und auch die Null.

Um ähnliche Reſultate auch für ein negatives ganzes n zu erhalten, verfährt man wie der nächſte Paragraph zeigt.

§. 92.

Da man nach §§. 89. und 90.) eine Gleichung zwiſchen den Gliedern einer Ur-Reihe und ihren (poſitiven oder negativen) Differenz-Reihen, auch mit $(1-\Delta u_{-1})^{-n}$, $(u_1-1)^{-n}$ oder mit $(1+\Delta)^{-n}$ multipliciren kann, wenn man nur

unter $(1-\Delta u_{-1})^{-n}$ die Reihe

$1-n\cdot\Delta u_{-1}+(n+1)_2\cdot\Delta^2 u_{-2}-(n+2)_3\cdot\Delta^3 u_{-3}+\cdots$ in inf.,

unter $(u_1-1)^{-n}$ die Reihe

$u_{-n}+n_1\cdot u_{-n-1}+(n+1)_2\cdot u_{-n-2}+(n+2)_3\cdot u_{-n-3}+\cdots$ in inf.,

und unter $(1+\Delta)^{-n}$ die Reihe

$1-n\cdot\Delta+(n+1)_2\cdot\Delta^2-(n+2)_3\cdot\Delta^3+(n+3)_4\cdot\Delta^4-\cdots$ in inf.,

verſteht, welche der binomiſche Lehrſatz dafür liefert, ſo kann man auf dieſem Wege aus den Formeln des §. 91. I. und II.) noch leicht folgende Formeln ableiten:

A. Nimmt man die Gleichung I.), nämlich:

1) $$u_{r+n}=(1+\Delta)^n\cdot u_r,$$

und multiplicirt man ſolche mit der unendlichen Reihe von Gliedern, die durch $(1+\Delta)^{-n}$ ausgedrückt ſind, ſo erhält man ſogleich

2) $$(1+\Delta)^{-n}\cdot u_{r+n}=u_r,$$

oder, wenn man mit u_{-n} multiplicirt,

$$\text{IV.}\quad \begin{cases} u_{r-n} = (1+\Delta)^{-n} u_r = S[(-1)^a (n+a-1)_a \cdot \Delta^a u_r], \\ \text{d. h.} \\ u_{r-n} = u_r - n_1 \cdot \Delta u_r + (n+1)_2 \cdot \Delta^2 u_r - (n+2)_3 \cdot \Delta^3 u_r \\ \qquad + (n+3)_4 \cdot \Delta^4 u_r - \cdots \text{ in inf.}, \end{cases}$$

wodurch das $(r-n)^{te}$ Glied irgend einer Reihe in das r^{te} Glied derselben Reihe und in die r^{ten} Glieder aller ihrer Differenz-Reihen, bis in's Unendliche fort, ausgedrückt zu seyn scheint.

B. Nimmt man die Gleichung II.), nämlich

1) $$\Delta^n u_r = u_r \cdot (u_1 - 1)^n,$$

und multiplicirt man solche mit der unendlichen Reihe von Gliedern, die durch $(u_1-1)^{-n}$ ausgedrückt ist, so erhält man

2) $$(u_1-1)^{-n} \cdot \Delta^n u_r = u_r;$$

oder, wenn man diese Gleichung noch mit Δ^{-n} multiplicirt,

$$\text{V.}\quad \begin{cases} \Delta^{-n} u_r = u_r \cdot (u_1-1)^{-n} = S[(n+a-1)_a \cdot u_{r-n-a}], \\ \text{d. h.} \\ \Delta^{-n} u_r = u_{r-n} + n_1 \cdot u_{r-n-1} + (n+1)_2 \cdot u_{r-n-2} \\ \qquad + (n+2)_3 \cdot u_{r-n-3} + \cdots \text{ in inf.}, \end{cases}$$

wodurch das r^{te} Glied der n^{ten} Summen-Reihe in unendlich viele Glieder der Ur-Reihe, vom $r-n^{ten}$ Gliede rückwärts gehend, ausgedrückt zu seyn scheint.

C. Multiplicirt man endlich die Gleichung III.), nämlich

1) $$u_{r-n} = (1-\Delta u_{-1})^n \cdot u_r,$$

mit $(1-\Delta u_{-1})^{-n}$, so erhält man

2) $$(1-\Delta u_{-1})^{-n} \cdot u_{r-n} = u_r,$$

oder, wenn man diese Gleichung noch mit u_n multiplicirt,

$$\text{VI.}\quad \begin{cases} u_{r+n} = (1-\Delta u_{-1})^{-n} \cdot u_r = S[(n+a-1)_a \cdot \Delta^a u_{r-a}] \\ \text{d. h.} \\ u_{r+n} = u_r + n_1 \cdot \Delta u_{r-1} + (n+1)_2 \cdot \Delta^2 u_{r-2} \\ \qquad + (n+2)_3 \cdot \Delta^3 u_{r-3} + \cdots \text{ in inf.}, \end{cases}$$

wodurch das $(r+n)^{te}$ Glied irgend einer Reihe in unendlich viele Glieder der Differenz-Reihen, unendlich weit rückwärts gehend, ausgedrückt zu seyn scheint.

D. Multiplicirt man aber diese hiesigen Gleichungen IV., V., VI.) noch mit Δ^p, wo p eine positive oder negative ganze Zahl oder Null bedeutet, während n immer eine ganze positive Zahl ist, so erhält man noch

IV. 1.) $\Delta^p u_{r-n} = (1+\Delta)^{-n} \cdot \Delta^p u_r$,

V. 1.) $\Delta^{p-n} u_r = (u_1 - 1)^{-n} \cdot \Delta^p u_r$;

VI. 1.) $\Delta^p u_{r+n} = (1 - \Delta u_{-1})^{-n} \cdot \Delta^p u_r$,

wo n positiv ist, wo p dagegen beliebig positiv oder negativ gedacht werden kann, wenn man nur rechts die angezeigte Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatze, und die angezeigte Multiplikation in dem Sinne ausführt, daß man zuletzt lauter Glieder der hier betrachteten Reihen hat.

E. Man wolle aber nicht übersehen, daß diese Formeln IV. — VI.), rechts unendlich viele Glieder enthalten, daher nur dann anwendbar sind, wenn diese Glieder zuletzt der Null gleich, oder doch unendlich klein werden. In allen übrigen Fällen muß man das Ergänzungs-Glied bestimmen, welches noch hinzutreten muß, wenn man diese Reihen rechts bei irgend einem Gliede abbricht. — Namentlich sind die Formeln V.) und V. 1.), ohne Ergänzungs-Glied genommen, allemal illusorisch.

So einfach aber die Bestimmung dieser Ergänzungs-Glieder vor sich gehen kann, so müssen wir es doch einem der noch nicht erschienenen Theile des „Systems d. Math." überlassen, diese weiteren Untersuchungen nachzuliefern, welches um so nothwendiger erscheint, als diese Ergänzungs-Glieder nach unserem Wissen bis jetzt noch von Niemanden gegeben worden sind.

Anmerkung. Daß man die vorstehenden Gleichungen auch noch mit Δ^p oder u_q multipliciren könne, versteht sich von selbst. Multiplicirt man die VI.) mit $\Delta^n u_{-n}$, so erhält man die Formel auf pag. 56. des Lacroix Traité etc. etc. T. III.). Soll sie aber allgemeine Gültigkeit haben, so muß noch das Ergänzungs-Glied hinzukommen, im Falle die Reihe rechts abgebrochen wird.

§. 93.

Anwendungen auf arithmetische Reihen der höhern Ordnung.

So oft die Glieder der m^{ten} Differenz-Reihe alle einander gleich werden, so nennt man die Ur-Reihe eine **arithmetische Reihe der m^{ten} Ordnung**. Die arithmetische Reihe

$$\cdots,\ a+(r-2)d,\ a+(r-1)d,\ a+rd,\ a+(r+1)d,\ \cdots$$

deren erste Differenz-Reihe bereits lauter gleiche Glieder

$$d,\quad d,\quad d,\quad d,\ \cdots$$

hat, ist danach eine **arithmetische Reihe der ersten Ordnung***).

Ist also die Ur-Reihe eine **arithmetische Reihe der m^{ten} Ordnung**, so kann man die Gleichung I.) des §. 91.) bloß so schreiben

$$(\odot)\cdots\quad u_{r+n} = u_r + n_1\cdot\Delta u_r + n_2\cdot\Delta^2 u_r + \cdots + n_m\cdot\Delta^m u_r,$$

so daß die Gleichung auf der rechten Seite des (=) Zeichens immer nur $m+1$ Glieder hat, wie groß auch der Abstand n der Glieder u_r und u_{r+n} von einander seyn mag. Und diese Gleichung ⊙.), welche für eine arithmetische Reihe der m^{ten} Ordnung gilt, kann auch in derselben Form beibehalten werden, wenn $n<m$ seyn sollte, weil die Binomial-Koeffizienten n_{n+1}, n_{n+2}, $\cdots$ n_m dann alle der Null gleich werden, die Glieder also, welche die Form ⊙.) jetzt zuviel hat, doch in der That wieder wegfallen.

Die Gleichung ⊙.) kann auch so geschrieben werden

$$(\mathbb{C})\cdots\quad u_{r+n} - u_r = n_1\cdot\Delta u_r + n_2\cdot\Delta^2 u_r + n_3\cdot\Delta^3 u_r + \cdots + n_m\cdot\Delta^m u_r;$$

und diese Gleichung giebt den Unterschied zwischen dem $r+n^{ten}$ Gliede und dem r^{ten} Gliede der Ur-Reihe in die r^{ten} Glieder ihrer Differenz-Reihen ausgedrückt.

---

*) Ein Beispiel einer arithmetischen Reihe der zweiten Ordnung sieht man in der Reihe der Quadratzahlen. Die Reihe der Kubikzahlen dagegen bildet eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung.

Die erſte Summen-Reihe einer arithmetiſchen Reihe der m^{ten} Ordnung iſt offenbar eine arithmetiſche Reihe der $(m+1)^{ten}$ Ordnung, weil, wenn man ſie als Ur-Reihe nimmt, die vorige arithmetiſche Reihe der m^{ten} Ordnung ihre erſte Differenz-Reihe iſt, alſo ihre $(m+1)^{te}$ Differenz-Reihe erſt die gleichen (conſtanten) Glieder enthält. Man erhält daher für ſie nach derſelben Formel ⊙.) oder ℂ.)

$$(♀)\cdots\quad \Delta^{-1}u_{r+n}-\Delta^{-1}u_r = n_1\cdot u_r+n_2\cdot\Delta u_r+n_3\cdot\Delta^2u_r+\cdots+n_{m+1}\cdot\Delta^m u_r.$$

Weil aber dieſe Differenz $\Delta^{-1}u_{r+n}-\Delta^{-1}u_r$ zwiſchen dieſen Gliedern der erſten Summen-Reihe nach §. 88. N. 6.) allemal die Summe der n Glieder

$$u_r+u_{r+1}+u_{r+2}+\cdots+u_{r+n-1}$$

der Ur-Reihe iſt, ſo ſieht man alſo in ♀.) zur Rechten die Summe von n auf einander folgenden Gliedern der arithmetiſchen Reihe der m^{ten} Ordnung gefunden und ausgedrückt durch eine Summe von nur $m+1$ Gliedern, wie groß auch übrigens die Anzahl n der ſummirten Glieder ſeyn mag.

Dieſen Ausdruck in ♀.) zur Rechten des (=) Zeichens nennt man daher das ſummatoriſche Glied der arithmetiſchen Reihe der m^{ten} Ordnung*), während die Reihe zur Rechten in ⊙.) das allgemeine Glied der Reihe heißt.

Beiſpiel 1. Nehmen wir die Reihe der Quadrat-Zahlen

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ \cdots$$

ſo iſt, wenn man ſelbige mit

$$u_r,\ u_{r+1},\ u_{r+2},\ \text{etc. etc.}$$

vergleicht, $u_r=1$, $\Delta u_r=3$ und $\Delta^2u_r=2$, $\Delta^3u_r=\Delta^4u_r=\text{etc. etc.}=0$. Folglich iſt die Summe der n erſten Quadrat-Zahlen

$$=n_1\cdot 1+n_2\cdot 3+n_3\cdot 2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

*) Die im §. 33. d. I. Bds.) definirten figurirten Reihen gehören, ihrer Definition zu Folge, zu den arithmetiſchen Reihen höherer Ordnungen. Die dort gefundenen n^{ten} Glieder, und Summe einer Anzahl n von Gliedern ergeben ſich daher aus den hieſigen Formeln ⊙.) und ♀.) unmittelbar. — Eben ſo die Summe von n Quadratzahlen, von n Kubikzahlen; u. ſo w. f.

Beispiel 2. Vergleicht man die Reihe der Kubikzahlen

1, 8, 27, 64, 125, etc. etc.

mit u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, etc. etc.,

so ist $u_r = 1$, $\Delta u_r = 7$, $\Delta^2 u_r = 12$, $\Delta^3 u_r = 6$, $\Delta^4 u_r = \Delta^5 u_r$ = etc. etc. = 0. — Folglich ist die Summe der n ersten Kubikzahlen

$$= n_1 + 7 \cdot n_2 + 12 \cdot n_3 + 6 \cdot n_4 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

folglich immer eine Quadratzahl.

Anmerkung. Ist die gegebene Ur-Reihe zwar keine arithmetische einer höhern Ordnung, so daß in keiner der Differenz-Reihen die Glieder alle einander gleich werden; werden aber in z. B. der m^{ten} Differenz-Reihe die q Glieder

$$\Delta^m u_r, \quad \Delta^m u_{r+1}, \quad \Delta^m u_{r+2}, \quad \cdots \Delta^m u_{r+q-1}$$

sehr wenig von einander verschieden, so daß dann die r^{ten} Glieder der q nächstfolgenden Differenz-Reihen, also die Glieder

$$\Delta^{m+1} u_r, \quad \Delta^{m+2} u_r, \quad \Delta^{m+3} u_r, \quad \text{bis zu} \quad \Delta^{m+q} u_r \quad \text{hin,}$$

nahe hin der Null gleich werden, so kann man die Formel §. 93. ⊙.) und dann auch die Formel §. 93. 2.) näherungsweise gelten lassen, so lange n nicht größer als m+q ist.

So wie aber $n > m+q$ wird, so dürfen die Glieder $n_{m+q+1} \cdot \Delta^{m+q+1} u_r$, $n_{m+q+2} \cdot \Delta^{m+q+2} u_r$, ... welche dann noch zur Rechten dieser Formeln hinzukommen müßten, in so fern $\Delta^{m+p+1} u_r$, $\Delta^{m+q+2} u_r$, etc. etc. wieder bedeutender werden können, nicht ohne weiteres weggelassen werden.

So bilden z. B. die Glieder

$$log\, r, \quad log(r+1), \quad log(r+2), \quad \cdots \quad log(r+q)$$

wenn r sehr groß ist, und q nicht zu groß genommen wird (wie später erwiesen werden soll) eine solche Reihe, für welche in diesem Umfange die 3ten oder doch die 4ten Differenz-Reihen schon Glieder enthalten, die ziemlich nahe Null sind. — Man kann sich daher der vorstehenden Gleichung §. 93. ⊙.) bedienen, um die einzelnen Glieder $log(r+1)$, $log(r+2)$, $log(r+3)$, ... $log(r+n)$ auseinander und aus den durch sie gebildeten r^{ten} Gliedern ihrer Differenz-Reihen näherungsweise zu berechnen.

§. 94 *).

Denkt man sich abermals eine beliebige Reihe beliebiger Glieder als Ur-Reihe, solche Glieder aber durch die Zeichen

$$\cdots\ u_{r-2m},\ u_{r-m},\ u_r,\ u_{r+m},\ u_{r+2m},\ u_{r+3m},\ \cdots$$

bezeichnet, wo m eine bloße Type ist, daher alles vorstellen kann; bildet man sich wieder die positiven und die negativen Differenz-Reihen, bezeichnet aber die Glieder derselben analog durch

$$\cdots\ \Delta u_{r-2m},\ \Delta u_{r-m},\ \Delta u_r,\ \Delta u_{r+m},\ \Delta u_{r+2m},\ \cdots$$
$$\cdots\ \Delta^2 u_{r-2m},\ \Delta^2 u_{r-m},\ \Delta^2 u_r,\ \Delta^2 u_{r+m},\ \Delta^2 u_{r+2m},\ \cdots$$

u. s. w. f., so finden sich bald aus dem Bildungsgesetz der Glieder in der jetzigen Form, nämlich aus

$$\Delta^{p+1} u_{r+sm} = \Delta^p u_{r+(s+1)m} - \Delta^p u_{r+sm},$$

die Formeln der §§. 91. und 92.), wie sich solche in der jetzigen Form gestalten müssen, nämlich

I. $u_{r+nm} = (1+\Delta)^n \cdot u_r = S[n_\alpha \cdot \Delta^\alpha u_r]$;

II. $\Delta^n u_r = (u_m - 1)^n \cdot u_r = S[(-1)^\alpha \cdot n_\alpha \cdot u_{r+(n-\alpha)m}]$;

III. $u_{r-nm} = (1-\Delta u_{-m})^n \cdot u_r = S[(-1)^\alpha \cdot n_\alpha \cdot \Delta^\alpha u_{r-\alpha m}]$,

wo statt α nach und nach 0, 1, 2, 3, 4, und alle positiven ganzen Zahlen gesetzt werden, während das Zeichen S die Summe aller der dadurch entstehenden Glieder ausdrückt. Ferner noch

IV. $u_{r-nm} = (1+\Delta)^{-n} \cdot u_r$;

V. $\Delta^{-n} u_r = (u_m - 1)^{-n} \cdot u_r$;

VI. $u_{r+nm} = (1-\Delta u_{-m})^{-n} \cdot u_r$;

wenn man nur nicht vergißt, daß in den drei letztern Formeln, sobald die Ausdrücke zur Rechten bei irgend einem $\mu+1^{ten}$ Gliede abgebrochen werden, noch Ergänzungsglieder hinzutreten müssen, welche jedesmal, auch in der jetzigen Bezeichnung, leicht ausgedrückt werden können.

---

*) Das in diesem Kapitel nun folgende kann der Anfänger bei'm ersten Lesen überschlagen.

Dabei darf man aber ja nicht übersehen, daß dies genau dieselben Relationen zwischen den Gliedern einer Ur-Reihe und deren positiven und negativen Differenz-Reihen sind, wie solche in den §§. 91. und 92.) bereits hingestellt sich finden; — daß hier bloß dieselben Glieder ein klein wenig anders bezeichnet worden sind, und daß deshalb auch dieselben Relationen in etwas anderer Form ausgedrückt erscheinen.

Setzt man 1 statt m, so tritt die neue Bezeichnung in die alte zurück, und man erhält auch sogleich wieder dieselben Formen der Relationen, wie solche vorher gefunden worden sind.

Wollen wir aber in irgend einem Falle die Glieder der Differenz-Reihen in diesem zweiten Schema mit denen in dem erstern Schema der §§. 86. 87.) in Vergleichung setzen, so werden wir die des hiesigen zweiten Schema dadurch von jenen unterscheiden, daß wir hier Δ' statt Δ schreiben, das bloße Δ aber für jene aufsparen.

§. 95.

Man denke sich wieder eine beliebige Reihe beliebiger Glieder als Ur-Reihe und durch

$$\cdots u_{r-2},\ u_{r-1},\ u_r,\ u_{r+1},\ u_{r+2},\ \cdots$$

so wie die Glieder ihrer Differenz-Reihen auf die in den §§. 86. 87.) angegebene Weise bezeichnet; und man hebe nun aus dieser Reihe von Gliedern die durch

$$\cdots u_{r-m},\ u_r,\ u_{r+m},\ u_{r+2m},\ \cdots$$

bezeichneten heraus, wo m irgend eine positive ganze Zahl vorstellen mag; man denke sich diese Glieder als neue Ur-Reihe, zu welcher nun die positiven und negativen Differenz-Reihen gebildet, und deren Glieder nach §. 94.) bezeichnet werden, aber Δ' statt Δ gesetzt.

Dies vorausgesetzt, so hat man nach §. 94. II.)

1) $\Delta^n u_r = (u_m - 1)^n \cdot u_r = S[n_b \cdot (-1)^b \cdot u_{r+cm}]$ *);
$c+b=n$

aber auch (nach §. 91. I.)

2) $u_m = (1+\Delta)^m \cdot u_0 = S[m_a \cdot \Delta^a u_0]$;

und für irgend einen bestimmten Werth von c

3) $u_{r+cm} = (1+\Delta)^{cm} \cdot u_r = S[(cm)_b \cdot \Delta^b u_r]$,

alles mit Zuziehung der §§. 36.—38. des I. Bds.). Substituirt man dieses letztere Resultat statt u_{r+cm} in die Gleichung 1.), so erhält man

4) $\Delta^n u_r = S[(-1)^b \cdot n_b \cdot (cm)_b \cdot \Delta^b u_r]$,
$c+b=n$

wo statt b Null und alle positiven ganzen Zahlen gesetzt werden müssen, während für jeden Werth von b, wiederum statt c und b Null und alle positiven ganzen Zahlen gesetzt werden, welche der Gleichung $c+b=n$ genügen; wobei n_b und $(cm)_b$ Binomial-Koefficienten vorstellen. Man sieht also hier das r^{te} Glied der n^{ten} Differenz-Reihe im zweiten Schema, durch die r^{ten} Glieder der Differenz-Reihen des ersteren Schema bis zu $\Delta^{mn} u_r$ hin, ausgedrückt, so daß der Koeffizient von $\Delta^v u_r$

$$= S[(-1)^b \cdot n_b \cdot (cm)_v]$$
$$c+b=n$$

und selber eine Reihe von $n+1$ Gliedern ist.

Setzte man aber den Ausdruck $(1+\Delta)^m \cdot u_0$ statt u_m aus 2.) in die Gleichung 1.), so erhielte man

*) Wir bedienen uns hier allemal der kleinen deutschen Buchstaben, um damit alle Werthe zu bezeichnen, welche Null und positive ganze Zahlen sind, und welche den untergesetzten Gleichungen (z. B. $c+b=n$) genügen, so daß nach und nach alle positiven ganzen Zahlen genommen werden müssen, wenn keine untergesetzte Gleichung die Werthe näher beschränkt. Das vorgesetzte S drückt dann immer die Summe aller dadurch erhaltenen Glieder aus.

$$\text{I.}\quad \begin{cases} \Delta^n u_r = [(1+\Delta)^m \cdot u_0 - 1]^n \cdot u_r, \\ \text{d. h.} \\ \Delta^n u^r = (m_1 \cdot \Delta u_0 + m_2 \cdot \Delta^2 u_0 + m_3 \cdot \Delta^3 u_0 + \cdots)^n \cdot u_r, \\ \qquad = (m_1 + m_2 \cdot \Delta + m_3 \cdot \Delta^2 + \cdots)^n \cdot \Delta^n u_r; \end{cases}$$

allein es entsteht nun die Frage, ob dieses Resultat I.) mit dem in 4.) gefundenen identisch und dadurch das zuletzt angewandte Verfahren gerechtfertigt ist.

§. 96.

Betrachtet man zu dem Ende den Ausdruck

$$[(1+z)^m - 1]^n,$$

so erhält man zunächst nach dem binomischen Lehrsatze

$$1)\qquad [(1+z)^m - 1]^n = S[(-1)^b \cdot n_b \cdot (1+z)^{cm}]. \qquad c+b=n$$

Weil jedoch abermals nach dem binomischen Lehrsatze für jeden Werth von c

$$2)\qquad (1+z)^{cm} = S[(cm)_b \cdot z^b]$$

ist, so erhält man, wenn man diesen Werth aus 2.) in 1.) substituirt,

$$3)\qquad [(1+z)^m - 1]^n = S[(-1)^b \cdot n_b \cdot (cm)_b \cdot z^b]; \qquad c+b=n$$

und durch diese Gleichung ist es außer Zweifel gesetzt, daß das Resultat im §. 95. I.) zur Rechten genau mit dem Resultate §. 95. N. 4.) zusammenfällt, sobald man nur die Produkte $\Delta^p u_0 \cdot \Delta^q u_0$ in $\Delta^{p+q} u_0$ umwandelt.

Nebenbei erfahren wir hier, weil in N. 3.) die Entwickelung des Ausdrucks zur Linken nach steigenden Potenzen von z offenbar mit z^n beginnt, daß auch in dem Ausdrucke zur Rechten in N. 3.) alle Koeffizienten von z^b, so oft $b = \nu$, und $\nu < n$ ist, der Null gleich seyn müssen, während der Koeffizient von z^n, welcher links offenbar m^n ist, auch rechts derselbe seyn muß.

Diese Resultate schreiben sich so

$$4)\quad S\underset{c+b=n}{[(-1)^b\cdot n_b\cdot(cm)_v]} = \begin{Bmatrix} 0, \text{ wenn } v<n \\ m^n, \text{ wenn } v=n \end{Bmatrix},$$

d. h.

$$(nm)_v - n_1\cdot((n-1)m)_v + n_2\cdot((n-2)m)_v - \cdots \pm n_{n-1}\cdot(1\cdot m)_v = \begin{Bmatrix} 0 \\ m^n \end{Bmatrix},$$

je nachdem $v<n$ oder $v=n$ ist.

Multiplizirt man diese Gleichung 4.) mit $v!$, so nimmt sie auch noch folgende Gestalt an, nämlich

$$5)\quad S[(-1)^b\cdot n_b\cdot(cm)^{vI-1}] = \begin{Bmatrix} 0, \text{ wenn } v<n \\ m^n\cdot n!, \text{ wenn } v=n \end{Bmatrix},$$

d. h.

$$(nm)^{vI-1} - n_1\cdot((n-1)m)^{vI-1} + n_2\cdot((n-2)m)^{vI-1} - \cdots \pm n_{n-1}\cdot(1\cdot m)^{vI-1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \text{oder} \\ m^n\cdot n! \end{Bmatrix}.$$

Und die Resultate dieses Paragraphen bleiben wahr, nicht bloß wenn m eine positive ganze Zahl, sondern auch wenn m ganz allgemein gedacht wird; wenn nur n eine positive ganze Zahl ist und bleibt.

§. 97.

Weil aber das Resultat §. 95. N. 4.), also auch, vermöge des §. 96.), das Resultat §. 95. I.) richtig verbleibt, so oft die beiden Gleichungen 1. und 3.) des §. 95.) in Kraft bleiben, so folgt, daß noch allemal

$$I.\qquad \Delta'^n u_r = [(1+\Delta)^m u_0 - 1]^n\cdot u_r$$

in dem näher beschriebenen Sinne wahr seyn werde, nicht bloß, wenn die Reihe des zweiten Schema, deren Differenzen durch Δ' bezeichnet sind, aus gleichweit (um m Stellen) abstehenden Gliedern der Reihe des erstern Schema besteht (wie letzteres

m §. 95. vorausgesetzt worden ist), sondern auch, wenn wir jetzt die andere Annahme machen,

daß $m = \frac{1}{\mu}$ ist, und daß die Reihe des 2ten Schema zwischenliegende Glieder zwischen je zwei nächst auf einander folgenden Gliedern des erstern Schema enthält, so nämlich, daß das r^{te}, $r+\mu^{\text{te}}$, $r+2\mu^{\text{te}}$, $r+3\mu^{\text{te}}$, etc. Glied der Ur-Reihe des 2ten Schema, bezüglich mit dem r^{ten}, $r+1^{\text{ten}}$, $r+2^{\text{ten}}$, $r+3^{\text{ten}}$, etc. Gliede der Ur-Reihe des 1ten Schema identisch sind; sobald man nur voraussetzt, daß alle durch u_{r+cm} oder jetzt durch $u_{r+\frac{c}{\mu}}$ vorgestellten Glieder der Ur-Reihe im 2ten Schema, aus den Gliedern der Ur-Reihe des erstern Schema nach dem Gesetze §. 95. N. 4.) d. h. nach der Formel

$$(\odot)\cdots \begin{cases} u_{r+cm} = (1+\Delta)^{cm}\cdot u_r = S[(cm)_b \cdot \Delta^b u_r] \\ \text{oder} \\ u_{r+\frac{c}{\mu}} = (1+\Delta)^{\frac{c}{\mu}}\cdot u_r = S\left[\left(\frac{c}{\mu}\right)_b \cdot \Delta^b u_r\right] \end{cases}$$

gebildet sind, wo c irgend eine bestimmte ganze Zahl ist, wo aber b unter den Summen-Zeichen S, wie immer, wenn nicht das Gegentheil bemerkt ist, alle Werthe hat, welche 0 und positive ganze Zahlen sind, so daß die Summe zur Rechten im Allgemeinen eine unendliche Reihe ist. Dieselbe bricht jedoch von selber ab, entweder 1) wenn $\frac{c}{\mu}$ eine ganze Zahl wird, oder 2) für jeden andern Werth von c, wenn die Ur-Reihe des ersten Schema eine arithmetische Reihe der ν^{ten} Ordnung ist, so daß $\Delta^{\nu+1}u_r$, $\Delta^{\nu+2}u_r$, etc. etc. der Null gleich werden *).

*) In dem Falle dieses §. 97.) entsteht also die Ur-Reihe des zweiten Schema, deren Differenzen durch Δ' bezeichnet sind, dadurch, daß man zwischen je zwei Glieder der Ur-Reihe des erstern Schema

Dieselbe Formel I.), es mag nun m eine positive ganze Zahl seyn und die Voraussetzung des §. 95.) gemacht werden, oder $m = \frac{1}{\mu}$ genommen und die Voraussetzung des gegenwärtigen §. 97.) statt finden, läßt sich aber allemal auch so schreiben, nämlich

II. $$\Delta^m u_r = S[(-1)^b \cdot n_b \cdot (cm)_{n+b} \cdot \Delta^{n+b} u_r],$$
$$c+b=n$$

wo für jeden bestimmten Werth b (welcher Null, oder eine positive ganze Zahl ist) der Koeffizient von $\Delta^{n+b} u_r$ aus $n+1$ Gliedern besteht, welche sich aber, vergleicht man sie mit dem Ausdrucke in I.), auch in eine kleinere Anzahl von Gliedern vereinigen lassen.

Anmerkung. Wollte man die Gleichung (§. 97. I.), nämlich

I. $$\Delta^m u_r = [(1+\Delta)^m u_0 - 1]^n \cdot u_r,$$

auf eine, der früher (in dem §. 92.) befolgten analogen Weise behandeln, nämlich dieselbe zuerst mit

$[(1+\Delta)^m u_0 - 1]^{-n}$ und hernach noch mit $\Delta^{-n} u_0$ multipliciren, so erhielte man

III. $$\Delta^{-n} u_r = [(1+\Delta)^m u_0 - 1]^{-n} \cdot u_r \text{ *),}$$

welche

---

u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, u_{r+3}, u_{r+4}, ...

noch $\mu - 1$ Glieder eingeschaltet (interpolirt) sich denkt, welche durch $u_{r+\frac{c}{\mu}}$ vorgestellt sind, indem man unter c die ganzen Zahlen von 0 bis $\mu - 1$ oder von $\mu+1$ bis $2\mu-1$, oder von $2\mu+1$ bis $3\mu-1$, oder von $3\mu+1$ bis $4\mu-1$, u. s. w. f. versteht, wo aber das Gesetz der Einschaltung in der Formel ⊙.) gegeben und bestimmt ausgesprochen sich findet.

*) Diese Formel findet man, abgesehen von den hier gebrauchten Zeichen (es steht nämlich Σ^n statt hier Δ^{-n}), fast in allen den Schriften, welche die Lehre der Differenz-Reihen vollständiger behandeln; obgleich sie unrichtig ist. — Auch Laplace hat dieselbe mittelst seiner „Théorie des fonctions génératrices" erhalten. — Allein Laplace zieht sie aus einer irrigen Behauptung, welche man gleich zu Anfang jener Theorie gemacht sieht. Er bezeichnet nämlich durch u die erzeugende Funktion der Reihe $y_x \cdot t^x$, und

welche wir jedoch als unrichtig bezeichnen müssen. Sollte nämlich diese Formel brauchbar werden, so bedürfte sie einer doppelten Berichtigung. Einmal müßte man nämlich die I.) nicht mit allen Gliedern von $[(1+\Delta)^m u_0 - 1]^{-n}$, sondern nur mit den Gliedern bis zu $\Delta^\mu u_0$ hin (wo μ beliebig groß gedacht ist) multipliciren, um die Ergänzungsglieder zu erhalten. — Dann aber ist dieses Multipliciren, den §§. 89. 90.) zufolge, überhaupt nur erlaubt, wenn man in der I.) unter $\Delta^n u_r$ den Ausdruck $(u_m - 1)^n \cdot u_r$ versteht, weil die zu multiplicirenden Gleichungen bloß Glieder eines und desselben Schema enthalten dürfen. Die zuerst entstehende Gleichung

$$[(1+\Delta)^m u_0 - 1]^{-n} \cdot (u_m - 1)^n \cdot u_r = u_r,$$

nachdem sie hinsichtlich ihrer Ergänzungs-Glieder, im Falle die Reihe links abbricht, gehörig berichtigt worden wäre, darf daher nicht mit $\Delta^{-n} u_0$, sondern höchstens mit $(u_m - 1)^{-n} u_0$ multiplicirt werden, wofür man aber wieder nur eine endliche Anzahl erster Glieder nebst ihren Ergänzungsgliedern nehmen müßte, um nach der Multiplication auf der rechten Seite nicht genau $(u_m - 1)^{-n} \cdot u_r$, dagegen ganz genau $\Delta^{-n} u_r$, wie solches hier gewünscht werden muß, zu haben.

Der Zweck der gegenwärtigen Schrift zwingt uns aber abzubrechen, und das Weitere den noch folgenden Theilen des „Systems der Mathematik" zu überlassen.

---

sagt dann, daß die erzeugende Funktion der Reihe $\Sigma^n y_x \cdot t^x$ nothwendig $u\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{-n}$ seyn werde. Dies ist aber nicht der Fall, wie eine gründlichere Behandlung des Gegenstandes augenblicklich erkennen läßt.

Zwölftes Kapitel.

Von den endlichen Differenzen und Summen.

Erste Abtheilung.

Uebertragung der vorstehenden allgemeinen Lehren auf eine besondere Reihe von Ausdrücken.

Vorerinnerung.

Bis hieher haben wir (in dem vorhergehenden Kapitel) Ur-Reihen betrachtet, welche völlig beliebige Glieder hatten, die völlig gesetzlos seyn oder nach jedem beliebigen Gesetze fortlaufen konnten; und wir haben nichts weiter gethan, als die Glieder der Ur-Reihe, mit den aus derselben gebildeten Gliedern der Differenz-Reihen, in verschiedenen Combinationen verglichen.

In dem gegenwärtigen Kapitel wollen wir dagegen eine Ur-Reihe betrachten, deren Glieder alle aus einer gegebenen Funktion

$$f_x$$

hervorgehen, dadurch daß man statt x nach und nach Werthe setzt, welche fortwährend um gleichviel wachsen.

§. 98.

A) Es sey f_x eine beliebige Funktion von x, und f_{x+ph} stelle das vor, was aus f_x wird, wenn man $x+ph$ statt x setzt. Denkt man sich nun unter der im vorhergehenden Kapitel betrachteten Reihe

a) u_q, u_{q+1}, u_{q+2}, u_{q+3}, etc. etc.

wo q eine beliebige positive oder negative ganze Zahl oder Null bedeutet, die bestimmte Reihe

b) f_{x+qh}, $f_{x+(q+1)h}$, $f_{x+(q+2)h}$, $f_{x+(q+3)h}$, etc. etc.

vorgestellt, so ist allgemein für jedes positive oder negative p, auch für $p = 0$,

1) $$u_p = f_{x+ph}$$

vorausgesetzt. — Die Funktion f_x aber, welche alle Glieder dieser bestimmten Reihe b.) giebt, wenn statt x nach und nach $\cdots\ x+qh,\ x+(q+1)h,\ x+(q+2)h,\ x+(q+3)h,\ \cdots$ gesetzt wird, heißt das allgemeine Glied dieser Reihe.

B) Bezeichnet man nun die Funktion von x, aus welcher die Glieder der ersten Differenz-Reihe (wenn die Reihe b. als Ur-Reihe genommen wird) ebenfalls hervorgehen, wenn statt x nach und nach

$\cdots\ x+qh,\ x+(q+1)h,\ x+(q+2)h,\ x+(q+3)h,\ \cdots$

gesetzt wird, durch Δf_x, so ist dieses allgemeine Glied Δf_x offenbar gegeben durch die Gleichung

2) $$\Delta f_x = f_{x+h} - f_x;$$

und unter Voraussetzung dieser Bezeichnung und der des vorhergehenden Kapitels ist dann

3) $$\Delta u_p = \Delta f_{x+ph},$$

wenn nur Δf_{x+ph} das vorstellt, was aus Δf_x wird, sobald man $x+ph$ statt x schreibt.

C) Bezeichnen wir überhaupt die Funktionen von x, welche als die allgemeinen Glieder der 1ten, 2ten, 3ten, etc. und allgemein der r^{ten} Differenz-Reihe angesehen werden können, bezüglich durch

$$\Delta f_x,\quad \Delta^2 f_x,\quad \Delta^3 f_x,\quad \text{etc. etc.}\quad \text{und}\quad \Delta^r f_x,$$

so findet sich offenbar außer

$\Delta f_x = f_{x+h} - f_x$, noch $\Delta^2 f_x = \Delta f_{x+h} - \Delta f_x$;

$\Delta^3 f_x = \Delta^2 f_{x+h} - \Delta^2 f_x$; etc. etc.

und überhaupt

4) $$\Delta^{r+1} f_x = \Delta^r f_{x+h} - \Delta^r f_x,$$

welche positive ganze Zahl auch immer unter r gedacht werden mag.

Und unter der Voraussetzung dieser Bezeichnung und der des vorhergehenden Kapitels ist dann auch allemal

5) $$\Delta^r u_p = \Delta^r f_{x+ph}.$$

D) Aber auch jede der negativen Differenz-Reihen, d. h. der Summen-Reihen, geht nun auf dieselbe, in A.) beschriebene Weise aus einem allgemeinen Gliede hervor. Bezeichnen wir diese allgemeinen Glieder der $(-1)^{ten}$, $(-2)^{ten}$, $(-3)^{ten}$, ... $(-r)^{ten}$ Differenz-Reihe bezüglich durch

$$\Delta^{-1} f_x, \quad \Delta^{-2} f_x, \quad \Delta^{-3} f_x, \quad \cdots \Delta^{-r} f_x,$$

so finden zwischen diesen allgemeinen Gliedern offenbar die Gleichungen statt:

$\Delta^0 f_x$ d. h. $f_x = \Delta^{-1} f_{x+h} - \Delta^{-1} f_x$; $\Delta^{-1} f_x = \Delta^{-2} f_{x+h} - \Delta^{-2} f_x$
etc. etc.

und allgemein

6) $$\Delta^{-r+1} f_x = \Delta^{-r} f_{x+h} - \Delta^{-r} f_x.$$

Diese Gleichungen aber bestimmen, wie man sieht, die allgemeinen Glieder der Summen-Reihen nicht, sondern nur die Differenz zweier auf einander folgenden Werthe derselben, nämlich der für $x = x$ und $x = x + h$ genommenen Werthe.

Unter der Voraussetzung dieser Bezeichnung und der des vorhergehenden Kapitels kann man aber annehmen

7) $$\Delta^{-r} u_p = \Delta^{-r} f_{x+ph}.$$

E) Es muß jedoch hier bemerkt werden, daß die Funktionen von x, welche wir hier bezüglich durch

$$\Delta^{-1} f_x, \quad \Delta^{-2} f_x, \quad \Delta^{-3} f_x, \cdots \Delta^{-r} f_x$$

bezeichnet haben, gewöhnlich durch

$$\Sigma f_x, \quad \Sigma^2 f_x, \quad \Sigma^3 f_x, \cdots \Sigma^r f_x$$

bezeichnet werden. Bei unserer Bezeichnung aber kann man die Resultate 5.) und 7.) in das einzige

I. $$\Delta^r u_p = \Delta^r f_{x+ph}$$

zusammenfassen, indem man solches gelten läßt, es mag r eine positive oder negative ganze Zahl oder 0 seyn, sobald man nur unter $\Delta^0 f_x$ die Funktion f_x selbst versteht, so wie man unter

$\Delta^0 u_p$ das Glied u_p selbst verstanden hat*). — Und eben so lassen sich die Gleichungen 4.) und 6.) zusammenfassen in die einzige

II. $$\Delta^{r+1} f_x = \Delta^r f_{x+h} - \Delta^r f_x,$$

sobald man sie gelten läßt für jede positive oder negative ganze Zahl, welche statt r gesetzt werden mag, so wie auch für $r = 0$. — Daß p jedesmal eine beliebige positive oder negative ganze Zahl oder Null seyn kann, versteht sich von selbst.

Die Gleichung I.) lehrt weiter nichts, als was man sich jetzt unter dem, in dem vorhergehenden Kapitel eingeführten allgemeinen Zeichen $\Delta^r u_p$ zu denken habe, wenn man unter der allgemeinen Reihe A. a.) jetzt die bestimmte und besondere Reihe A. b.) sich denkt. — Die Gleichung II.) dagegen drückt die Abhängigkeit der Funktionen Δf_x, $\Delta^2 f_x$, $\Delta^3 f_x$, etc. etc. und $\Delta^{-1} f_x$, $\Delta^{-2} f_x$, $\Delta^{-3} f_x$, etc. von f_x und von einander aus.

F) Es folgt aber aus der II.) noch

$$\Delta^r f_{x+h} = \Delta^r f_x + \Delta^{r+1} f_x,$$

d. h. wenn 0, 1, 2, 3, etc. etc. statt r gesetzt wird,

$f_{x+h} = f_x + \Delta f_x$; $\Delta f_{x+h} = \Delta f_x + \Delta^2 f_x$; $\Delta^2 f_{x+h} = \Delta^2 f_x + \Delta^3 f_x$;

u. s. w. f.

Anmerkung. Diese Gleichungen in E.) und F.) sind aber nur specielle Fälle der allgemeinen Gleichungen

$$\Delta^{r+1} u_s = \Delta^r u_{s+1} - \Delta^r u_s \quad \text{und} \quad \Delta^r u_{s+1} = \Delta^r u_s + \Delta^{r+1} u_s$$

der §§. 86. 87.) für $s = 0$, und wenn man statt der allgemeinen Reihe A. a.) die jetzige besondere und bestimmte Reihe A. b.) setzt.

§. 99.

Erklärung der endlichen Differenzen und der endlichen Integrale einer Funktion f_x.

Diese durch Δf_x, $\Delta^2 f_x$, $\Delta^3 f_x$, etc. etc. bezeichneten, und mit einander sowie mit f_x mittelst der Gleichungen des §. 98. E. II.) zusammenhängenden und aus diesen Gleichungen zu findenden Funktionen von x, nennt man bezüglich „die zu der Differenz h von x gehörige erste, zweite, dritte etc. etc.

*) Für $r = 0$ geht diese Gleichung I.) in die obige A. 1.) über.

endliche Differenz der Funktion f_x, während letztere ſelbſt noch h enthalten, aber auch von h frei ſeyn kann. — Die Funktionen $\Delta^{-1}f_x$ oder Σf_x, $\Delta^{-2}f_x$ oder $\Sigma^2 f_x$, $\Delta^{-3}f_x$ oder $\Sigma^3 f_x$, etc. etc., deren Abhängigkeit aus einander ebenfalls durch die Gleichungen des §. 98. E. II.) bedingt iſt (die aber nicht ganz und vollſtändig aus dieſen Gleichungen gefunden werden können)*) nennt man dagegen „die zu der Differenz h von x gehörigen endlichen Summen oder endlichen Integrale der Funktion f_x".

Wird aber die Differenz h von x, der Einheit gleich gedacht, d. h. iſt $h = 1$, ſo wollen wir, um die zu $h = 1$ gehörigen endlichen Differenzen und Integrale einer Funktion von x, von den allgemeinen, zu $h = h$ gehörigen zu unterſcheiden, die erſteren zu $h = 1$ gehörigen dadurch auszeichnen, daß wir Δ_1 ſtatt Δ, und Σ_1 ſtatt Σ ſchreiben.

§. 100.

1) Iſt f_x eine Funktion von x ohne h, ſo iſt augenblicklich nach dem Taylor'ſchen Lehrſatze

$$\text{a)} \qquad \Delta f_x = \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots,$$

*) Wenn alle Glieder der Summen-Reihen um gleichviel vermehrt werden, ſo bleibt ihre Differenz-Reihe doch immer dieſelbe, wie wir bereits im §. 88.) ausführlich erörtert haben. Wenn daher das allgemeine Glied der erſten Summen-Reihe, um eine Conſtante, oder um eine ſolche Funktion von x $\left(\text{z. B. } A \cdot \sin\frac{2\pi x}{h},\ B \cdot \cos\frac{2\pi x}{h}, \text{ etc. etc.}\right)$ vermehrt wird, welche dieſelben Werthe behält, wenn nach und nach $x+qh$, $x+(q+1)h$, etc. etc. ſtatt x geſetzt werden (unter q eine poſitive oder negative ganze Zahl verſtanden oder die Null), ſo liefert es Glieder, die alle um gleichviel größer ſind, deren Differenzen alſo wieder zu derſelben Ur-Reihe

$$\cdots f_{x+qh},\ f_{x+(q+1)h},\ f_{x+(q+2)h}, \text{ etc.}$$

führen. — Und da dies für jede ſolche Summen-Reihe gilt, ſo wird $\Sigma^n f_x$ eine Anzahl n ſolcher willkührlichen Conſtanten, oder ſolcher willkührlichen periodiſchen Funktionen von x in ſich aufnehmen, und dabei doch immer den obigen Relationen genügen.

Dieſe Reihe rechts bricht aber nur dann ab, wenn f_x irgend eine ganze Funktion von x, alſo eine Funktion von der Form

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \cdots + Px + Q$$

iſt, wo dann Δf_x eine ganze Funktion von x vom $(m-1)^{ten}$ Grade wird, deren Koefficienten jedoch h in ſich aufgenommen haben.

2) Iſt f_x eine Funktion von x, welche ſelber noch h enthält, ſo aber daß f_x die Form

$$f_x = \varphi_x \cdot h^\alpha + \psi_x \cdot h^\beta + \pi_x \cdot h^\gamma + \cdots$$

hat, ſo iſt abermals Δf_x leicht in eine Reihe auszudrücken, die nach Potenzen von h fortläuft. Man findet nämlich ſogleich, wenn man rechts $x+h$ ſtatt x ſetzt, und dann die Funktion ſelber wieder ſubtrahirt, und wenn man bedenkt, daß $\varphi_{x+h} - \varphi_x$ durch $\Delta\varphi_x$ bezeichnet wird, u. ſ. f.,

$$\Delta f_x = \Delta\varphi_x \cdot h^\alpha + \Delta\psi_x \cdot h^\beta + \Delta\pi_x \cdot h^\gamma + \cdots,$$

während wiederum (nach 1.)

$$\Delta\varphi_x = \partial\varphi_x \cdot h + \partial^2\varphi_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots$$

$$\Delta\psi_x = \partial\psi_x \cdot h + \partial^2\psi_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots$$

u. ſ. w.

iſt. Multiplicirt man daher dieſe einzelnen Reihen mit h^α, h^β, etc. etc., und ordnet man das ganze nach Potenzen von h, ſo hat man zuletzt Δf_x nach Potenzen von h geordnet.

3) Da $\Delta^2 f_x = \Delta f_{x+h} - \Delta f_x$ iſt, ſo wird auch $\Delta^2 f_x$ ſogleich in eine Reihe nach Potenzen von h entwickelt werden können, ſo wie man Δf_x entwickelt hat; dies entwickelte Δf_x befindet ſich nämlich in dem Falle, der in 2.) gedachten Funktion f_x. — Die Gleichung 1. a.) giebt namentlich, wenn man in ihr $x+h$ ſtatt x ſetzt, und dann die alte von der neuen Gleichung ſubtrahirt, auch auf die einzelnen Ausdrücke ∂f_{x+h}, $\partial^2 f_{x+h}$, etc. etc. den Taylor'ſchen Lehrſatz anwendet,

b) $\Delta^2 f_x = \partial^2 f_x \cdot h^2 + \left\{\begin{matrix}\text{Glieder mit den hö-}\\ \text{hern Potenzen von h}\end{matrix}\right\}$,

wo aber f_x ohne h gedacht ist.

4) Es kann daher auch $\Delta^m f_x$ in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe umgeformt werden. — Namentlich findet man, wenn in b.) zuerst $x+h$ statt x gesetzt, und dann die alte Gleichung von der neuen subtrahirt wird,

c) $\Delta^3 f_x = \partial^3 f_x \cdot h^3 + \left\{\begin{matrix}\text{Glieder mit den hö-}\\ \text{hern Potenzen von h}\end{matrix}\right\}$,

wenn nur f_x nicht selbst schon h enthält.

So fortfahrend erhält man aber auch

$$\Delta^m f_x = \partial^m f_x \cdot h^m + \left\{\begin{matrix}\text{Glieder mit den hö-}\\ \text{hern Potenzen von h}\end{matrix}\right\}$$

wenn nur f_x nicht selbst schon h enthält.

5) Denkt man sich nun den besondern Fall, wo f_x noch kein h enthält und wo h unendlich-klein und $= dx$ gesetzt wird, so hat man aus 1.a.), 3.b.) und 4.c.)

$$\Delta f_x = \partial f_x \cdot dx;\quad \Delta^2 f_x = \partial^2 f_x \cdot dx^2;\quad \Delta^3 f_x = \partial^3 f_x \cdot dx^3;$$

und $\Delta^m f_x = \partial^m f_x \cdot dx^m$,

so daß also nun die Differenzen Δf_x, $\Delta^2 f_x$, $\Delta^3 f_x$ und $\Delta^m f_x$ mit den Differentialien df_x, $d^2 f_x$, $d^3 f_x$, $\cdots$ $d^m f_x$ zusammenfallen. Vgl. §. 160. d. I. Bds.)

§. 101.

Aus diesen Entwickelungen geht aber hervor:

1) Ist f_x eine ganze Funktion von x vom m^{ten} Grade, so ist Δf_x eine ganze Funktion von x vom $m-1^{ten}$ Grade, und dann auch (nach §. 100. N.N. 2. und 3.) $\Delta^2 f_x$ eine ganze Funktion von x vom $m-2^{ten}$ Grade; und $\Delta^m f_x$ ist daher nach x constant, so wie dann $\Delta^{m+1} f_x$, $\Delta^{m+2} f_x$, etc. etc. der Null gleich sind.

2) Denkt man sich daher eine ganze Funktion f_x vom m^{ten} Grade, als allgemeines Glied einer Ur-Reihe (nach

§. 98. A), so sind (nach §. 98. B. C.) die allgemeinen Glieder ihrer

1ten, 2ten, 3ten, ... r^{ten} Differenz-Reihe

ganze Funktionen von x bezüglich vom

$(m-1)^{ten}$, $(m-2)^{ten}$, $(m-3)^{ten}$, ... $(m-r)^{ten}$ Grade,

während das allgemeine Glied der m^{ten} Differenz-Reihe, nach x constant ist, alle Glieder der m^{ten} Differenz-Reihe demnach einander und dieser Constante gleich sind, und die $(m+1)^{te}$, $(m+2)^{te}$, etc. etc. Differenz-Reihe lauter Nullen zu Gliedern hat. — Die Ur-Reihe also, deren allgemeines Glied eine ganze Funktion f_x vom m^{ten} Grade ist, ist allemal eine arithmetische Reihe der m^{ten} Ordnung (§. 93.).

3) Der einfachste hierher gehörige Fall ist der, wo das allgemeine Glied der Ur-Reihe $= x^m$ ist, wo also die Glieder der Ur-Reihe selbst

$$\ldots,\ (x+q\cdot h)^m;\ (x+(q+1)h)^m;\ (x+(q+2)h)^m;\ (x+(q+3)h)^m,\ \text{etc. etc.}$$

sind *).

Hierher gehört auch die Reihe

$$1^m,\ 2^m,\ 3^m,\ 4^m,\ 5^m,\ \text{etc. etc.},$$

so daß auf sie alles angewandt werden kann, was §. 93.) von den arithmetischen Reihen höherer Ordnung gelehrt worden ist.

§. 102.

Verstehen wir in den Formeln des §. 91.) unter der Reihe

$$u_r,\ u_{r+1},\ u_{r+2},\ u_{r+3},\ \text{etc.}$$

jetzt die Reihe

$$f_x,\ f_{x+h},\ f_{x+2h},\ f_{x+3h},\ \text{etc. etc.};$$

so ist

$$\Delta u_r = \Delta f_x,\quad \Delta^2 u_r = \Delta^2 f_x,\quad \text{etc. etc.};\quad \Delta^n u_r = \Delta^n f_x$$

*) Die m^{ten} Potenzen der Glieder einer arithmetischen Reihe der n^{ten} Ordnung ist (nach N. 2.) allemal eine arithmetische Reihe der mn^{ten} Ordnung. Also bilden die m^{ten} Potenzen der Glieder einer arithmetischen Reihe der ersten Ordnung, allemal eine arithmetische Reihe der $m \cdot 1$ d. h. der m^{ten} Ordnung. — Dies sagt auch N. 3.).

und die Gleichungen I. II. und III.) des §. 91.) gehen nun über in

$$\text{I.}\quad \begin{cases} f_{x+nh} = (1+\Delta)^n \cdot f_x = S[n_\alpha \cdot \Delta^\alpha f_x] \\ \text{d. h.} \\ f_{x+nh} = f_x + n_1 \cdot \Delta f_x + n_2 \cdot \Delta^2 f_x + n_3 \cdot \Delta^3 f_x + \cdots + n_n \cdot \Delta^n f_x \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases} \Delta^n f_x = S[(-1)^\alpha \cdot n_\alpha \cdot f_{x+(n-\alpha)h}] \\ \text{d. h.} \\ \Delta^n f_x = f_{x+nh} - n_1 \cdot f_{x+(n-1)h} + n_2 \cdot f_{x+(n-2)h} - n_3 \cdot f_{x+(n-3)h} + \cdots \\ \qquad \pm (n_{n-1} \cdot f_{x+h} - n_n \cdot f_x), \end{cases}$$

wobei man nicht übersehen mag, daß $n_n = 1$, $n_{n-1} = n$, u. s. w. ist, ferner

$$\text{III.}\quad \begin{cases} f_{x-nh} = S[(-1)^\alpha \cdot n_\alpha \cdot \Delta^\alpha f_{x-\alpha h}] \\ \text{d. h.} \\ f_{x-nh} = f_x - n_1 \cdot \Delta f_{x-h} + n_2 \cdot \Delta^2 f_{x-2h} - n_3 \cdot \Delta^3 f_{x-3h} + \cdots \\ \qquad \pm n_{n-1} \cdot \Delta^{n-1} f_{x-(n-1)h} \mp n_n \cdot \Delta^n f_{x-nh}. \end{cases}$$

Und der Satz §. 88. N. 6.) nimmt für unsere gegenwärtige Reihe folgende Form an, nämlich

IV. $f_x + f_{x+h} + f_{x+2h} + f_{x+3h} + \cdots + f_{x+(n-1)h} = \Sigma f_{x+nh} - \Sigma f_x$,

sobald man nur unter Σf_x eine Funktion versteht, welche der Gleichung $\Sigma f_{x+h} - \Sigma f_x = f_x$ genügt, während Σf_{x+h} und Σf_{x+nh} das bedeuten, was aus Σf_x hervorgeht, wenn man bezüglich $x+h$ und $x+nh$ statt x schreibt *).

Anmerkung. I. Enthält f_x den Ausdruck h noch nicht selbst, so kann man in vorliegender Formel II.) die einzelnen Glieder zur Rechten mittelst des Taylor'schen Lehrsatzes in Reihen verwandeln, welche nach ganzen Potenzen von h fortlaufen, und so verwandelt sich zuletzt $\Delta^n f_x$ selbst in eine solche Reihe, deren Koefficienten noch überdies ein sehr hübsches Gesetz befol-

*) Kann man also aus f_x finden Σf_x, so kann man die Summe der n Glieder der Reihe

$$f_x + f_{x+h} + f_{x+2h} + \cdots$$

sogleich angeben.

zen. Da nämlich die Taylor'sche Reihe genau dieselben Koefficienten hat, als die in den Elementen mit e^z bezeichnete Reihe die natürliche Potenz), so werden die Koefficienten der gedachten Reihe genau dieselben, welche man erhält, wenn die unter (e^z-1) vorgestellte Reihe zur n^{ten} Potenz erhoben wird. Man sieht daher das Endresultat symbolisch auch so ausgedrückt:

1) $$\Delta^n f_x = (e^{\partial \cdot h}-1)^n f_x,$$

indem man statt $e^{\partial \cdot h}-1$, die nach Potenzen von $\partial \cdot h$ entwikkelte Reihe gesetzt, diese mit n potenzirt sich denkt, so daß eine neue nach Potenzen von $\partial \cdot h$ geordnete Reihe hervorgeht, dann aber in jedem mit $\partial^a \cdot h^a$ behafteten Gliede die Type f_x noch zwischen ∂^a und h^a schreibt, so daß $\partial^a \cdot h^a$ in $\partial^a f_x \cdot h^a$ übergeht.

Diese Gleichung 1.) ist aber keine andere als die Gleichung des §. 100. N. 4. c.), wenn n statt m gesetzt wird, und welche dort nur angedeutet, hier aber vollständig gefunden ist. Bei dieser Gelegenheit (da $\Delta^n f_x$ nach Potenzen von h geordnet, mit einem Gliede beginnt, welches bereits den Faktor h^n enthält) erfährt man auch noch, daß die Koefficienten aller vorhergehenden Potenzen von h, welche sich bei der direkten Entwickelung aus §. 102. II.) ergeben, der Null gleich seyn müssen. Dadurch bekommt man die merkwürdigen Gleichungen

$$n^m - n_1 \cdot (n-1)^m + n_2 \cdot (n-2)^m - n_3 \cdot (n-3)^m \cdots \pm n_{n-1} \cdot 1^m = 0,$$

so oft $m < n$ ist; derselbe Ausdruck zur Linken zeigt sich aber $= n!$, so oft $m = n$ genommen wird.

II. Hat man aber auf diese Weise die n^{te} Differenz $\Delta^n f_x$ in die Ableitungen $\partial^n f_x$, $\partial^{n+1} f_x$, $\partial^{n+2} f_x$, etc. etc., ausgedrückt, so kann man auch versuchen, jede n^{te} Ableitung $\partial^n f_x$ in die Differenzen $\Delta^n f_x$, $\Delta^{n+1} f_x$, etc. etc. auszudrücken. Dies geschieht am einfachsten, wenn man f_{x+mh} einmal mittelst des Taylor'schen Lehrsatzes nach Potenzen von h entwickelt, dann aber auch

f_{x+mh} mittelst der Gleichung I.) in die Differenzen Δf_x, $\Delta^2 f_x$, $\Delta^3 f_x$, etc. etc. ausdrückt, und dann beide Ausdrücke dadurch mit einander vergleicht, daß man beide nach Potenzen von m ordnet, und zuletzt die Koefficienten der einzelnen Potenzen von m einander gleich setzt. Man erhält dann symbolisch dargestellt

2) $$\delta^n f_x \cdot h^n = [log(1+\Delta)]^n f_x,$$

wo rechts statt $log(1+\Delta)$ zuerst $\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 -$ etc. etc. gesetzt, dann solche Reihe zur n^{ten} Potenz erhoben, und wieder nach Δ geordnet wird, und wo man zuletzt an jedes Glied (hinter Δ^q) noch f_x hinzufügt.

Dieses Resultat gilt jedoch, genau genommen, nur, wenn f_x eine ganze Funktion von x ist, oder höchstens noch wenn f_x eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe ist, und im letztern Fall nur noch mit manchen Beschränkungen. Wir können uns in gegenwärtiger Schrift jedoch auf diese Untersuchungen gar nicht einlassen, und begnügen uns daher mit diesen Andeutungen.

Zweite Abtheilung.

Vom endlichen Differenziiren und vom endlichen Integriren einer Funktion f_x.

§. 103.

Von den endlichen Differenzen und Summen kann man sich aber noch folgende Gesetze bemerken:

1) Die $(r+1)^{te}$ Differenz $\Delta^{r+1} f_x$ einer Funktion f_x ist allemal die erste Differenz der Funktion $\Delta^r f_x$. — Danach sind die Differenzen Δf_x, $\Delta^2 f_x$, etc. etc. aus einander zu bestimmen, wenn man nicht sogleich auf einmal die n^{te} Differenz $\Delta^n f_x$ finden kann oder will. Die Bestimmung der Differenzen wird aber auch das (endliche) Differenziiren der Funktion f_x genannt.

2) Sind zwei Funktionen f_x und ψ_x für jeden Werth von x einander gleich (also einander identisch), so sind auch ihre Differenzen Δf_x und $\Delta\psi_x$, desgleichen $\Delta^2 f_x$ und $\Delta^2\psi_x$, etc. etc.

bezüglich einander gleich, d. h. identisch. — Jede Funktion f_x hat also eine einzige Differenz Δf_x.

3) Dagegen ist Σf_x ein vieldeutiges Zeichen, welches zunächst jede bestimmte Funktion φ_x ausdrückt, welche die Eigenschaft hat, daß

$$\Delta\varphi_x \text{ d. h. } \varphi_{x+h} - \varphi_x = f_x$$

wird, — dann aber auch die Summe $\varphi_x + C_x$ vorstellt, wenn C_x entweder von x gänzlich unabhängig (eine absolute Constante nach x) oder doch eine solche Funktion von x (z. B. $\sin\frac{2\pi x}{h}$, $\cos\frac{2\pi x}{h}$, etc. etc. etc.) ist, welche für $x = x+h$ denselben Werth annimmt, wie für $x = x$, und welche man deshalb eine periodische Constante nennen kann. — Sind daher zwei Funktionen f_x und ψ_x für jeden Werth von x einander gleich, so sind ihre Summen Σf_x und $\Sigma\psi_x$ entweder auch einander gleich, oder um eine absolute oder periodische Constante C von einander verschieden. — Das Auffinden einer solchen Funktion φ_x nennt man aber auch das (endliche) Integriren der Funktion f_x.

4) Findet man daher das besondere endliche Integral φ_x von f_x, so muß man immer noch eine solche willkührliche periodische oder absolute Constante C addiren, wenn $\varphi_x + C$ das allgemeine endliche Integral von f_x seyn soll.

5) Bezeichnet man $\sin\frac{2\pi x}{h}$ und $\cos\frac{2\pi x}{h}$ bezüglich durch s und c, so ist jede beliebige Funktion $\varphi_{s,c}$ von s und c eine solche periodische Constante. — Auch kann man jede absolute Constante (nach x) mit zu den periodischen Constanten (nach x) zählen.

6) Jedenfalls ist allemal

$$\Delta(\Sigma f_x) = f_x;$$

aber

$$\Sigma(\Delta f_x) = f_x + C_x,$$

wo C_x eine solche willkührliche periodische Constante vorstellt.

§. 104.

Allgemeine Gesetze des endlichen Differenzirens und Integrirens.

Zur Auffindung der einzelnen endlichen Differenzen und Integrale kann man sich nachstehender allgemeinen Gesetze bedienen.

Stellen nämlich C_x, C'_x etc. etc. irgend beliebige periodische oder absolute Constanten (nach x) vor, so findet sich

I. $\Delta C_x = 0$ und 1) $\Sigma 0 = C_x$;

II. $\Delta(C_x + f_x) = \Delta f_x$ und 2) $\Sigma f_x = C_x + \Sigma f_x$,

wenn unter Σf_x zur Linken das allgemeine Integral, dagegen unter Σf_x zur Rechten irgend ein besonderes Integral gedacht wird. — Ferner

III. $\Delta(\psi_x \pm \varphi_x) = \Delta\psi_x \pm \Delta\varphi_x$

und

3) $\Sigma(\psi_x \pm \varphi_x) = \Sigma\psi_x \pm \Sigma\varphi_x + C_x$;

IV. $\Delta(C_x \cdot \varphi_x) = C_x \cdot \Delta\varphi_x$

und

4) $\Sigma(C_x \cdot \varphi_x) = C_x \cdot \Sigma\varphi_x + C'_x$;

V. $\Delta(\varphi_x \cdot \psi_x) = \psi_{x+h} \cdot \Delta\varphi_x + \varphi_x \cdot \Delta\psi_x = \varphi_{x+h} \cdot \Delta\psi_x + \psi_x \cdot \Delta\varphi_x$
$= \psi_x \cdot \Delta\varphi_x + \varphi_x \cdot \Delta\psi_x + \Delta\varphi_x \cdot \Delta\psi_x$,

und

5) $\Sigma(\varphi_x \cdot \psi_x) = \varphi_x \cdot \Sigma\psi_x - \Sigma(\Delta\varphi_x \cdot \Sigma\psi_{x+h}) + C_x$,

wenn nur $\Sigma\psi_x$ irgend ein besonderes endliches Integral und $\Sigma\psi_{x+h}$ das vorstellt, was aus diesem $\Sigma\psi_x$ wird, wenn man $x+h$ statt x setzt.

Ferner ist

VI. $\Delta(f_{x+p}) = [\Delta f_x]_{x+p}$

und

6) $\Sigma(f_{x+p}) = [\Sigma(f_x)]_{x+p}$,

wenn zur Rechten unter

$[\Delta f_x]_{x+p}$ und $[\Sigma(f_x)]_{x+p}$

das verstanden wird, was bezüglich aus Δf_x und Σf_x hervorgeht, wenn zuletzt $x+p$ statt x gesetzt wird.

Die Differenzen-Formeln I.—V.) fallen von selbst in die Augen, sobald man $\Delta F_x = F_{x+h} - F_x$ nimmt. So ist z. B. nach diesem Schema

$$\Delta(\varphi_x \cdot \psi_x) = \varphi_{x+h} \cdot \psi_{x+h} - \varphi_x \cdot \psi_x.$$

Nun ist aber $\varphi_{x+h} = \varphi_x + \Delta\varphi_x$ und $\psi_{x+h} = \psi_x + \Delta\psi_x$; substituirt man daher diese Werthe statt φ_{x+h} und ψ_{x+h}, so ergiebt sich augenblicklich die V.).

Was die VI.) betrifft, so ist

$$\Delta(f_{x+p}) = f_{x+p+h} - f_{x+p}$$

und

$$\Delta(f_x) = f_{x+h} - f_x.$$

Setzt man aber in letzterer Gleichung $x+p$ statt x, so geht zur Rechten das hervor, was zur Rechten der erstern Gleichung schon steht.

Die Summen-Formeln 1.—5.) sind aber aus diesen Differenzen-Formeln, durch Umkehrung dieser letztern, gebildet. — Von der Richtigkeit derselben kann man sich auch dadurch überzeugen, daß man von den Ausdrücken zur Rechten die Differenzen nimmt und sich überzeugt, daß diese die links unter dem Σ befindlichen Funktionen wieder geben.

§. 105.

Als Differenzen und Integrale einiger der einfachsten Funktionen heben wir noch hervor:

1) $\Delta(x) = h$, also $\Sigma(1) = \frac{x}{h} + C_x$;

2) $\Delta(a^x) = a^x(a^h - 1)$, also $\Sigma(a^x) = \frac{a^x}{a^h - 1} + C_x$;

3) $\Delta^2(a^x) = a^x \cdot (a^h - 1)^2$

und $\Sigma^2(a^x) = \frac{a^x}{(a^h - 1)^2} + \Sigma(C_x) + C'_x$;

während $\Sigma C_x = C_x \cdot \Sigma(1) = C_x \cdot \frac{x}{h}$ genommen werden kann;

4) $\Delta^3(a^x) = a^x \cdot (a^h - 1)^3$

und $\Sigma^3(a^x) = \frac{a^x}{(a^h - 1)^3} + \frac{1}{h} \cdot C_x \cdot \Sigma(x) + C'_x \cdot \frac{x}{h} + C''_x$;

5) $\Delta^n(a^x) = a^x \cdot (a^h - 1)^n$.

und $\Sigma^n(a^x) = \frac{a^x}{(a^h-1)^n} + \frac{1}{h}(C_x \cdot \Sigma^{n-2}(x) + C'_x \cdot \Sigma^{n-3}(x) + \cdots + C_x^{(n-3)} \cdot \Sigma(x) + C_x^{(n-2)} \cdot x) + C_x^{(n-1)}$,

wenn nur C_x, C'_x, C''_x, etc. etc. $C_x^{(n-2)}$ und $C_x^{(n-1)}$ lauter periodische oder absolute, jedesmal aber willkührliche Constanten sind. — Ferner ist noch

6) $\Delta(x^m) = m_1 \cdot x^{m-1} \cdot h + m_2 \cdot x^{m-2} \cdot h^2 + m_3 \cdot x^{m-3} \cdot h^3 + \cdots$,

wo m_1, m_2, m_3, etc. etc. Binomial-Koefficienten sind, und wo die Reihe zur Rechten eine unendliche ist, so oft m keine positive ganze Zahl ist, dagegen mit dem Gliede h^m abbricht, so oft m eine positive ganze Zahl wirklich ist.

Das Integral $\Sigma(x^m)$ findet sich dagegen nicht so leicht, wie wir weiter unten sehen werden.

Anmerkung. Entwickelt man $\Delta^2(x^m)$ nach (steigenden) Potenzen von h, so fängt die Reihe (nach §. 100.) mit $\partial^2(x^m)_x \cdot h^2$ d. h. mit $m^{2|-1} \cdot x^{m-2} h^2$ an. Eben so fangen die nach (steigenden) Potenzen von h geordneten Reihen für $\Delta^3(x^m)$, $\Delta^4(x^m)$ etc. etc. bezüglich mit den Gliedern $m^{3|-1} \cdot x^{m-3} h^3$, $m^{4|-1} \cdot x^{m-4} h^4$, etc. etc. an. Die nach (steigenden) Potenzen von h geordnete Reihe, welche $\Delta^m(x^m)$ ausdrückt, fängt also mit dem Gliede $m^{m|-1} \cdot x^{m-m} h^m$ d. h. mit dem Gliede $m! h^m$ an.

§. 106.

Unter den öfter vorkommenden Differenzen, welche sich auch leicht finden lassen, heben wir noch heraus:

A) Ist m eine positive oder negative ganze Zahl oder Null, so ist:

1) $\Delta(x^{m|h}) = m \cdot h \cdot (x+h)^{m-1|h}$,

also $\Delta_1(x^{m|1}) = m(x+1)^{m-1|1}$;

2) $\Delta^2(x^{m|h}) = m^{2|-1} \cdot h^2 \cdot (x+2h)^{m-2|h}$,

also $\Delta_1^2(x^{mIi}) = m^{2I-1}\cdot(x+2)^{m-2Ii}$;

3) $\Delta^3(x^{mIh}) = m^{3I-1}\cdot h^3\cdot(x+3h)^{m-3Ih}$,

also $\Delta_1^3(x^{mIi}) = m^{3I-1}\cdot(x+3)^{m-3Ii}$;

und allgemein

(⊙)··· $\Delta^n(x^{mIh}) = m^{nI-1}\cdot h^n\cdot(x+nh)^{m-nIh}$,

also $\Delta_1^n(x^{mIi}) = m^{nI-1}\cdot(x+n)^{m-nIi}$,

wenn nur n positiv ganz ist.

B. Ist abermals m eine positive oder negative ganze Zahl oder Null, so ist noch

1) $\Delta(x^{mI-h}) = m\cdot h\cdot x^{m-1I-h}$,

also $\Delta_1(x^{mI-1}) = m\cdot x^{m-1I-1}$;

2) $\Delta^2(x^{mI-h}) = m^{2I-1}\cdot h^2\cdot x^{m-2I-h}$,

also $\Delta_1^2(x^{mI-1}) = m^{2I-1}\cdot x^{m-2I-1}$;

3) $\Delta^3(x^{mI-h}) = m^{3I-1}\cdot h^3\cdot x^{m-3I-h}$,

also $\Delta_1^3(x^{mI-1}) = m^{3I-1}\cdot x^{m-3I-1}$;

und allgemein

(ℂ)··· $\Delta^n(x^{mI-h}) = m^{nI-1}\cdot h^n\cdot x^{m-nI-h}$,

also $\Delta_1^n(x^{mI-1}) = m^{nI-1}\cdot x^{m-nI-1}$,

wenn n positiv ganz vorausgesetzt wird *).

C. Deshalb findet man auch noch, wenn man die Differenzen der Binomial-Koefficienten aufsucht, folgendes:

1) $\Delta\left(\left(\frac{x}{h}\right)_m\right) = \left(\frac{x}{h}\right)_{m-1}$; also $\Delta_1(x_m) = x_{m-1}$;

2) $\Delta^2\left(\left(\frac{x}{h}\right)_m\right) = \left(\frac{x}{h}\right)_{m-2}$; also $\Delta_1^2(x_m) = x_{m-2}$;

3) $\Delta^3\left(\left(\frac{x}{h}\right)_m\right) = \left(\frac{x}{h}\right)_{m-3}$; also $\Delta_1^3(x_m) = x_{m-3}$;

und allgemeiner

*) Die Formel B.1.) geht auch aus der Formel A.1.) hervor, wenn man in letzterer —h statt h schreibt, zur Rechten aber noch x+h statt x setzt, und das Ganze noch mit dem (—) Zeichen versieht, oder mit dem entgegengesetzten Zeichen nimmt.

(♂)… $\Delta^n\left(\left(\frac{x}{h}\right)_m\right) = \left(\frac{x}{h}\right)_{m-n}$; alſo $\Delta_1^n(x_m) = x_{m-n}$,

wo aber m und n zugleich poſitiv ganz vorausgeſetzt ſind.

§. 107.

Kehrt man die Formeln des §. 106.) um, ſo ergiebt ſich noch folgendes:

A. Iſt m eine poſitive oder eine negative ganze Zahl oder Null, ſo iſt:

1) $\Sigma(x^{mlh}) = \frac{(x-h)^{m+1lh}}{(m+1)\cdot h}$, alſo $\Sigma_1(x^{mll}) = \frac{(x-1)^{m+1ll}}{m+1}$;

2) $\Sigma^2(x^{mlh}) = \frac{(x-2h)^{m+2lh}}{(m+2)^{2l-1}\cdot h^2}$, alſo $\Sigma_1^2(x^{mll}) = \frac{(x-2)^{m+2ll}}{(m+2)^{2l-1}}$;

3) $\Sigma^3(x^{mlh}) = \frac{(x-3h)^{m+3lh}}{(m+3)^{3l-1}\cdot h^3}$, alſo $\Sigma_1^3(x^{mll}) = \frac{(x-3)^{m+3ll}}{(m+3)^{3l-1}}$;

und allgemein

(⊙) $\Sigma^n(x^{mlh}) = \frac{(x-n\cdot h)^{m+nlh}}{(m+n)^{nl-1}\cdot h^n}$, alſo $\Sigma_1^n(x^{mll}) = \frac{(x-n)^{m+nll}}{(m+n)^{nl-1}}$.

B. Und iſt m wiederum eine poſitive oder eine negative ganze Zahl oder Null, ſo iſt noch

1) $\Sigma(x^{ml-h}) = \frac{x^{m+1l-h}}{(m+1)\cdot h}$, alſo $\Sigma_1(x^{ml-1}) = \frac{x^{m+1l-1}}{m+1}$;

2) $\Sigma^2(x^{ml-h}) = \frac{x^{m+2l-h}}{(m+2)^{2l-1}\cdot h^2}$, alſo $\Sigma_1^2(x^{ml-1}) = \frac{x^{m+2l-1}}{(m+2)^{2l-1}}$;

3) $\Sigma^3(x^{ml-h}) = \frac{x^{m+3l-h}}{(m+3)^{3l-1}\cdot h^3}$, alſo $\Sigma_1^3(x^{ml-1}) = \frac{x^{m+3l-1}}{(m+3)^{3l-1}}$;

und allgemein

(⊂)… $\Sigma^n(x^{ml-h}) = \frac{x^{m+nl-h}}{(m+n)^{nl-1}\cdot h^n}$,

alſo $\Sigma_1^n(x^{ml-1}) = \frac{x^{m+nl-1}}{(m+n)^{nl-1}}$.

C. Und für die Binomial-Koefficienten, wenn unter m entweder Null oder eine positive ganze Zahl verstanden wird:

1) $\Sigma\left(\left(\frac{x}{h}\right)_m\right) = \left(\frac{x}{h}\right)_{m+1}$, also $\Sigma_1(x_m) = x_{m+1}$;

2) $\Sigma^2\left(\left(\frac{x}{h}\right)_m\right) = \left(\frac{x}{h}\right)_{m+2}$, also $\Sigma_1^2(x_m) = x_{m+2}$;

und allgemein

(♂)… $\Sigma^n\left(\left(\frac{x}{h}\right)_m\right) = \left(\frac{x}{h}\right)_{m+n}$, also $\Sigma_1^n(x_m) = x_{m+n}$;

Zu allen diesen endlichen Integralen müssen aber zur Rechten noch die Glieder hinzugefügt werden, welche dadurch entstehen, daß bei jeder neuen Integration eine neue willkührliche periodische Constante noch hinzutritt. Diese Glieder sind in den Formeln 2.—5. des §. 105.) zu sehen, und werden für Σ_1^n diese, nämlich

$$C_x \cdot \Sigma^{n-1}(x) + C_x' \cdot \Sigma^{n-2}(x) + C_x'' \cdot \Sigma^{n-3}(x) + \cdots + C_x^{(n-2)} \cdot \Sigma(x) + C_x^{(n-1)},$$

wo C_x, C_x', C_x'', … $C_x^{(n-1)}$ eben so viele willkührliche periodische oder absolute Constanten vorstellen.

§. 108.

Für die trigonometrischen Funktionen findet man

1) $\Delta(\sin x) = 2\sin \frac{1}{2}h \cdot \cos(x + \frac{1}{2}h)$;

2) $\Delta(\cos x) = -2\sin \frac{1}{2}h \cdot \sin(x + \frac{1}{2}h)$;

und nimmt man hiervon wieder die Differenzen, so findet man bald

I. $\begin{cases} \Delta^{2n}(\sin x) = \pm 2^{2n} \cdot (\sin \frac{1}{2}h)^{2n} \cdot \sin(x + n \cdot h); \\ \Delta^{2n+1}(\sin x) = \pm 2^{2n+1} \cdot (\sin \frac{1}{2}h)^{2n+1} \cdot \cos(x + (n + \frac{1}{2})h); \end{cases}$

so wie

II. $\begin{cases} \Delta^{2n}(\cos x) = \pm 2^{2n} \cdot (\sin \frac{1}{2}h)^{2n} \cdot \cos(x + nh); \\ \Delta^{2n+1}(\cos x) = \mp 2^{2n+1} \cdot (\sin \frac{1}{2}h)^{2n+1} \cdot \sin(x + (n + \frac{1}{2})h); \end{cases}$

wo man die obern (+ oder —) Zeichen nehmen muß, wenn n eine gerade Zahl, die untern dagegen, wenn n ungerade iſt*).

Kehrt man aber auch dieſe Formeln um, ſo findet ſich noch eben ſo leicht:

$$3)\qquad \Sigma(\cos x) = \frac{\sin(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h};$$

$$4)\qquad \Sigma(\sin x) = -\frac{\cos(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h};$$

und allgemeiner

$$\text{III.}\quad \begin{cases} \Sigma^{2n}(\cos x) = \pm\dfrac{\cos(x-n\cdot h)}{2^{2n}\cdot(\sin\frac{1}{2}h)^{2n}}; \\ \Sigma^{2n+1}(\cos x) = \pm\dfrac{\sin(x-(n+\frac{1}{2})h)}{2^{2n+1}\cdot(\sin\frac{1}{2}h)^{2n+1}}, \end{cases}$$

$$\text{IV.}\quad \begin{cases} \Sigma^{2n}(\sin x) = \pm\dfrac{\sin(x-n\cdot h)}{2^{2n}\cdot(\sin\frac{1}{2}h)^{2n}}; \\ \Sigma^{2n+1}(\sin x) = \mp\dfrac{\cos(x-(n+\frac{1}{2})\cdot h)}{2^{2n+1}\cdot(\sin\frac{1}{2}h)^{2n+1}}; \end{cases}$$

wo die obern + oder — Zeichen genommen werden müſſen, wenn m eine gerade Zahl iſt, die untern aber, wenn m ungerade gedacht wird.

Anmerkung. Weil aus $f_{x+h}-f_x=\varphi_x$, auch, ſobald x+a ſtatt x geſetzt wird, $f_{x+a+h}-f_{x+a}=\varphi_{x+a}$ hervorgeht, ſo folgt, daß, wenn $\Delta f_x=\varphi_x$ iſt, dann auch $\Delta(f_{x+a})=\varphi_{x+a}=\Delta f_{x+a}$ ſeyn müſſe. Deshalb gelten alle vorſtehenden Formeln der Differenzen noch, wenn man ſtatt Funktionen von x,

*) Legendre hat auch noch die Relation

$$\Delta^n(\sin x) = -(2\sin\tfrac{1}{2}h)^2\cdot[\Delta^{n-1}(\sin x)+\Delta^{n-2}(\sin x)]$$

hingeſtellt. Sie läßt ſich leicht beweiſen; auch dadurch leicht finden, daß man $\Delta^{2a}(\sin x)$ und $\Delta^{2a+1}(\sin x)$ der Form nach, aber mit unbeſtimmten Koefficienten annimmt und dann die Vergleichung anſtellt. Doch muß der Beweis, oder die Aufſuchung zweimal durchgeführt werden; einmal für den Fall, daß n eine gerade Zahl, und dann noch für den andern Fall, daß n ungerade iſt.

Funktionen von $x+a$ nimmt, während a selbst noch h enthalten kann.

§. 109.

Aufgabe.

Man soll die Summe $\Sigma(x^m)$ finden unter der Voraussetzung, daß m eine positive ganze Zahl ist.

Auflösung. A. Man hat (nach §. 105. N. 6.)

$$\Delta(x^r) = r\cdot x^{r-1}\cdot h + r_2\cdot x^{r-2}\cdot h^2 + r_3\cdot x^{r-3}\cdot h^3 + \cdots + r\cdot x\cdot h^{r-1} + h^r.$$

Nimmt man nun hier links und rechts die Summe (das endliche Integral nach x), so erhält man, wenn noch überdies m statt $r-1$ gesetzt wird, ohne viele weitere Rechnung

$$(\odot)\cdots \quad \Sigma(x^m) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - [\tfrac{1}{2}m\cdot h\cdot\Sigma(x^{m-1}) + \tfrac{1}{3}m_2\cdot h^2\cdot\Sigma(x^{m-2}) + \cdots + \frac{1}{m+1}\cdot h^m\cdot\Sigma(1)].$$

B. Diese Formel giebt nun, wenn nach und nach 0, 1, 2, 3, 4, etc. etc. statt m gesetzt wird,

1) $\Sigma(x^0) = \frac{x}{h}$; d. h. $\Sigma(1) = \frac{x}{h}$;

2) $\Sigma(x^1) = \frac{1}{2}\frac{x^2}{h} - \frac{1}{2}x$; d. h. $\Sigma(x) = \frac{1}{2}\frac{x^2}{h} - \frac{1}{2}x$;

3) $\Sigma(x^2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{h} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot 3}x\cdot h$;

4) $\Sigma(x^3) = \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{h} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2\cdot 2}x^2\cdot h$;

5) $\Sigma(x^4) = \frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{h} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3\cdot h - \frac{1}{5\cdot 6}x\cdot h^3$;

6) $\Sigma(x^5) = \frac{1}{6}\cdot\frac{x^6}{h} - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{2\cdot 6}x^4\cdot h - \frac{1}{2\cdot 6}x^2\cdot h^3$;

u. s. w. f.

C. Um aber das Gesetz besser zu übersehen, nach welchem sich diese Zahlen-Koefficienten richten, so setze man

1) $$\Sigma(x^m) = A\cdot x^{m+1} + B_0\cdot x^m + B_1\cdot x^{m-1} + B_2\cdot x^{m-2} + B_3\cdot x^{m-3} + \cdots,$$

nehme links und rechts die Differenzen, ſo daß man erhält

2) $$x^m = A(m+1)\cdot x^m\cdot h + \left[\begin{matrix}A(m+1)_2\cdot h^2\\ +B_0 m_1\cdot h\end{matrix}\right]\cdot x^{m-1} + \left|\begin{matrix}A(m+1)_3\cdot h^3\\ +B_0 m_2\cdot h_2\\ +B_1(m-1)_1\cdot h\end{matrix}\right|\cdot x^{m-2}$$
$$+ [A(m+1)_4\cdot h^4 + B_0 m_3\cdot h^3 + B_1(m-1)_2\cdot h^2 + B_2(m-2)_1\cdot h]\cdot x^{m-3} + \text{etc. etc.}$$

Hieraus folgt

$$1 = A(m+1)h;$$

während jeder der übrigen Koefficienten (von x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}, etc. etc.) zur Rechten, der Null gleich iſt. Aus dieſen Gleichungen ergiebt ſich nun

$$A = \frac{1}{(m+1)\cdot h},$$

und jeder der folgenden Koefficienten B_0, B_1, B_2, etc. etc. durch die vorhergehenden ausgedrückt, nach einem in die Augen fallenden Geſetze. Berechnet man danach die erſten 12 Koefficienten, ſo erhält man zuletzt

3) $$\Sigma(x^m) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \tfrac{1}{2}x^m + \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\tfrac{1}{2}m\cdot h\cdot x^{m-1}$$
$$- \frac{1}{6\cdot 5}\cdot\tfrac{1}{4}m_3\cdot h^3\cdot x^{m-3} + \frac{1}{6\cdot 7}\cdot\tfrac{1}{6}m_5\cdot h^5\cdot x^{m-5}$$
$$- \frac{3}{10\cdot 9}\cdot\tfrac{1}{8}m_7\cdot h^7\cdot x^{m-7} + \frac{5}{6\cdot 11}\cdot\tfrac{1}{10}m_9\cdot h^9\cdot x^{m-9}$$
$$- \frac{691}{210\cdot 13}\cdot\tfrac{1}{12}m_{11}\cdot h^{11}\cdot x^{m-11} + \frac{35}{2\cdot 15}\cdot\tfrac{1}{14}m_{13}$$
$$\times h^{13}\cdot x^{m-13} - \frac{3617}{30\cdot 17}\cdot\tfrac{1}{16}\cdot m_{15}\cdot h^{15}\cdot x^{m-15}$$
$$+ \frac{43867}{42\cdot 19}\cdot\tfrac{1}{18}m_{17}\cdot h^{17}\cdot x^{m-17}$$
$$- \frac{1222277}{110\cdot 21}\cdot\tfrac{1}{20}m_{19}\cdot h^{19}\cdot x^{m-19} + \text{etc. etc.}$$

Diese Reihe bricht für jeden besondern Werth von m, welcher der gemachten Voraussetzung zufolge eine positive ganze Zahl seyn muß, von selber ab, so daß nie eine negative Potenz von x erscheint.

D. Diese Formel 3.) befolgt ein in die Augen fallendes Gesetz, sobald man auf die Zahlen-Koefficienten nicht Rücksicht nimmt. Bezeichnet man diese Zahlen-Koefficienten, deren Gesetz noch nicht einleuchtet, durch $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_5$, $\mathfrak{B}_7$, etc. etc., so kann man diese Formel 3.) auch so schreiben, nämlich

$$(\mathfrak{C})\cdots\quad \Sigma(x^m) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\cdot h} - \tfrac{1}{2}x^m + \mathfrak{B}_1\cdot m_1\cdot\frac{h}{2}\cdot x^{m-1} - \mathfrak{B}_3\cdot m_3\cdot\frac{h^3}{4}\cdot x^{m-3} + \mathfrak{B}_5\cdot m_5\cdot\frac{h^5}{6}\cdot x^{m-5} - \mathfrak{B}_7\cdot m_7\cdot\frac{h^7}{8}\cdot x^{m-7} + \mathfrak{B}_9\cdot m_9\cdot\frac{h^9}{10}\cdot x^{m-9} - \text{etc.}$$

und man nennt die Koefficienten $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_5$, $\mathfrak{B}_7$, $\mathfrak{B}_9$, etc. etc. die Bernoulli'schen Zahlen*).

Um das Gesetz zu erhalten, nach welchem diese Koefficienten sich richten, hat Moivre diese Summe $\Sigma(x^m)$ zwischen den Grenzen x und $x+h$ genommen, und dann 0 statt x gesetzt. Da nämlich

$$[\Sigma(x^m)]_{x+h} - \Sigma(x^m) = \Delta(\Sigma(x^m)) = x^m$$

ist; da es ferner einerlei ist, ob man $x+h$ statt x und dann $x=0$, oder lieber sogleich $0+h$ d. h. h statt x setzt; und weil endlich die Glieder rechts (in $\mathfrak{C}$.) für $x=0$ verschwinden, so erhält man auf diesem Wege, nachdem durch h^m noch wegdividirt worden, die Gleichung:

---

*) Jacob Bernoulli ist auf diese Zahlen zuerst gestoßen, indem sie den Koefficienten des letzten Gliedes bilden in dem Ausdrucke, welcher die Summe der unendlichen Reihe

$$S\left[\frac{1}{(a+1)^{2n}}\right] \text{ oder } 1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\cdots \text{ in inf.}$$

liefert.

$$(\delta)\cdots\quad 0=\frac{1}{m+1}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}m_1\cdot\mathfrak{B}_1-\tfrac{1}{4}m_3\cdot\mathfrak{B}_3+\tfrac{1}{6}m_5\cdot\mathfrak{B}_5 -\tfrac{1}{8}m_7\cdot\mathfrak{B}_7+\text{etc. etc.}$$

Und setzt man hier nach und nach 2, 4, 6, 8, etc. etc. statt m, so erhält man zur Bestimmung der Bernoulli'schen Zahlen, die Gleichungen:

1) $0=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\mathfrak{B}_1$;
2) $0=\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\mathfrak{B}_1-\mathfrak{B}_3$;
3) $0=\frac{1}{7}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\mathfrak{B}_1-\frac{1}{4}\cdot 6_3\cdot\mathfrak{B}_3+\mathfrak{B}_5$;
4) $0=\frac{1}{9}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\mathfrak{B}_1-\frac{1}{4}\cdot 8_3\cdot\mathfrak{B}_3+\frac{1}{6}\cdot 8_5\cdot\mathfrak{B}_5-\mathfrak{B}_7$;
5) $0=\frac{1}{11}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\mathfrak{B}_1-\frac{1}{4}\cdot 10_3\cdot\mathfrak{B}_3+\frac{1}{6}\cdot 10_5\cdot\mathfrak{B}_5 -\frac{1}{8}\cdot 10_7\cdot\mathfrak{B}_7+\mathfrak{B}_9$;

u. s. w. f.

Berechnet man danach diese Bernoulli'schen Zahlen, so erhält man

$$\mathfrak{B}_1=0{,}1666666666666$$
$$\mathfrak{B}_3=0{,}0333333333333$$
$$\mathfrak{B}_5=0{,}0238095238095$$
$$\mathfrak{B}_7=0{,}0333333333333$$
$$\mathfrak{B}_9=0{,}0757575757575$$
$$\mathfrak{B}_{11}=0{,}2531135531135$$
$$\mathfrak{B}_{13}=1{,}1666666666666$$
$$\mathfrak{B}_{15}=7{,}0921568627451$$

u. s. w. f.

Die ersten 15 dieser Bernoulli'schen Zahlen findet man von Euler berechnet. Die nächsten 10 (also bis zur 25ten inklusive) hat Rothe berechnet und in der Hallenser allgemeinen Litteratur-Zeitung März 1817. Nro. 63. mitgetheilt. — Später hat Rothe noch die folgenden 6 berechnet (also bis zur 31ten inkl.), welche wir im Manuscripte vor uns liegen haben, und welche wir, einem erhaltenen Auftrage gemäß, der Redaktion des Crelle'schen Journals für Mathematik zur Bekanntmachung zusenden werden.

§. 110.

Ist aber die Aufgabe des §. 109.) gelöst, so kann man die Summe (das endliche Integral) von jeder ganzen Funktion von x finden, weil man hat

$$\Sigma(A\cdot x^{\alpha}+B\cdot x^{\beta}+C\cdot x^{\gamma}+\cdots)=A\cdot\Sigma(x^{\alpha})+B\cdot\Sigma(x^{\beta})+C\cdot\Sigma(x^{\gamma})+\cdots$$

Dieſelbe läßt ſich aber auch genau ſo finden, wie im vorhergehenden §. 109.) die Summe $\Sigma(x^m)$ gefunden worden iſt. Man nimmt nämlich

$$\Sigma(A_0\cdot x^m+A_1\cdot x^{m-1}+A_2\cdot x^{m-2}+\cdots)=A\cdot x^{m+1}+B_0\cdot x^m+B_1\cdot x^{m-1}+B_2\cdot x^{m-2}+\text{etc. etc.}$$

an, nimmt links und rechts die Differenzen, und vergleicht dann auf jeder Seite die gleichnamigen Glieder mit einander, und man wird die Gleichungen haben, aus denen ſich die unbeſtimmten Koefficienten A und B_0, B_1, B_2, etc. etc. finden laſſen.

§. 111.

Zur Auffindung der Summen (der endlichen Integrale) von gebrochenen algebraiſchen rationalen Funktionen von x, hat man außer den Formeln A. B. des §. 107.), wenn m negativ gedacht wird, faſt gar nichts. Man pflegt gewöhnlich noch die Formel

$$\Delta\left(\frac{A}{x+a}\right)=\frac{A}{x+a+h}-\frac{A}{x+a}$$

umzukehren, ſo daß man

$$(\mathfrak{Q})\cdots\qquad \Sigma\left(\frac{A}{x+a+h}-\frac{A}{x+a}\right)=\frac{A}{x+a}$$

oder

$$\Sigma\left(\frac{A}{x+a+h}\right)=\Sigma\left(\frac{A}{x+a}\right)+\frac{A}{x+a}$$

erhält. Hernach zerlegt man die gebrochene Funktion, deren Summe gefunden werden ſoll, in Parzialbrüche, und ſucht letztere paarweiſe ſo zu ordnen, daß allemal die Summe (das Integral) eines Paares nach der Formel $\mathfrak{Q}$.) gefunden werden kann.

Soll z. B. $\Sigma\left(\frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)}\right)$ gefunden werden, ſo zerlegt man zunächſt den gegebenen Bruch in ſeine Partial-Brüche, ſo daß man erhält

$$1)\qquad \frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)}=\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{x+h}-\frac{2}{h}\cdot\frac{1}{x+2h}.$$

$$(\sigma)\cdots\quad 0=\frac{1}{m+1}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}m_1\cdot\mathfrak{B}_1-\tfrac{1}{4}m_2$$

Und ſetzt man hier nach und nach

ſtatt m, ſo erhält man zur Beſtimmu

Zahlen, die Gleichungen:

1) $0=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\mathfrak{B}_1;$

2) $0=\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\mathfrak{B}_1-$

3) $0=\frac{1}{7}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\mathfrak{B}_1$

4) $0=\frac{1}{9}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\mathfrak{B}$

5) $0=\frac{1}{11}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1$

u. ſ. w. f.

$$x=-\frac{1}{h}\cdot\frac{3x+2h}{x(x+h)}$$

Berechnet man

112.

erhält man

Summen (d. h. die endlichen S

algebraiſchen Funktionen, über we

wenig oder nichts ſagen kann, und ſuchen

die Summen von einigen beſonderen Formen t

Funktionen.

Man findet die Summe

1) $\Sigma(a^x\cdot(A_0+A_1\cdot x+A_2\cdot x^2+A_3\cdot x^3+\cdots+A_m\cdot x^m$

dadurch, daß man ſolche

2) $=a^x\cdot(K_0+K_1\cdot x+K_2\cdot x^2+K_3\cdot x^3+\cdots+K_m\cdot x$

ſetzt, dann von beiden Seiten dieſer Gleichung die Differen

nimmt, und nun die gleichnamigen Glieder mit einander

gleicht. Man findet auf dieſem Wege:

$A_0=-K_0+a^h\cdot(K_0+K_1\cdot h+K_2\cdot h^2+\cdots+K_m\cdot h^m)$

$A_1=-K_1+a^h\cdot(K_1+2K_2\cdot h+3K_3\cdot h^2+\cdots+mK_m\cdot h^{m-1}$

$A_2=-K_2+a^h\cdot(K_2+3K_3\cdot h+6K_4\cdot h^2+\cdots+m_2K_m\cdot h^{m-}$

$A_3=-K_3+a^h\cdot(K_3+4K_4\cdot h+\cdots+m_3K_m\cdot h^{m-}$

u. ſ. w. f.; zuletzt

$A_m=-K_m+a^h\cdot K_m;$

Gleichungen die unbestimmten Koefficienten K_0, 'c. etc. K_m sich bestimmen lassen.

$$\frac{\cdot_1 \cdot h + A_2 \cdot h^2) - a^h(2A_0 - A_1 \cdot h - A_2 \cdot h^2) + A_0}{(a^h - 1)^3}$$

$$+ a^x \cdot \frac{a^h(A_1 - 2A_2 \cdot h) - A_1}{(a^h - 1)^2} \cdot x + a^x \cdot \frac{A_2}{a^h - 1} \cdot x^2.$$

.. Will man

$$\Sigma(\sin x^m \cdot \cos x^n)$$

finden, unter der Voraussetzung, daß m und n positive ganze Zahlen sind, so verwandle man die Funktion $\sin x^m \cdot \cos x^n$ in eine Reihe von Gliedern von der Form

$$A \cdot \sin qx \quad \text{und} \quad A \cdot \cos qx$$

und nehme dann von jedem einzelnen Gliede das endliche Integral, indem man folgende Formeln anwendet, nämlich

$$1) \qquad \Sigma \sin(p + qx) = -\frac{\cos(p + qx - \frac{1}{2}q \cdot h)}{2\sin(\frac{1}{2}q \cdot h)};$$

$$2) \qquad \Sigma \cos(p + qx) = \frac{\sin(p + qx - \frac{1}{2}q \cdot h)}{2\sin(\frac{1}{2}q \cdot h)};$$

Und ist ein Glied dabei von der Form

$$A \cdot \cos 0x \quad \text{oder} \quad A,$$

so bekommt die Summe noch das Glied $A\frac{x}{h}$.

C. Man hat auch noch versucht die Summen

$$\Sigma(x^{\prime p} \cdot \sin x) \quad \text{und} \quad \Sigma(x^{\prime p} \cdot \cos x)$$

zu finden, unter der Voraussetzung, daß x' eine gegebene Funktion von x ist, deren zu der Differenz h von x gehörige Differenz $\Delta(x')$ durch h' bezeichnet seyn mag. — Das Verfahren dabei ist dasselbe, wie das vorher beobachtete. Man geht nämlich von einer dazu geeigneten Differenz aus, oder von zweien, findet aus den Gleichungen die Ausdrücke $x^{\prime p} \cdot \sin x$ und $x^{\prime p} \cdot \cos x$, und nimmt dann von diesen neuen Gleichungen

Man hat nun nach der Formel (Q)

2) $$\Sigma\left(\frac{1}{x+2h}\right)=\Sigma\left(\frac{1}{x+h}\right)+\frac{1}{x+h};$$

und

3) $$\Sigma\left(\frac{1}{x+h}\right)=\Sigma\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x};$$

also

4) $$\Sigma\left(\frac{1}{x+2h}\right)=\Sigma\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+h}.$$

Man erhält daher, wenn man von 1.) links und rechts die Summen nimmt, dann aber rechts statt $\Sigma\frac{1}{x+2h}$ und $\Sigma\frac{1}{x+h}$ ihre Werthe aus 3. und 4.) substituirt,

$$\Sigma\frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)}=-\frac{2}{h}\cdot\frac{1}{x+h}-\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{1}{h}\cdot\frac{3x+2h}{x(x+h)}.$$

§. 112.

Uebergehen wir die Summen (d. h. die endlichen Integrale) der irrationalen algebraischen Funktionen, über welche man methodisch wenig oder nichts sagen kann, und suchen wir bloß noch die Summen von einigen besonderen Formen transcendenter Funktionen.

A. Man findet die Summe

1) $$\Sigma(a^x\cdot(A_0+A_1\cdot x+A_2\cdot x^2+A_3\cdot x^3+\cdots+A_m\cdot x^m))$$

dadurch, daß man solche

2) $$=a^x\cdot(K_0+K_1\cdot x+K_2\cdot x^2+K_3\cdot x^3+\cdots+K_m\cdot x^m)$$

setzt, dann von beiden Seiten dieser Gleichung die Differenzen nimmt, und nun die gleichnamigen Glieder mit einander vergleicht. Man findet auf diesem Wege:

$$A_0=-K_0+a^h\cdot(K_0+K_1\cdot h+K_2\cdot h^2+\cdots+K_m\cdot h^m)$$
$$A_1=-K_1+a^h\cdot(K_1+2K_2\cdot h+3K_3\cdot h^2+\cdots+mK_m\cdot h^{m-1})$$
$$A_2=-K_2+a^h\cdot(K_2+3K_3\cdot h+6K_4\cdot h^2+\cdots+m_2K_m\cdot h^{m-2})$$
$$A_3=-K_3+a^h\cdot(K_3+4K_4\cdot h+\cdots+m_3K_m\cdot h^{m-3})$$

u. s. w. f.; zuletzt

$$A_m=-K_m+a^h\cdot K_m;$$

aus welchen Gleichungen die unbestimmten Koefficienten K_0, K_1, K_2, K_3, etc. etc. K_m sich bestimmen lassen.

So findet man

$$\Sigma(a^x(A_0+A_1x+A_2x^2)) = a^x\cdot\frac{a^{2h}(A_0-A_1\cdot h+A_2\cdot h^2)-a^h(2A_0-A_1\cdot h-A_2\cdot h^2)+A_0}{(a^h-1)^3} + a^x\cdot\frac{a^h(A_1-2A_2\cdot h)-A_1}{(a^h-1)^2}\cdot x+a^x\cdot\frac{A_2}{a^h-1}\cdot x^2.$$

B. Will man

$$\Sigma(sin\, x^m\cdot cos\, x^n)$$

finden, unter der Voraussetzung, daß m und n positive ganze Zahlen sind, so verwandle man die Funktion $sin\, x^m\cdot cos^s x^n$ in eine Reihe von Gliedern von der Form

$$A\cdot sin\, qx \quad \text{und} \quad A\cdot cos\, qx$$

und nehme dann von jedem einzelnen Gliede das endliche Integral, indem man folgende Formeln anwendet, nämlich

1) $$\Sigma sin\,(p+qx) = -\frac{cos\,(p+qx-\frac{1}{2}q\cdot h)}{2sin\,(\frac{1}{2}q\cdot h)};$$

2) $$\Sigma cos\,(p+qx) = \frac{sin\,(p+qx-\frac{1}{2}q\cdot h)}{2sin\,(\frac{1}{2}q\cdot h)};$$

Und ist ein Glied dabei von der Form

$$A\cdot cos\, 0x \quad \text{oder} \quad A,$$

so bekommt die Summe noch das Glied $A\frac{x}{h}$.

C. Man hat auch noch versucht die Summen

$$\Sigma(x'^{p}\cdot sin\, x) \quad \text{und} \quad \Sigma(x'^{p}\cdot cos\, x)$$

zu finden, unter der Voraussetzung, daß x' eine gegebene Funktion von x ist, deren zu der Differenz h von x gehörige Differenz $\Delta(x')$ durch h' bezeichnet seyn mag. — Das Verfahren dabei ist dasselbe, wie das vorher beobachtete. Man geht nämlich von einer dazu geeigneten Differenz aus, oder von zweien, findet aus den Gleichungen die Ausdrücke $x'^{p}\cdot sin\, x$ und $x'^{p}\cdot cos\, x$, und nimmt dann von diesen neuen Gleichungen

wieder die Summe, in der Hoffnung dadurch Reduktionsformeln zu bekommen, wie dies im §. 109.) der Fall gewesen ist, wo $\Sigma(x^m)$ in $\Sigma(x^{m-1})$, $\Sigma(x^{m-2})$, $\Sigma(x^{m-3})$, etc. etc. ausgedrückt sich gezeigt hat.

Die Durchführung der Rechnung ist folgende:

Es ist, wenn man die Differenzen nach x nimmt, d. h. statt jedes x jetzt $x+h$, und deshalb statt x^l jetzt $x^l+\Delta x^l$ d. h. x^l+h^l schreibt, und die Funktion im alten Zustande von ihr im neuen Zustande subtrahirt,

1) $\Delta((x^l-h^l)^p \cdot cos\,(x-\frac{1}{2}h)) = x^{lp} \cdot cos\,(x+\frac{1}{2}h)$
$-(x^l-h^l)^p \cdot cos\,(x-\frac{1}{2}h) = (p_1 \cdot x^{lp-1} \cdot h^l - p_2 \cdot x^{lp-2} \cdot h^{l^2}$
$+p_3 \cdot x^{lp-3} \cdot h^{l^3} - \ldots) \cdot cos\,(x-\frac{1}{2}h) + x^{lp} \cdot [cos\,(x+\frac{1}{2}h)$
$-cos\,(x-\frac{1}{2}h)]$

2) $\Delta((x^l-h^l)^p \cdot sin\,(x-\frac{1}{2}h)) = x^{lp} \cdot sin\,(x+\frac{1}{2}h)$
$-(x^l-h^l)^p \cdot sin\,(x-\frac{1}{2}h) = (p_1 \cdot x^{lp-1} \cdot h^l - p_2 \cdot x^{lp-2} \cdot h^{l^2}$
$+p_3 \cdot x^{lp-3} \cdot h^{l^3} - \ldots) \cdot sin\,(x-\frac{1}{2}h) + x^{lp} \cdot [sin\,(x+\frac{1}{2}h)$
$-sin\,(x-\frac{1}{2}h)]$.

Findet man nun aus diesen Gleichungen 1.) und 2.), nachdem man vorher die Differenzen der Kosinus und der Sinus in Produkte verwandelt hat, so daß $x^{lp} \cdot sin\,x$ und $x^{lp} \cdot cos\,x$ darin erscheinen, die Werthe dieser letztern, und nimmt man dann von diesen neuen Gleichungen links und rechts die Summen nach x, so erhält man, wenn zu gleicher Zeit h^l d. h. Δx^l nach x constant gedacht wird,

3) $\Sigma(x^{lp} \cdot sin\,x) = -\frac{(x^l-h^l)^p \cdot cos\,(x-\frac{1}{2}h)}{2sin\,\frac{1}{2}h} + \frac{1}{2sin\,\frac{1}{2}h}$
$\times \{p_1 \cdot h^l \cdot \Sigma(x^{lp-1} \cdot cos\,(x-\frac{1}{2}h)) - p_2 \cdot h^{l^2} \cdot \Sigma x^{lp-2} \cdot cos\,(x-\frac{1}{2}h)$
$+p_3 \cdot h^3 \cdot \Sigma x^{lp-3} \cdot cos\,(x-\frac{1}{2}h) - \text{ etc. etc.}\}$

4) $\Sigma(x^{lp} \cdot cos\,x) = \frac{(x^l-h^l)^p \cdot sin\,(x-\frac{1}{2}h)}{2sin\,\frac{1}{2}h} - \frac{1}{2sin\,\frac{1}{2}h}$
$\times \{p_1 \cdot h \cdot \Sigma x^{lp-1} \cdot sin\,(x-\frac{1}{2}h) - p_2 \cdot h^2 \cdot \Sigma x^{lp-2} \cdot sin\,(x-\frac{1}{2}h)$
$+p_3 \cdot h^3 \cdot \Sigma x^{lp-3} \cdot sin\,(x-\frac{1}{2}h) - \text{ etc. etc.}\}$.

Dies sind die gesuchten Reduktions-Formeln *). — Setzt man in ihnen nach und nach 1, 2, 3, 4, 5, etc. etc. statt p, so erhält man die verlangten Summen aus einander.

Namentlich findet sich für $p=1$, wenn man zugleich die Formeln B. 1. und 2.) zu Hülfe nimmt,

$$5)\quad \Sigma(x'\cdot \sin x) = -\frac{(x'-h')\cdot \cos(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} + \frac{h'\cdot \sin(x-\frac{1}{2}h}{2(\sin\frac{1}{2}h)^2};$$

und

$$6)\quad \Sigma(x'\cdot \cos x) = \frac{(x'-h')\cdot \sin(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} + \frac{h'\cdot \cos(x-\frac{1}{2}h)}{2(\sin\frac{1}{2}h)^2}.$$

Weil aber h' nach x constant gedacht worden, so folgt aus

$$\Delta x' = h'$$

sogleich, wenn man die Integrale nach x nimmt,

$$7)\quad x' = \frac{h'}{h}x + C_x,$$

wo C_x entweder eine absolute, oder doch eine periodische Constante ist.

Die Formeln 3.—6.) gelten also nur dann, wenn x' keine andere Funktion von x, als nur von der Form 7.), d. h. von der Form

$$x' = a\cdot x + C_x$$

ist, wo a eine absolute Constante (nach x), C_x aber entweder eine absolute oder doch eine periodische Constante ist.

Namentlich sind also durch die Formeln 5.) und 6.) die Summen

$$\Sigma((ax+b)^p\cdot \sin x) \quad \text{und} \quad \Sigma((ax+b)^p\cdot \cos x)$$

zu finden, indem man in jene

$$x' = ax+b \quad \text{und deshalb auch} \quad h' = a\cdot h$$

setzt.

---

*) Dächte man h' nicht nach x constant, so müßten in diesen Formeln die Potenzen von h', welche jetzt außerhalb der Summen-Zeichen gesetzt sind, unter dem Σ Zeichen gesetzt werden; und dann wären die Formeln 3.) und 4.) keine Reduktions-Formeln mehr.

§. 113.

Nach diesen Versuchen, die Summen für einzelne besondere Funktionen zu finden, wollen wir noch zu allgemeineren Reductions-Formeln zu gelangen suchen.

Bereits im §. 104. N. 5.) haben wir gefunden

1) $$\Sigma(P_x \cdot Q_x) = Q \cdot \Sigma P_x - \Sigma(\Delta Q_x \cdot \Sigma P_{x+h}),$$

und die Anwendung dieser Formel nennt man die theilweise Integration. Wendet man nun auf die Summe im zweiten Gliede rechts dieselbe Formel wiederum an und substituirt man den dadurch für $\Sigma(\Delta Q_x \cdot \Sigma P_{x+h})$ erhaltenen Ausdruck in die 1.), so ergiebt sich

2) $$\Sigma(P_x \cdot Q_x) = Q \cdot \Sigma P_x - \Delta Q \cdot \Sigma^2 P_{x+h} + \Sigma(\Delta^2 Q \cdot \Sigma^2 P_{x+2h}).$$

Wendet man hier auf das dritte Glied zur Rechten die Formel 1.) noch einmal an, so erhält man nach geschehener Substitution in 2.)

3) $$\Sigma(P_x \cdot Q_x) = Q \cdot \Sigma P_x - \Delta Q \cdot \Sigma^2 P_{x+h} + \Delta^2 Q \cdot \Sigma^3 P_{x+2h} - \Sigma(\Delta^3 Q \cdot \Sigma^3 P_{x+3h}).$$

Zuletzt erhält man auf diesem Wege noch

$$(\odot)\cdots \quad \Sigma(P_x \cdot Q_x) = S\underset{a+b=\mu}{[(-1)^a \cdot \Delta^a Q_x \cdot \Sigma^{1+a} P_{x+a \cdot h}]} + (-1)^{\mu+1} \Sigma(\Delta^{\mu+1} Q_x \cdot \Sigma^{\mu+1} P_{x+(\mu+1)h}).$$

Dies ist die von Taylor in den philosophical transactions gegebene Formel. — Condorcet hat sie in seinem Essai sur l'application de l'Analyse à la probabilité des décisions p. 163. dadurch umgeformt, daß er P_x, P_{x+h}, P_{x+2h}, P_{x+3h}, etc. etc. als Glieder einer Ur-Reihe ansieht, und sie in die ersten Glieder ihrer Differenz-Reihen ausdrückt. Nach §. 102. 1.) hat man nämlich

4) $$P_{x+m \cdot h} = S\underset{b+c=m}{[m_c \cdot \Delta^c P_x]}.$$

Setzt man daher hier zuerst a, dann $\mu+1$ statt m, und dann den jedesmaligen Werth zur Rechten aus 4.) statt $P_{x+a \cdot h}$ und

statt $P_{x+(\mu+1)h}$ in die Formel ⊙.), so erhält man nach gehöriger Reduktion, weil $\Sigma^{a+1}(\Delta^c P_x) = \Sigma^{a-c+1} P_x$ ist,

$$(\mathbb{C}) \ldots \quad \Sigma(P_x \cdot Q_x) = S\left[(-1)^a \cdot a_c \cdot \Delta^a Q_x \cdot \Sigma^{b+1} P_x\right]_{b+c=a,\ a+b=\mu} + (-1)^{\mu+1} \cdot S\left[(\mu+1)_c \cdot \Sigma(\Delta^{\mu+1} Q_x \cdot \Sigma^{\mu+1-c} P_x)\right]_{c+b=\mu+1}.$$

Condorcet giebt dieselbe jedoch viel unvollständiger als wir sie hier gegeben haben. In allen den Fällen aber, in denen $\Delta^{\mu+1} Q_x = 0$ wird, also so oft Q_x eine ganze Funktion von x ist, vom μ^{ten} Grade, verwandelt sich unser zweites Aggregat in $\Sigma(0)$ d. h. in eine periodische Constante, und das erstere Aggregat enthält dann genau das Gesetz des Condorcet, nämlich

$$\Sigma(P_x \cdot Q_x) = Q_x \cdot \Sigma P_x - \Delta Q(\Sigma^2 P_x + \Sigma P_x) + \Delta^2 Q_x \cdot (\Sigma^3 P_x + 2\Sigma^2 P_x + \Sigma P_x) - \Delta^3 Q_x \cdot (\Sigma^4 P_x + 3\Sigma^3 P_x + 3\Sigma^2 P_x + \Sigma P_x) + \text{etc. etc.}$$

§. 114.

Setzt man in der Formel des §. 113.) $P_x = a^x$, so erhält man, weil dann

$$\Sigma^{1+a} P_{x+ah} = \frac{a^{x+ah}}{(a^h - 1)^{1+a}}$$

ist, sogleich

$$\Sigma(a^x \cdot Q_x) = \frac{1}{a^h - 1} \cdot S\left[(-1)^a \cdot \Delta^a Q_x \cdot a^x \cdot \left(\frac{a^h}{a^h - 1}\right)^a\right]_{a+b=\mu} + (-1)^{\mu-1} \cdot \left(\frac{a^h}{a^h - 1}\right)^{\mu+1} \cdot \Sigma(a^x \cdot \Delta^{\mu+1} Q_x).$$

Nach diesen Formeln kann man die Summen finden

1) von jeder Funktion von der Form

$$\frac{A \cdot x^\alpha + B \cdot x^\beta + C \cdot x^\gamma + \cdots}{x^{nlh}},$$

wenn α, β, γ, etc. etc. ganze positive Zahlen und zu gleicher Zeit $< n-1$ sind;

2) von $a^{mx} \cdot (A \cdot x^\alpha + B \cdot x^\beta + C \cdot x^\gamma + \cdots)$,

es mag m eine positive oder negative ganze Zahl seyn, wenn nur α, β, γ, etc. positiv ganz sind *);

*) Die im §. 112. A.) gefundene Summe, welche dort direkt gefun-

3) von jeder Funktion von der Form

$$\sin x^m \cdot \cos x^n \cdot (A \cdot x^\alpha + B \cdot x^\beta + C \cdot x^\gamma + \cdots)$$

wenn m und n positiv ganz sind, eben so wie α, β, γ, etc. etc.; indem man das Produkt $\sin x^m \cdot \cos x^n$ in Sinus und Kosinus der Vielfachen von x umformt.

Und dies ist ohngefähr alles, was sich über die Auffindung der Summen (d. h. der endlichen Integrale) der Funktionen eines einzigen Veränderlichen x, im Allgemeinen, lehren läßt.

§. 115.

Das Verfahren, dessen wir uns im §. 109.) bedient haben, um $\Sigma(x^m)$ in eine nach steigenden Potenzen von h fortlaufende Reihe zu verwandeln, kann man zu verallgemeinern trachten, um durch dasselbe allgemein $\Sigma(f_x)$ in eine nach steigenden Potenzen von h geordnete Reihe umzuwandeln.

A. Man geht nämlich (so wie dort von x^r, welches nicht x^m ist) hier wiederum von einer Funktion z_x aus, welche nicht die gegebene f_x ist, und hat nun, wegen $\Delta z_x = z_{x+h} - z_x$, nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$1) \quad \Delta z_x = \partial z_x \cdot h + \partial^2 z_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 z_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \partial^4 z_x \cdot \frac{h^4}{4!} + \cdots.$$

Nimmt man hier nun wieder links und rechts die Summe genau wie dort, und setzt man, (analog wie dort x^m statt x^{r-1} gesetzt worden ist) hier

$$\partial z_x = f_x, \quad \text{also} \quad z_x = \int f_x \cdot dx,$$

so erhält man

$$2) \quad \Sigma(f_x) = \frac{1}{h} \cdot \int f_x \cdot dx - \left[\frac{h}{2!} \cdot \Sigma(\partial f_x) + \frac{h^2}{3!} \cdot \Sigma(\partial^2 f_x) + \frac{h^3}{4!} \cdot \Sigma(\partial^3 f_x) + \cdots\right],$$

welche Formel genau analog ist mit der dortigen Formel §. 109.)

A.

---

den worden ist, ergiebt sich also auch nach der hier für $\Sigma(P_x \cdot Q_x)$ mitgetheilten Formel.

A. ⊙.), so daß jene aus dieser hervorgeht, wenn man hier x^m statt f_x setzt, wo dann $\int f_x \cdot dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, $\partial f_x = m \cdot x^{m-1}$, etc. etc. wird.

B. Setzt man nun hier, statt wie dort im §. 109. B.) weiter fortzufahren, nach und nach ∂f_x, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$, $\partial^4 f_x$ statt f_x, so erhält man eine Reihe von Gleichungen, aus denen allen in Verbindung mit der 2.) zuletzt $\Sigma(\partial f_x)$, $\Sigma(\partial^2 f_x)$, $\Sigma(\partial^3 f_x)$, etc. etc. eliminirt werden können, so daß man erhält

3) $\Sigma(f_x) = \frac{1}{h} \cdot \int f_x \cdot dx + A_0 \cdot f_x + A_1 \cdot \partial f_x \cdot h + A_2 \cdot \partial^2 f_x \cdot h^2 + A_3 \cdot \partial^3 f_x \cdot h^3 + \cdots$

C. Will man aber wiederum wie im §. 109. C.), um das Gesetz besser zu übersehen, nach welchem sich die Koefficienten A_0, A_1, A_2, A_3, etc. etc. richten, die Gleichung 3.) mit unbestimmten Koefficienten annehmen, und nun diese Koefficienten selbst auf anderem Wege zu bestimmen suchen, so wird man hier das Verfahren von dem dort gebrauchten etwas verschieden statt finden lassen müssen. Man wird hier e^x statt f_x setzen, so daß man

$$\Sigma(f_x) = \frac{e^x}{e^h - 1}, \quad \int f_x \cdot dx = e^x, \quad \partial f_x = \partial^2 f_x = \partial^3 f_x = \text{etc. etc.} = e^x$$

hat. Die Gleichung 3.) geht dadurch über in

4) $(e^h - 1)^{-1} = \frac{1}{h} + A_0 + A_1 \cdot h + A_2 \cdot h^2 + A_3 \cdot h^3 + \cdots$

und dies lehrt uns, daß die Koefficienten in der Formel 3.) keine anderen sind, als die von

$$(e^h - 1)^{-1} \text{ d. h. von } \left(h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + \cdots\right)^{-1},$$

wenn solcher Ausdruck nach steigenden Potenzen von h entwickelt gedacht wird.

D. Die Formel 3.) kann man daher, wenn man will, ſymboliſch ſo ſchreiben

$$(\odot)\cdots \qquad \Sigma(f_x) = (e^{\partial h} - 1)^{-1} \cdot f_x,$$

wenn man nur $(e^{\partial h} - 1)^{-1}$ d. h.

$$\left(\partial h + \frac{\partial^2 h^2}{2!} + \frac{\partial^3 h^3}{3!} + \cdots\right)^{-1}$$

nach ſteigenden Potenzen von ∂h entwickelt ſich denkt, dann aber in jedem Gliede von der Form $A_n \cdot \partial^n \cdot h^n$ unmittelbar hinter ∂^n den Faktor f_x ſchreibt, ſo daß dieſes Glied in

$$A_n \cdot \partial^n f_x \cdot h^n$$

übergeht.

E. Man kann auch daſſelbe Reſultat ſo ausſprechen: Wenn A_{-1}, A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, etc. etc. die Koefficienten von

I. $$(e^h - 1)^{-1} = S[A_{a-1} \cdot h^{a-1}]$$

vorſtellen, ſo hat man allemal auch

II. $$\Sigma(f_x) = S[A_{a-1} \cdot \partial^{a-1} f_x \cdot h^{a-1}]$$
$$= \frac{1}{h} \int f_x \cdot dx + A_0 \cdot f_x + S[A_{a+1} \cdot \partial^{a+1} f_x \cdot h^{a+1}],$$

wenn nur ſtatt a nach und nach Null und alle poſitiven ganzen Zahlen geſetzt werden.

F. Setzt man aber hier in II.) x^m ſtatt f_x, alſo daß

$$\partial^{a+1} f_x = m^{a+1|-1} \cdot x^{m-1-a} = (a+1)! m_{a+1} \cdot x^{m-1-a}$$

wird, und vergleicht man dann dieſe Formel mit der Formel (.) des §. 109. D.), welche ſo geſchrieben werden kann, nämlich

$$\Sigma(x^m) = \frac{1}{h} \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} - \tfrac{1}{2} x^m$$
$$+ S\left[\mathfrak{B}_{2a+1} \cdot (-1)^a \cdot m_{2a+1} \cdot x^{m-1-2a} \cdot \frac{h^{2a+1}}{2a+2}\right],$$

ſo folgt augenblicklich

III. $$A_0 = -\tfrac{1}{2}, \quad \text{dagegen} \quad A_{2a+2} = 0,$$

wie noch ebenfalls für jedes a, welches eine ganze Zahl der Null ist,

IV. $$A_{2a+1} = (-1)^a \cdot \frac{\mathfrak{B}_{2a+1}}{(2a+2)!};$$

d. h. die Koefficienten jeder geraden Potenz von h in der Entwickelung von $(e^h-1)^{-1}$, ist allemal $=0$; der Koefficient A_{2a+1} jeder ungeraden Potenz derselben Entwickelung wird dagegen gefunden, wenn man die entsprechende Bernoulli'sche Zahl $\mathfrak{B}_{2a+1}$ noch durch $(2a+2)!$ dividirt, und derselbe ist dabei abwechselnd positiv und negativ.

G. Man kann daher die Formel ⊙.) auch noch so schreiben, nämlich

$$(\mathfrak{C})\cdots\quad \Sigma(f_x) = \frac{1}{h}\cdot\int f_x\cdot dx - \tfrac{1}{2}f_x + S\left[(-1)^a\cdot\frac{\mathfrak{B}_{2a+1}}{(2a+2)!}\cdot\partial^{2a+1}f_x\cdot h^{2a+1}\right],$$

wenn nur statt a Null und jede ganze positive Zahl gesetzt wird.

Anmerkung. Da diese Formeln ⊙.) und ℭ.) des vorhergehenden Paragraphen für jede Funktion f_x gelten, so geben sie auch $\Sigma(a^x\cdot y_x)$, wenn $f_x = a^x\cdot y_x$ gesetzt wird, in eine nach aufsteigenden Potenzen von h geordnete Reihe. — Man hat aber auch diesen speciellen Fall auf eine specielle Weise behandelt, nämlich wie folgt. Es ist nach §. 104. N. 5.) d. h. wenn man theilweise integrirt

1) $$\Sigma(a^x\cdot y_x) = \frac{a^x\cdot y_x - a^h\cdot\Sigma(a^x\cdot\Delta y_x)}{a^h-1}.$$

Setzt man nun hier statt Δy, was die Taylor'sche Reihe dafür liefert, so erhält man

2) $$(a^h-1)\cdot\Sigma(a^x\cdot y_x) = a^x\cdot y_x - a^h\cdot\left[\frac{h}{1}\cdot\Sigma(a^x\cdot\partial y_x) + \frac{h^2}{2!}\cdot\Sigma(a^x\cdot\partial^2 y_x) + \cdots\right].$$

Man hat nun nach der Formel (Q)

2) $$\Sigma\left(\frac{1}{x+2h}\right)=\Sigma\left(\frac{1}{x+h}\right)+\frac{1}{x+h};$$

und

3) $$\Sigma\left(\frac{1}{x+h}\right)=\Sigma\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x};$$

also

4) $$\Sigma\left(\frac{1}{x+2h}\right)=\Sigma\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+h}.$$

Man erhält daher, wenn man von 1.) links und rechts die Summen nimmt, dann aber rechts statt $\Sigma\frac{1}{x+2h}$ und $\Sigma\frac{1}{x+h}$ ihre Werthe aus 3. und 4.) substituirt,

$$\Sigma\frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)}=-\frac{2}{h}\cdot\frac{1}{x+h}-\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{1}{h}\cdot\frac{3x+2h}{x(x+h)}.$$

§. 112.

Uebergehen wir die Summen (d. h. die endlichen Integrale) der irrationalen algebraischen Funktionen, über welche man methodisch wenig oder nichts sagen kann, und suchen wir bloß noch die Summen von einigen besonderen Formen transcendenter Funktionen.

A. Man findet die Summe

1) $$\Sigma(a^x\cdot(A_0+A_1\cdot x+A_2\cdot x^2+A_3\cdot x^3+\cdots+A_m\cdot x^m))$$

dadurch, daß man solche

2) $$=a^x\cdot(K_0+K_1\cdot x+K_2\cdot x^2+K_3\cdot x^3+\cdots+K_m\cdot x^m)$$

setzt, dann von beiden Seiten dieser Gleichung die Differenzen nimmt, und nun die gleichnamigen Glieder mit einander vergleicht. Man findet auf diesem Wege:

$$A_0=-K_0+a^h\cdot(K_0+K_1\cdot h+K_2\cdot h^2+\cdots+K_m\cdot h^m)$$
$$A_1=-K_1+a^h\cdot(K_1+2K_2\cdot h+3K_3\cdot h^2+\cdots+mK_m\cdot h^{m-1})$$
$$A_2=-K_2+a^h\cdot(K_2+3K_3\cdot h+6K_4\cdot h^2+\cdots+m_2K_m\cdot h^{m-2})$$
$$A_3=-K_3+a^h\cdot(K_3+4K_4\cdot h+\cdots+m_3K_m\cdot h^{m-3})$$

u. s. w. s.; zuletzt

$$A_m=-K_m+a^h\cdot K_m;$$

aus welchen Gleichungen die unbestimmten Koefficienten K_0, K_1, K_2, K_3, etc. etc. K_m sich bestimmen lassen.

So findet man

$$\Sigma(a^x(A_0+A_1x+A_2x^2)) = a^x\cdot\frac{a^{2h}(A_0-A_1\cdot h+A_2\cdot h^2)-a^h(2A_0-A_1\cdot h-A_2\cdot h^2)+A_0}{(a^h-1)^3} + a^x\cdot\frac{a^h(A_1-2A_2\cdot h)-A_1}{(a^h-1)^2}\cdot x+a^x\cdot\frac{A_2}{a^h-1}\cdot x^2.$$

B. Will man

$$\Sigma(sin\, x^m\cdot cos\, x^n)$$

finden, unter der Voraussetzung, daß m und n positive ganze Zahlen sind, so verwandle man die Funktion $sin\, x^m\cdot cos\, x^n$ in eine Reihe von Gliedern von der Form

$$A\cdot sin\, qx \quad \text{und} \quad A\cdot cos\, qx$$

und nehme dann von jedem einzelnen Gliede das endliche Integral, indem man folgende Formeln anwendet, nämlich

1) $$\Sigma sin\,(p+qx) = -\frac{cos\,(p+qx-\frac{1}{2}q\cdot h)}{2sin\,(\frac{1}{2}q\cdot h)};$$

2) $$\Sigma cos\,(p+qx) = \frac{sin\,(p+qx-\frac{1}{2}q\cdot h)}{2sin\,(\frac{1}{2}q\cdot h)};$$

Und ist ein Glied dabei von der Form

$$A\cdot cos\, 0x \quad \text{oder} \quad A,$$

so bekommt die Summe noch das Glied $A\frac{x}{h}$.

C. Man hat auch noch versucht die Summen

$$\Sigma(x^\mu\cdot sin\, x) \quad \text{und} \quad \Sigma(x^\mu\cdot cos\, x)$$

zu finden, unter der Voraussetzung, daß x' eine gegebene Funktion von x ist, deren zu der Differenz h von x gehörige Differenz $\Delta(x')$ durch h' bezeichnet seyn mag. — Das Verfahren dabei ist dasselbe, wie das vorher beobachtete. Man geht nämlich von einer dazu geeigneten Differenz aus, oder von zweien, findet aus den Gleichungen die Ausdrücke $x^\mu\cdot sin\, x$ und $x^\mu\cdot cos\, x$, und nimmt dann von diesen neuen Gleichungen

wieder die Summe, in der Hoffnung dadurch Reduktionsformeln zu bekommen, wie dies im §. 109.) der Fall gewesen ist, wo $\Sigma(x^m)$ in $\Sigma(x^{m-1})$, $\Sigma(x^{m-2})$, $\Sigma(x^{m-3})$, etc. etc. ausgedrückt sich gezeigt hat.

Die Durchführung der Rechnung ist folgende:

Es ist, wenn man die Differenzen nach x nimmt, d. h. statt jedes x jetzt $x+h$, und deshalb statt x' jetzt $x'+\Delta x'$ d. h. $x'+h'$ schreibt, und die Funktion im alten Zustande von ihr im neuen Zustande subtrahirt,

1) $\Delta((x'-h')^p \cdot cos\,(x-\frac{1}{2}h)) = x'^p \cdot cos\,(x+\frac{1}{2}h)$
$-(x'-h')^p \cdot cos\,(x-\frac{1}{2}h) = (p_1 \cdot x'^{p-1} \cdot h' - p_2 \cdot x'^{p-2} \cdot h'^2$
$+p_3 \cdot x'^{p-3} \cdot h'^3 - \ldots) \cdot cos\,(x-\frac{1}{2}h) + x'^p \cdot [cos\,(x+\frac{1}{2}h)$
$-cos\,(x-\frac{1}{2}h)]$

2) $\Delta((x'-h')^p \cdot sin\,(x-\frac{1}{2}h)) = x'^p \cdot sin\,(x+\frac{1}{2}h)$
$-(x'-h')^p \cdot sin\,(x-\frac{1}{2}h) = (p_1 \cdot x'^{p-1} \cdot h' - p_2 \cdot x'^{p-2} \cdot h'^2$
$+p_3 \cdot x'^{p-3} \cdot h'^3 - \ldots) \cdot sin\,(x-\frac{1}{2}h) + x'^p \cdot [sin\,(x+\frac{1}{2}h)$
$-sin\,(x-\frac{1}{2}h)]$.

Findet man nun aus diesen Gleichungen 1.) und 2.), nachdem man vorher die Differenzen der Kosinus und der Sinus in Produkte verwandelt hat, so daß $x'^p \cdot sin\,x$ und $x'^p \cdot cos\,x$ darin erscheinen, die Werthe dieser letztern, und nimmt man dann von diesen neuen Gleichungen links und rechts die Summen nach x, so erhält man, wenn zu gleicher Zeit h' d. h. $\Delta x'$ nach x constant gedacht wird,

3) $\Sigma(x'^p \cdot sin\,x) = -\frac{(x'-h')^p \cdot cos\,(x-\frac{1}{2}h)}{2sin\,\frac{1}{2}h} + \frac{1}{2sin\,\frac{1}{2}h}$
$\times \{p_1 \cdot h' \cdot \Sigma(x'^{p-1} \cdot cos\,(x-\frac{1}{2}h)) - p_2 \cdot h'^2 \cdot \Sigma x'^{p-2} \cdot cos\,(x-\frac{1}{2}h)$
$+p_3 \cdot h^3 \cdot \Sigma x'^{p-3} \cdot cos\,(x-\frac{1}{2}h) - \text{etc. etc.}\}$

4) $\Sigma(x'^p \cdot cos\,x) = \frac{(x'-h')^p \cdot sin\,(x-\frac{1}{2}h)}{2sin\,\frac{1}{2}h} - \frac{1}{2sin\,\frac{1}{2}h}$
$\times \{p_1 \cdot h \cdot \Sigma x'^{p-1} \cdot sin\,(x-\frac{1}{2}h) - p_2 \cdot h^2 \cdot \Sigma x'^{p-2} \cdot sin\,(x-\frac{1}{2}h)$
$+p_3 \cdot h^3 \cdot \Sigma x'^{p-3} \cdot sin\,(x-\frac{1}{2}h) - \text{etc. etc.}\}$.

Dies sind die gesuchten Reduktions-Formeln *). — Setzt man in ihnen nach und nach 1, 2, 3, 4, 5, etc. etc. statt p, so erhält man die verlangten Summen aus einander.

Namentlich findet sich für $p = 1$, wenn man zugleich die Formeln B. 1. und 2.) zu Hülfe nimmt,

$$5)\quad \Sigma(x' \cdot \sin x) = -\frac{(x' - h') \cdot \cos(x - \frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} + \frac{h' \cdot \sin(x - \frac{1}{2}h}{2(\sin\frac{1}{2}h)^2};$$

und

$$6)\quad \Sigma(x' \cdot \cos x) = \frac{(x' - h') \cdot \sin(x - \frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} + \frac{h' \cdot \cos(x - \frac{1}{2}h)}{2(\sin\frac{1}{2}h)^2}.$$

Weil aber h' nach x constant gedacht worden, so folgt aus

$$\Delta x' = h'$$

sogleich, wenn man die Integrale nach x nimmt,

$$7)\quad x' = \frac{h'}{h}x + C_x,$$

wo C_x entweder eine absolute, oder doch eine periodische Constante ist.

Die Formeln 3.—6.) gelten also nur dann, wenn x' keine andere Funktion von x, als nur von der Form 7.), d. h. von der Form

$$x' = a \cdot x + C_x$$

ist, wo a eine absolute Constante (nach x), C_x aber entweder eine absolute oder doch eine periodische Constante ist.

Namentlich sind also durch die Formeln 5.) und 6.) die Summen

$$\Sigma((ax+b)^p \cdot \sin x) \quad \text{und} \quad \Sigma((ax+b)^p \cdot \cos x)$$

zu finden, indem man in jene

$$x' = ax + b \quad \text{und deshalb auch} \quad h' = a \cdot h$$

setzt.

---

*) Dächte man h' nicht nach x constant, so müßten in diesen Formeln die Potenzen von h', welche jetzt außerhalb der Summen-Zeichen gesetzt sind, unter dem Σ Zeichen gesetzt werden; und dann wären die Formeln 3.) und 4.) keine Reduktions-Formeln mehr.

§. 113.

Nach dieſen Verſuchen, die Summen für einzelne beſonders Funktionen zu finden, wollen wir noch zu allgemeinern Reduktions-Formeln zu gelangen ſuchen.

Bereits im §. 104. N. 5.) haben wir gefunden

1) $$\Sigma(P_x \cdot Q_x) = Q \cdot \Sigma(P_x) - \Sigma(\Delta Q_x \cdot \Sigma P_{x+h}),$$

und die Anwendung dieſer Formel nennt man die theilweiſe Integration. Wendet man nun auf die Summe im zweiten Gliede rechts dieſelbe Formel wiederum an und ſubſtituirt man den dadurch für $\Sigma(\Delta Q_x \cdot \Sigma P_{x+\Delta x})$ erhaltenen Ausdruck in die 1.), ſo ergiebt ſich

2) $$\Sigma(P_x \cdot Q_x) = Q \cdot \Sigma P_x - \Delta Q \cdot \Sigma^2 P_{x+h} + \Sigma(\Delta^2 Q \cdot \Sigma^2 P_{x+2h}).$$

Wendet man hier auf das dritte Glied zur Rechten die Formel 1.) noch einmal an, ſo erhält man nach geſchehener Subſtitution in 2.)

3) $$\Sigma(P_x \cdot Q_x) = Q \cdot \Sigma P_x - \Delta Q \cdot \Sigma^2 P_{x+h} + \Delta^2 Q \cdot \Sigma^3 P_{x+2h} - \Sigma(\Delta^3 Q \cdot \Sigma^3 P_{x+3h}).$$

Zuletzt erhält man auf dieſem Wege noch

$$(\odot)\cdots \quad \Sigma(P_x \cdot Q_x) = S\Big[(-1)^a \cdot \Delta^a Q_x \cdot \Sigma^{1+a} P_{x+a.h}\Big]_{a+b=\mu} + (-1)^{\mu+1} \Sigma(\Delta^{\mu+1} Q_x \cdot \Sigma^{\mu+1} P_{x+(\mu+1)h}).$$

Dies iſt die von Taylor in den philosophical transactions gegebene Formel. — Condorcet hat ſie in ſeinem Essai sur l'application de l'Analyse à la probabilité des décisions p. 163. dadurch umgeformt, daß er P_x, P_{x+h}, P_{x+2h}, P_{x+3h}, etc. etc. als Glieder einer Ur-Reihe anſieht, und ſie in die erſten Glieder ihrer Differenz-Reihen ausdrückt. Nach §. 102. I.) hat man nämlich

4) $$P_{x+m.h} = S\Big[m_c \cdot \Delta^c P_x\Big]_{b+c=m}.$$

Setzt man daher hier zuerſt a, dann $\mu+1$ ſtatt m, und dann den jedesmaligen Werth zur Rechten aus 4.) ſtatt $P_{x+a.h}$ und

statt $P_{x+(\mu+1)h}$ in die Formel ⊙.), so erhält man nach gehöriger Reduktion, weil $\Sigma^{a+1}(\Delta^c P_x) = \Sigma^{a-c+1} P_x$ ist,

$$(\mathfrak{C}) \ldots\ \Sigma(P_x \cdot Q_x) = S\left[(-1)^a \cdot a_c \cdot \Delta^a Q_x \cdot \Sigma^{b+1} P_x\right]_{b+c=a,\ a+b=\mu} + (-1)^{\mu+1} \cdot S\left[(\mu+1)_c \cdot \Sigma(\Delta^{\mu+1} Q_x \cdot \Sigma^{\mu+1-c} P_x)\right]_{c+b=\mu+1}.$$

Condorcet giebt dieselbe jedoch viel unvollständiger als wir sie hier gegeben haben. In allen den Fällen aber, in denen $\Delta^{\mu+1} Q_x = 0$ wird, also so oft Q_x eine ganze Funktion von x ist, vom μ^{ten} Grade, verwandelt sich unser zweites Aggregat in $\Sigma(0)$ d. h. in eine periodische Constante, und das erstere Aggregat enthält dann genau das Gesetz des Condorcet, nämlich

$$\Sigma(P_x \cdot Q_x) = Q_x \cdot \Sigma P_x - \Delta Q(\Sigma^2 P_x + \Sigma P_x) + \Delta^2 Q_x \cdot (\Sigma^3 P_x + 2\Sigma^2 P_x + \Sigma P_x) - \Delta^3 Q_x \cdot (\Sigma^4 P_x + 3\Sigma^3 P_x + 3\Sigma^2 P_x + \Sigma P_x) + \text{etc. etc.}$$

§. 114.

Setzt man in der Formel des §. 113.) $P_x = a^x$, so erhält man, weil dann

$$\Sigma^{1+a} P_{x+ah} = \frac{a^{x+ah}}{(a^h - 1)^{1+a}}$$

ist, sogleich

$$\Sigma(a^x \cdot Q_x) = \frac{1}{a^h - 1} \cdot S\left[(-1)^a \cdot \Delta^a Q_x \cdot a^x \cdot \left(\frac{a^h}{a^h - 1}\right)^a\right]_{a+b=\mu} + (-1)^{\mu-1} \cdot \left(\frac{a^h}{a^h - 1}\right)^{\mu+1} \cdot \Sigma(a^x \cdot \Delta^{\mu+1} Q_x).$$

Nach diesen Formeln kann man die Summen finden

1) von jeder Funktion von der Form

$$\frac{A \cdot x^\alpha + B \cdot x^\beta + C \cdot x^\gamma + \cdots}{x^{nlh}},$$

wenn α, β, γ, etc. etc. ganze positive Zahlen und zu gleicher Zeit $< n-1$ sind;

2) von $a^{mx} \cdot (A \cdot x^\alpha + B \cdot x^\beta + C \cdot x^\gamma + \cdots)$,

es mag m eine positive oder negative ganze Zahl seyn, wenn nur α, β, γ, etc. positiv ganz sind *);

*) Die im §. 112. A.) gefundene Summe, welche dort direkt gefun-

3) von jeder Funktion von der Form

$$\sin x^m \cdot \cos x^n \cdot (A \cdot x^\alpha + B \cdot x^\beta + C \cdot x^\gamma + \cdots)$$

wenn m und n positiv ganz sind, eben so wie α, β, γ, etc. etc.; indem man das Produkt $\sin x^m \cdot \cos x^n$ in Sinus und Kosinus der Vielfachen von x umformt.

Und dies ist ohngefähr alles, was sich über die Auffindung der Summen (d. h. der endlichen Integrale) der Funktionen eines einzigen Veränderlichen x, im Allgemeinen, lehren läßt.

§. 115.

Das Verfahren, dessen wir uns im §. 109.) bedient haben, um $\Sigma(x^m)$ in eine nach steigenden Potenzen von h fortlaufende Reihe zu verwandeln, kann man zu verallgemeinern trachten, um durch dasselbe allgemein $\Sigma(f_x)$ in eine nach steigenden Potenzen von h geordnete Reihe umzuwandeln.

A. Man geht nämlich (so wie dort von x^r, welches nicht x^m ist) hier wiederum von einer Funktion z_x aus, welche nicht die gegebene f_x ist, und hat nun, wegen $\Delta z_x = z_{x+h} - z_x$, nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$1) \quad \Delta z_x = \partial z_x \cdot h + \partial^2 z_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 z_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \partial^4 z_x \cdot \frac{h^4}{4!} + \cdots.$$

Nimmt man hier nun wieder links und rechts die Summe genau wie dort, und setzt man, (analog wie dort x^m statt x^{r-1} gesetzt worden ist) hier

$$\partial z_x = f_x, \quad \text{also} \quad z_x = \int f_x \cdot dx,$$

so erhält man

$$2) \quad \Sigma(f_x) = \frac{1}{h} \cdot \int f_x \cdot dx - \left[\frac{h}{2!} \cdot \Sigma(\partial f_x) + \frac{h^2}{3!} \cdot \Sigma(\partial^2 f_x) + \frac{h^3}{4!} \cdot \Sigma(\partial^3 f_x) + \cdots\right],$$

welche Formel genau analog ist mit der dortigen Formel §. 109.)

A.

---

den worden ist, ergiebt sich also auch nach der hier für $\Sigma(P_x \cdot Q_x)$ mitgetheilten Formel.

A. ⊙.), so daß jene aus dieser hervorgeht, wenn man hier x^m statt f_x setzt, wo dann $\int f_x \cdot dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, $\partial f_x = m \cdot x^{m-1}$, etc. etc. wird.

B. Setzt man nun hier, statt wie dort im §. 109. B.) weiter fortzufahren, nach und nach ∂f_x, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$, $\partial^4 f_x$ statt f_x, so erhält man eine Reihe von Gleichungen, aus denen allen in Verbindung mit der 2.) zuletzt $\Sigma(\partial f_x)$, $\Sigma(\partial^2 f_x)$, $\Sigma(\partial^3 f_x)$, etc. etc. eliminirt werden können, so daß man erhält

$$3)\quad \Sigma(f_x) = \frac{1}{h} \cdot \int f_x \cdot dx + A_0 \cdot f_x + A_1 \cdot \partial f_x \cdot h + A_2 \cdot \partial^2 f_x \cdot h^2 + A_3 \cdot \partial^3 f_x \cdot h^3 + \cdots.$$

C. Will man aber wiederum wie im §. 109. C.), um das Gesetz besser zu übersehen, nach welchem sich die Koefficienten A_0, A_1, A_2, A_3, etc. etc. richten, die Gleichung 3.) mit unbestimmten Koefficienten annehmen, und nun diese Koefficienten selbst auf anderem Wege zu bestimmen suchen, so wird man hier das Verfahren von dem dort gebrauchten etwas verschieden statt finden lassen müssen. Man wird hier e^x statt f_x setzen, so daß man

$$\Sigma(f_x) = \frac{e^x}{e^h - 1},\quad \int f_x \cdot dx = e^x,\quad \partial f_x = \partial^2 f_x = \partial^3 f_x = \text{etc. etc.} = e^x$$

hat. Die Gleichung 3.) geht dadurch über in

$$4)\quad (e^h - 1)^{-1} = \frac{1}{h} + A_0 + A_1 \cdot h + A_2 \cdot h^2 + A_3 \cdot h^3 + \cdots$$

und dies lehrt uns, daß die Koefficienten in der Formel 3.) keine anderen sind, als die von

$$(e^h - 1)^{-1} \text{ d. h. von } \left(h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + \cdots\right)^{-1},$$

wenn solcher Ausdruck nach steigenden Potenzen von h entwickelt gedacht wird.

D. Die Formel 3.) kann man daher, wenn man will, symbolisch so schreiben

$$(\odot)\cdots \qquad \Sigma(f_x) = (e^{\partial h} - 1)^{-1} \cdot f_x,$$

wenn man nur $(e^{\partial h} - 1)^{-1}$ d. h.

$$\left(\partial h + \frac{\partial^2 h^2}{2!} + \frac{\partial^3 h^3}{3!} + \cdots\right)^{-1}$$

nach steigenden Potenzen von ∂h entwickelt sich denkt, dann aber in jedem Gliede von der Form $A_n \cdot \partial^n \cdot h^n$ unmittelbar hinter ∂^n den Faktor f_x schreibt, so daß dieses Glied in

$$A_n \cdot \partial^n f_x \cdot h^n$$

übergeht.

E. Man kann auch dasselbe Resultat so aussprechen: Wenn A_{-1}, A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, etc. etc. die Koefficienten von

I. $$(e^h - 1)^{-1} = S[A_{a-1} \cdot h^{a-1}]$$

vorstellen, so hat man allemal auch

II. $$\Sigma(f_x) = S[A_{a-1} \cdot \partial^{a-1} f_x \cdot h^{a-1}]$$
$$= \frac{1}{h} \int f_x \cdot dx + A_0 \cdot f_x + S[A_{a+1} \cdot \partial^{a+1} f_x \cdot h^{a+1}],$$

wenn nur statt a nach und nach Null und alle positiven ganzen Zahlen gesetzt werden.

F. Setzt man aber hier in II.) x^m statt f_x, also daß

$$\partial^{a+1} f_x = m^{a+1\underline{1}-1} \cdot x^{m-1-a} = (a+1)!\, m_{a+1} \cdot x^{m-1-a}$$

wird, und vergleicht man dann diese Formel mit der Formel (.) des §. 109. D.), welche so geschrieben werden kann, nämlich

$$\Sigma(x^m) = \frac{1}{h} \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} - \tfrac{1}{2} x^m$$
$$+ S\left[\mathfrak{B}_{2a+1} \cdot (-1)^a \cdot m_{2a+1} \cdot x^{m-1-2a} \cdot \frac{h^{2a+1}}{2a+2}\right],$$

so folgt augenblicklich

III. $$A_0 = -\tfrac{1}{2}, \quad \text{dagegen} \quad A_{2a+2} = 0,$$

so wie noch ebenfalls für jedes a, welches eine ganze Zahl oder Null ist,

$$\text{IV.} \qquad A_{2a+1} = (-1)^a \cdot \frac{\mathfrak{B}_{2a+1}}{(2a+2)!};$$

d. h. die Koefficienten jeder geraden Potenz von h in der Entwickelung von $(e^h-1)^{-1}$, ist allemal $=0$; der Koefficient A_{2a+1} jeder ungeraden Potenz derselben Entwickelung wird dagegen gefunden, wenn man die entsprechende Bernoulli'sche Zahl $\mathfrak{B}_{2a+1}$ noch durch $(2a+2)!$ dividirt, und derselbe ist dabei abwechselnd positiv und negativ.

G. Man kann daher die Formel ⊙.) auch noch so schreiben, nämlich

$$(\mathfrak{C})\cdots \quad \Sigma(f_x) = \frac{1}{h}\cdot\int f_x\cdot dx - \tfrac{1}{2}f_x + S\left[(-1)^a\cdot\frac{\mathfrak{B}_{2a+1}}{(2a+2)!}\cdot\partial^{2a+1}f_x\cdot h^{2a+1}\right],$$

wenn nur statt a Null und jede ganze positive Zahl gesetzt wird.

Anmerkung. Da diese Formeln ⊙.) und ℭ.) des vorstehenden Paragraphen für jede Funktion f_x gelten, so geben sie auch $\Sigma(a^x\cdot y_x)$, wenn $f_x = a^x\cdot y_x$ gesetzt wird, in eine nach steigenden Potenzen von h geordnete Reihe. — Man hat aber auch diesen speciellen Fall auf eine specielle Weise behandelt, nämlich wie folgt. Es ist nach §. 104. N. 5.) d. h. wenn man theilweise integrirt

$$1) \qquad \Sigma(a^x\cdot y_x) = \frac{a^x\cdot y_x - a^h\cdot\Sigma(a^x\cdot\Delta y_x)}{a^h-1}.$$

Setzt man nun hier statt Δy, was die Taylor'sche Reihe dafür liefert, so erhält man

$$2) \quad (a^h-1)\cdot\Sigma(a^x\cdot y_x) = a^x\cdot y_x - a^h\cdot\left[\frac{h}{1}\cdot\Sigma(a^x\cdot\partial y_x) + \frac{h^2}{2!}\cdot\Sigma(a^x\cdot\partial^2 y_x) + \cdots\right].$$

Setzt man nun hier ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$, etc. etc. nach und nach ſtatt y_x, ſo erhält man wieder eine unendliche Menge von Gleichungen, aus denen und der 2.) die Summen $\Sigma(a^x \cdot \partial y_x)$, $\Sigma(a^x \cdot \partial^2 y_x)$, etc. etc. eliminirt werden können, ſo daß man zuletzt erhält die Form

3) $(a^h - 1) \cdot \Sigma(a^x \cdot y_x) = a^x \cdot y_x + D_1 \cdot a^x \cdot \partial y_x \cdot h + D_2 \cdot a^x \cdot \partial^2 y_x \cdot h^2 + D_3 \cdot a^x \cdot \partial^3 y_x \cdot h^3 + \cdots$.

Wir wollen jedoch dies hier nicht weiter verfolgen.

Dritte Abtheilung.

Vom Integriren einer gegebenen endlichen Differenzen-Gleichung.

§. 116.

Jede Gleichung zwiſchen x, y, Δy_x, $\Delta^2 y_x$, etc. etc. heißt eine Differenzen-Gleichung und zwar von der n^{ten} Ordnung, wenn zuletzt $\Delta^n y_x$ noch vorkommt, alſo von der erſten Ordnung, wenn ſie bloß zwiſchen x, y und Δy_x gegeben iſt.

Wenn man y_{x+h}, y_{x+2h}, y_{x+3h}, etc. etc. bezüglich durch y_1, y_2, y_3, etc. etc. bezeichnet, ſo hat man (nach §. 91. II.) allemal

$$\Delta y_x = y_1 - y, \qquad \Delta^2 y_x = y_2 - 2y_1 + y,$$
$$\Delta^3 y_x = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y; \text{ etc. etc.}$$

Jede ſolche Differenzen-Gleichung der n^{ten} Ordnung kann alſo, dadurch daß man in ihr ſtatt Δy_x, $\Delta^2 y_x$, $\Delta^3 y_x$, etc. etc. dieſe Werthe ſubſtituirt, in eine Gleichung zwiſchen x, y, y_1, y_2, y_3, $\cdots$ y_n verwandelt werden, welche y_n in x, y, y_1, y_2, $\cdots$ y_{n-1} ausgedrückt liefert, welche aber, wenn man $x+h$ ſtatt x ſetzt (weil dann y in y_1, y_1 in y_2, y_2 in y_3, etc. etc. und y_n in y_{n+1} übergeht) auch noch y_{n+1} und durch daſſelbe Verfahren auch noch y_{n+2}, y_{n+3}, in inf. jedesmal in die n nächſt vorhergehenden Glieder ausgedrückt liefert.

Wäre also die Differenzen-Gleichung von der ersten Ordnung $f_{x,y,\Delta y_x} = 0$ gegeben, so würde solche y_1, y_2, y_3, y_4, in inf. (in x und y ausgedrückt) liefern.

Eine Differenzen-Gleichung der n^{ten} Ordnung ist also das Gesetz, nach welchem die Glieder einer Reihe

$y, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, \cdots y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \cdots$

vom n^{ten} Gliede ab sich richten, d. h. das Gesetz, durch welches jedes folgende Glied in die n ihm zunächst vorangehenden Glieder dieser Reihe ausgedrückt wird.

Solche Gesetze, durch welche folgende Glieder einer Reihe in vorhergehende ausgedrückt sich sehen, nennt man rekurrente Gesetze. Findet man aber aus einer solchen Differenzen-Gleichung, welche allemal ein rekurrentes Gesetz einer Reihe ausspricht, y selbst, als Funktion von x, so darf man nur x, $x+h$, $x+2h$, $x+3h$, $\cdots$ $x+nh$, $\cdots$ $x+(n+m)h$, $\cdots$ statt x setzen, um nach und nach in oder außer der Ordnung jedes einzelne Glied der Reihe zu haben. Man hat also dann das independente Gesetz der Reihe $y, y_1, y_2, y_3, \cdots y_n$.

Das Geschäft selber, durch welches man aus der Differenzen-Gleichung die Funktion y_x findet, nennt man das Integriren der Differenzen-Gleichung.

Anmerkung. Alle Untersuchungen über Differenzen setzen aber ein bestimmt gegebenes und nicht mehr jedes willkührliche h voraus. So wie h ganz unbestimmt bliebe, so könnte man es sich endlich und unendlich klein zugleich denken, und dies wäre gegen den Begriff des Differenzen-Kalkul, der sich eben dadurch vom Differential-Kalkul unterscheidet, daß in ihm h nicht unendlich-klein ist.

§. 117.

Die lineäre Differenzen-Gleichung der ersten Ordnung

1) $$\Delta y_x + P_x \cdot y_x = Q_x$$

zu integriren.

Man setzt

2) $y_x = u_x \cdot z_x$, also $\Delta y_x = u \cdot \Delta z_x + z \cdot \Delta u_x + \Delta u_x \cdot \Delta u_x$

und die Gleichung 1.) zerlegt sich nun, weil man über u nach Willkühr disponiren kann, in

3) $\Delta u_x + P_x \cdot u_x = 0$ und 4) $u_x \cdot \Delta z_x + \Delta u_x \cdot \Delta z_x = Q_x$.

Die letztere giebt

5) $$\Delta z_x = \frac{Q_x}{u_x + \Delta u_x} = \frac{Q_x}{u_{x+h}},$$

also

6) $z_x = \Sigma\left(\frac{Q_x}{u_{x+h}}\right)$ und 7) $y_x = u_x \cdot z_x$,

sobald nur u_x selbst aus der Gleichung 3.) gefunden seyn wird.

In der Gleichung 3.) kann man aber die Veränderlichen u und x trennen, indem man sie so schreibt

8) $$\frac{\Delta u_x}{u_x} = -P_x.$$

Führt man, um diese Gleichung zu integriren, einen neuen Veränderlichen t ein, so daß

9) $u_x = e^t$, also $\Delta u_x = e^t \cdot (e^{\Delta t} - 1)$

wird, so erhält man aus 8.)

$$e^{\Delta t} - 1 = -P_x \quad \text{oder} \quad e^{\Delta t} = 1 - P_x,$$

d. h.

10) $\Delta t = log(1 - P_x)$ und $t = \Sigma log(1 - P_x)$.

Kann man also $\Sigma log(1 - P_x)$ finden, so hat man t, dann aus 9.) auch u, — hernach aus 6.) auch z_x, wenn nämlich die dortige Integration ausgeführt werden kann; — und dann hat man aus 7.) auch y_x. Dabei geht in t eine periodische oder absolute Constante ein, welche sich also auch in y mit herüberzieht, so daß man zuletzt y in x und einer periodischen Constante gefunden hat. — Für den Hülfs-Ausdruck u braucht man nur einen genügenden Werth, weshalb in t oder $\Sigma log(1 - P_x)$ keine willkührliche Constante zugelassen zu werden braucht.

Um aber $\Sigma log(1 - P_x)$ zu finden, geht man von dem Satze §. 102. IV.) aus, nach welchem

$$\Sigma log\,(1-P_{x+nh})-\Sigma log\,(1-P_x)$$

die Summe der Logarithmen der n Ausdrücke

$$1-P_x,\ 1-P_{x+h},\ 1-P_{x+2h},\ \cdots\ 1-P_{x+(n-1)h},$$

also der Logarithme des Produkts dieser n Ausdrücke ist. Man bekommt aber auf diesem Wege nicht eigentlich $\Sigma log\,(1-P_x)$, sondern das zwischen den Grenzen $x=x$ und $x=x+nh$ genommene Integral. Und wollte man hier $x-nh$ statt x setzen, so würde man für die Differenz

$$\Sigma log\,(1-P_x)-\Sigma log\,(1-P_{x-nh})$$

den Logarithmen des Produkts

$$(1-P_{x-nh})(1-P_{x-(n-1)h})\cdots(1-P_{x-2h})(1-P_{x-h})$$

erhalten, und dieser letztere Logarithme könnte nur in den Fällen statt $\Sigma log\,(1-P_x)$ gesetzt werden, in welchen für irgend eine bestimmte Zahl n, $\Sigma log\,(1-P_{x-nh})$ einer willkührlichen absoluten oder periodischen Constante gleich, angesehen werden kann *).

Ist P constant nach x, so giebt die Gleichung 10.) sogleich, wenn der Bequemlichkeit wegen $1-P=R$ gesetzt wird, so daß R und auch $log\,R$ ebenfalls (nach x) constant sind,

$$11)\qquad t=\Sigma(log\,R)=(log\,R)\cdot\frac{x}{h};$$

also wird nun

$$12)\qquad u=e^t=e^{(log\,R)\cdot\frac{x}{h}}=R^{\frac{x}{h}},$$

wo die willkührliche Constante deshalb weggelassen wird, weil u ein bloßer Hülfs-Ausdruck ist, und jeder besondere Werth von u, welcher der Gleichung 3.) genügt, als der zweckmäßige angesehen werden kann.

Ist nun auch noch Q nach x constant, so erhält man weiter aus 6.)

$$z=\Sigma\left(\frac{Q}{R^{\frac{x}{h}+1}}\right)=\Sigma Q\cdot R^{-\frac{x}{h}-1}=Q\cdot\Sigma R^{-\frac{x}{h}-1}\quad\text{(nach §. 104. IV.)};$$

d. h. (nach §. 105. N. 2.)

---

*) Lagrange hat dieses Verfahren der Integration der Gleichung $\Delta y+Py=Q$, im Jahre 1761 zuerst gegeben. Wir können sein Resultat, dem oben zuletzt Gesagten gemäß, nicht für vollständig halten, ja im Allgemeinen kaum für richtig.

13) $$z = Q \cdot \frac{R^{-\frac{x}{h}-1}}{R^{-1}-1} + C_x = \frac{Q}{1-R} \cdot R^{-\frac{x}{h}} + C_x,$$

wo C_x eine periodiſche oder abſolute Conſtante vorſtellt. Dann wird aber (aus 7. und 12.)

14) $$y = \frac{Q}{1-R} + C_x \cdot R^{\frac{x}{h}} = \frac{Q}{P} + C_x \cdot (1-P)^{\frac{x}{h}},$$

wo C_x die periodiſche oder abſolute willkührliche Conſtante iſt.

§. 118.

Kennt man zwei ſpecielle Werthe y'_x und y''_x, welche der reducirten linearen Differenzen-Gleichung der 2ten Ordnung

1) $$y_{x+2h} + P_x \cdot y_{x+h} + Q_x \cdot y_x = 0 \text{ *)}$$

genügen, ſo iſt das vollſtändige Integral dieſer Gleichung offenbar

2) $$y_x = C'_x \cdot y'_x + C''_x \cdot y''_x,$$

wenn C'_x und C''_x zwei willkührliche periodiſche oder abſolute Conſtanten ſind.

Denn, ſo wie y'_x oder y''_x ſtatt y_x geſetzt, der Gleichung 1.) genügen, ſo genügt ihr auch der Ausdruck zur Rechten in 2.), wenn man ſolchen ſtatt y_x ſubſtituirt, deshalb, weil dann der Ausdruck links in zwei Theile zerfällt, die einzeln der Null gleich ſind. Ueberdieß enthält aber der Ausdruck in 2.) zwei willkührliche Conſtanten.

Hat man aber das Integral 2.) der reducirten Gleichung 1.) gefunden, ſo kann man auch das Integral derſelben Gleichung finden, wenn ſie rechts ſtatt der Null noch eine Funktion V_x zu ſtehen hat, nämlich das Integral der vollſtändigen Gleichung

3) $$y_{x+2h} + P_x \cdot y_{x+h} + Q_x \cdot y_x = V_x,$$

indem man das Integral 2.) der Form nach beibehält, aber C'_x und C''_x nicht als periodiſche Conſtanten anſieht, ſondern

*) Man ſubſtituirt in die gegebene Gleichung zwiſchen x, y, Δy_x und $\Delta^2 y_x$, zunächſt $y_{x+h} - y_x$ ſtatt Δy_x und noch $y_{x+2h} - 2 \cdot y_{x+h} + y_x$ ſtatt $\Delta^2 y_x$ und dadurch geht die gegebene Gleichung in die 1.) über, wenn ſie linear geweſen iſt.

als noch unbekannte Funktionen von x, die erst noch so gefunden werden müssen, daß die Gleichung 2.) als vollständiges Integral der Gleichung 3.) angesehen werden kann.

Aus 2.), unter dieser letztern Voraussetzung gedacht, folgt aber

$$4)\quad y_{x+h} = C'_{x+h}\cdot y'_{x+h} + C''_{x+h}\cdot y''_{x+h} = C'_x\cdot y'_{x+h} + C''_x\cdot y''_{x+h} + (y'_{x+h}\cdot \Delta C'_x + y''_{x+h}\cdot \Delta C''_x).$$

Setzt man nun den eingeklammerten Theil, der Null gleich, so erhält man

$$5)\quad \Delta C'_x\cdot y'_{x+h} + \Delta C''_x\cdot y''_{x+h} = 0;$$

und y_{x+h} ist dann, für diese Funktionen C'_x und C''_x, welche der Gleichung 5.) genügen, genau eben so (der Form nach), wie wenn C'_x, C''_x noch periodische oder absolute Constanten wären.

Setzt man aber in 4.) noch einmal $x+h$ statt x, so erhält man, unter der Voraussetzung der Gleichung 5.),

$$6)\quad y_{x+2h} = C'_{x+h}\cdot y'_{x+2h} + C''_{x+h}\cdot y''_{x+2h} = C'_x\cdot y'_{x+2h} + C''_x\cdot y''_{x+2h} + (y'_{x+2h}\cdot \Delta C'_x + y''_{x+2h}\cdot \Delta C''_x).$$

Substituirt man nun diese Werthe aus 4.), 5.) und 6.) statt y_{x+h} und y_{x+2h} in die Gleichung 3.), so wird der Ausdruck links der Null gleich, bis auf den Theil, welcher von dem eingeklammerten Theil von y_{x+2h} in 6.) herrührt. Die Gleichung 3.) geht daher nun über in

$$7)\quad y'_{x+2h}\cdot \Delta C'_x + y''_{x+2h}\cdot \Delta C''_x = V_x.$$

Die beiden Gleichungen 5.) und 7.) kann man nun nach $\Delta C'_x$ und $\Delta C''_x$ algebraisch auflösen. Kann man nun diese, für $\Delta C'_x$ und $\Delta C''_x$ gefundenen und entwickelt gegebenen Funktionen von x (nach den Methoden der vorhergehenden Abtheilung dieses Kapitels) integriren, so hat man C'_x und C''_x, jedes noch mit einer willkührlichen periodischen oder absoluten Constante c'_x und c''_x; und diese Werthe in die 2.) substituirt, geben zuletzt das allgemeine Integral der **vollständigen** Gleichung 3.).

Man wird bemerken, daß dies nichts anders ist als die „Methode der Variation der Constanten", welche **Lagrange**, der sie für die Integration

der Differential-Gleichungen gegeben hat, auch hier bei den Differenzen-Gleichungen in Anwendung bringt. — Ferner sieht man leicht ein, daß diese Methode — von dem Integral der reducirten Gleichung, wo $V=0$ ist, zu dem der vollständigen Gleichung, wo V nicht Null ist, überzugehen — auf lineare Differenzen-Gleichungen aller Ordnungen ausgedehnt werden kann.

§. 119.

Sind in der reducirten Gleichung

1) $y_{x+3h}+P\cdot y_{x+2h}+Q\cdot y_{x+h}+R\cdot y=0$

die Koefficienten P, Q, R constant (nach x), so setze man, um sie zu integriren, $y=m^x$, so daß $y_{x+h}=m^h\cdot m^x$, $y_{x+2h}=m^{2h}\cdot m^x$ und $y_{x+3h}=m^{3h}\cdot m^x$ wird. Dann geht die Gleichung 1.) über in

2) $(m^h)^3+P\cdot(m^h)^2+Q\cdot(m^h)+R=0.$

Findet man hieraus für m^h drei Werthe und zu jedem Werth M von m^h einen zugehörigen Werth von m (also aus $m^h=M$, $m=M^{\frac{1}{h}}$) und bezeichnet man die so erhaltenen drei Werthe von m durch m_1, m_2 und m_3, so hat man

$$y=C'_x\cdot(m_1)^x+C''_x\cdot(m_2)^x+C'''_x\cdot(m_3)^x,$$

wenn nur C'_x, C''_x und C'''_x drei willkührliche periodische Constanten sind.

Werden zwei, oder alle drei Werthe von m einander gleich, oder sind zwei der drei Werthe von m imaginär, so finden ganz analoge Modifikationen (in dem Ausdrucke für y) statt, wie solche bei Gelegenheit der Integration der linearen Differential-Gleichungen bereits mitgetheilt worden sind.

Endlich läßt sich das Gesagte auf reducirte lineare Gleichungen mit (nach x) constanten Koefficienten, von jeder Ordnung ohne Weiteres ausdehnen.

Anmerkung. Die durch die Gleichung 1.), auch wenn man sie sich von beliebiger Ordnung denkt, und wenn man $h=1$ setzt, ausgedrückten Reihen, nannte man früher vorzugsweise „rekurrirende Reihen". — Die Integration der

Gleichung 1.) giebt also das *independente* Gesetz dieser sogenannten rekurrirenden Reihen.

Dabei müssen wir aber noch einmal ausdrücklich bemerken, daß *jede* Differenzen-Gleichung das „*rekurrirende* Gesetz" einer Reihe ausdrückt, d. h. zeigt, wie jedes folgende Glied von den nächst vorhergehenden Gliedern abhängig ist; und daß die Integration der Gleichung allemal das „*independente* Gesetz" derselben Reihe liefert (vgl. §. 116. und auch noch §. 49. des I. Bds.), wenn hier $h = 1$ gedacht wird.

Was endlich die Bestimmung der Constanten betrifft, so muß man, wenn die Differenzen-Gleichung von der n^{ten} Ordnung war, dies Integral also n periodische oder absolute Constanten aufgenommen hat, eben so viele, also n Glieder der Reihe als bekannt ansehen, und daraus die Constanten bestimmen, genau so wie man in der Differential- und der dazu gehörigen Integral-Rechnung die Constanten bestimmt. Die Constanten selbst erscheinen in diesen Anwendungen zunächst als absolute, und nicht als periodische Constanten.

§. 120.

Ueber die Bestimmung der durch die Integration eingehenden periodischen Constanten.

Da die periodischen Constanten für die Werthe x, $x+h$, $x+2h$, $x+3h$, $\cdots$ $x+rh$, $\cdots$ immer dieselben Werthe annehmen, so bestimmen sie sich offenbar dadurch *nicht*, daß man die Werthe von y_x kennt, für die constanten Werthe 0, h, 2h, 3h, etc. etc. von x. — Ist daher durch Integration einer Differenzen-Gleichung, z. B. der ersten Ordnung (zwischen x, y_x und Δy_x, oder zwischen x, y_x und y_{x+h}), eine solche periodische Constante C_x eingegangen, so bestimmt sie sich nur daraus, daß man die Werthe von y in einem bestimmten Raume, etwa von $x = 0$ bis $x = h$ hin, für *alle* dazwischen liegenden Werthe von x schon kennt*). —

*) Stellt man sich x als Abscisse, y_x als Ordinate einer Kurve vor,

Dies wird auf folgende Weiſe deutlich gemacht.

Löſt man nämlich die gegebene Differenzen-Gleichung nach Δy_x algebraiſch auf, ſo daß ſie die Form annimmt

1) $\Delta y_x = F_{x,y_x}$ oder $y_{x+h} = y_x + F_{x,y_x}$,

ſo geht aus ihr, indem man nach und nach $x+h$, $x+2h$, etc. etc. ſtatt x ſetzt, noch hervor

2) $y_{x+2h} = y_{x+h} + F_{x,y_{x+h}}$;

3) $y_{x+3h} = y_{x+2h} + F_{x,y_{x+2h}}$;

u. ſ. w. f. Kennt man nun für jeden Werth x', der zwiſchen 0 und h liegt, jedesmal den zugehörigen Werth von y, nämlich $y_{x'}$, ſo geben, wenn man dieſen Werth x' ſtatt x ſetzt, die Gleichungen 1.) ſogleich den Werth von $y_{x'+h}$, d. h. alle Werthe von y, welche den Werthen von x zwiſchen h und $2h$ zukommen, weil $h+x'$ oder $x'+h$ alle dieſe letztern Werthe ausdrückt, ſo oft ſtatt x' alle Werthe zwiſchen 0 und h geſetzt werden. Desgleichen giebt dann die Gleichung 2.) alle Werthe von y für alle zwiſchen $2h$ und $3h$ liegenden Werthe von x; und dann giebt die Gleichung 3.) alle Werthe von y, für alle zwiſchen $3h$ und $4h$ liegenden Werthe von x; u. ſ. w. f.

Iſt daher $\Pi_{x,y_x,C_x} = 0$ das gefundene Integral dieſer Differenzen-Gleichung der erſten Ordnung mit der periodiſchen Conſtante C_x (welche letztere eine Funktion von $\sin\frac{2\pi x}{h}$ und $\cos\frac{2\pi x}{h}$ ſeyn muß), ſo muß man f_x ſtatt y_x ſubſtituiren, die Gleichung $\Pi_{x,y_x,C_x} = 0$, nach C_x algebraiſch auflöſen, ſo daß man für C_x eine beſtimmte Funktion von x erhält, nämlich

$$C_x = \varphi_x,$$

und dann muß man eine Funktion von $\sin\frac{2\pi x}{h}$ und $\cos\frac{2\pi x}{h}$ auffuchen, welche in dem Raume von $x=0$ an bis $x=h$

---

die durch eine ſolche Differenzen-Gleichung gegeben iſt, ſo kann man z. B. noch verlangen, daß dieſe Kurve mit einer andern gegebenen Kurve $y=f_x$ in den zu allen Werthen von x, die von $x=0$ an bis $x=h$ hin genommen werden, gehörigen Punkten zuſammenfällt.

hin genau mit φ_x zusammenfällt, und dabei noch den übrigen Nebenbedingungen genügt.

Daß und wie dieser letztere Theil der gegenwärtigen Untersuchung auszuführen ist, hat Fourier in seiner théorie de la chaleur. Paris 1822. zuerst gezeigt, und die daher rührenden sogenannten Fourier'schen Reihen bilden in der neuesten Zeit einen höchst wichtigen aggregirenden Theil der höhern Analysis. Auch wir werden sie hier noch, in einem der nächsten Kapitel näher betrachten.

Wir bemerken nur noch, daß die gegebene f_x nicht einmal eine stetige Funktion von x zu seyn braucht, wenn man nur für alle Werthe von x zwischen 0 und h, alle zugehörigen Werthe von y ausgedrückt hat, es mögen letztere dann in diesem Raume von $x=0$ bis $x=h$ ein einziges, oder hinter einander mehrere verschiedene Gesetze befolgen, d. h. sie mögen durch eine continuirliche oder durch eine discontinuirliche Funktion ausgedrückt seyn.

Anmerkung. Ueberhaupt mag man noch einmal bemerken, daß es in dem Charakter der Differenzen-Rechnung liegt, daß h, was zuweilen auch durch Δx bezeichnet wird, einen völlig bestimmten Werth hat, also nicht mehr unbestimmt oder veränderlich sey; daß also jede Differenzen-Gleichung, z. B. der ersten Ordnung nur den Uebergang des Zustandes y_x zu dem bestimmt entfernten Zustande y_{x+h} ausdrückt, daß daher jede Differenzen-Gleichung allemal eine Unstetigkeit (Discontinuität) der durch sie vorgestellten Funktionen zu Grunde liegen hat*).

*) Da in der Differenzen-Rechnung die Differenz h von x, allemal einen bestimmten Werth hat, so mag man sich auch hüten, aus einer Gleichung von der Form
$A_0+A_1\cdot h+A_2\cdot h^2+A_3\cdot h^3+\cdots=B_0+B_1\cdot h+B_2\cdot h^2+B_3\cdot h^3+\cdots$
zu folgern, daß $A_0=B_0$, $A_1=B_1$, $A_2=B_2$, $A_3=B_3$, etc. etc. seyn müsse, weil dies letztere nur dann so seyn muß, wenn die gegebene Gleichung für jedes h, oder doch für eine unendliche Menge stetig auf einander folgender Werthe von h, statt findet.

§. 121.

Laplace hat noch Probleme behandelt von folgender Gattung:

Eine Funktion φ_y zu finden, welche die Eigenschaft hat, daß wenn man statt y zwei bekannte Funktionen f_x und F_x setzt, dann φ_f und φ_F zu einander in einer gegebenen Relation stehen.

Wir wollen ein bestimmtes Beispiel nehmen. — Es sey nämlich φ so zu finden, daß

1) $$\varphi_x{}^2 = \varphi_{2x} + 2$$

wird, so daß in diesem Beispiele $f_x = x$, $F_x = 2x$ ist. — Laplace führt nun einen neuen Veränderlichen z ein, welcher von x dergestalt abhängig gedacht wird, daß

2) $f_x = x = u_z$ und 3) $F_x = 2x = u_{z+1}$

wird, wo u_z eine unbekannte und gesuchte Funktion von z ist; er eliminirt dann aus diesen beiden Gleichungen den Veränderlichen x. Man erhält

4) $u_{z+1} = 2u_z$, oder $u_{z+h} = 2u_z$ für $h = 1$.

Diese Gleichung, integrirt, giebt

5) $u_z = C \cdot 2^z$, also $x = C \cdot 2^z$,

wo C eine willkührliche, periodische oder absolute Constante ist.

Man sucht nun eine Funktion y_z der Bedingung gemäß, daß

6) $\varphi_f = \varphi_x = y_z$ und 7) $\varphi_F = \varphi_{2x} = y_{z+1}$

ist; dieselbe bestimmt sich aus der gegebenen Gleichung 1.), welche jetzt die nachstehende wird, nämlich

8) $y_{z+1} = y_z{}^2 - 2$, oder $y_{z+h} = y_z{}^2 - 2$ für $h = 1$.

Gelingt es nun, diese Gleichung 8.) zu integriren, so darf man nur diese Funktion y_z in 6.) substituiren, um, wenn man z mittelst der 5.) eliminirt hat, φ_x und also auch, wenn y statt x gesetzt wird, φ_y so gefunden zu haben, wie in der Aufgabe verlangt wird.

Nimmt man aber $y_1 = a^1 + a^{-1}$, wo a eine willkührliche Constante ist, so giebt die Gleichung 8.) sogleich

$y_2 = a^2 + a^{-2}$; $y_3 = a^4 + a^{-4}$; $y_4 = a^8 + a^{-8}$;

und zuletzt

$$y_n = a^{2^{n-1}} + a^{-2^{n-1}};$$

d. h.

9) $$y_z = a^{2^{z-1}} + a^{-2^{z-1}},$$

wo a eine willkührliche, absolute oder periodische Constante seyn kann, wo also a eine jede Funktion von z seyn kann, welche ihren Werth nicht ändert, wenn $z+1$ statt z gesetzt wird. Die Gleichung 9.) ist nun das Integral der Gleichung 8.).

Nimmt man daher nach 6.)

$$\varphi_x = a^{2^{x-1}} + a^{-2^{x-1}},$$

und eliminirt man z mittelst der Gleichung 5.), welche $2^{z-1} = \frac{x}{2C}$ liefert, so erhält man

10) $$\varphi_x = a^{\frac{x}{2C}} + a^{-\frac{x}{2C}},$$

oder wenn man $a^{\frac{1}{2C}}$ durch b bezeichnet,

11) $$\varphi_x = b^x + b^{-x},$$

wenn statt b eine absolute oder eine (nach z) periodische und jedesmal willkührliche Constante gesetzt wird, d. h. eine Funktion von z, welche sich nicht ändert, wenn man $z+1$ statt z setzt; d. h. eine Funktion von x, welche sich nicht ändert, so oft man $2x$ statt x schreibt, so daß also statt b z. B. eine willkührliche Funktion von $sin\, 2\pi x$ und $cos\, 2\pi x$ gesetzt werden kann.

Gewöhnlich sieht man die Gleichung 1.) nämlich

$$\varphi_{2x} = \varphi_x{}^2 - 2$$

selbst schon als eine Differenzen-Gleichung an, in welcher man aber nicht x um h, sondern x um x gewachsen sich denkt; eben so betrachtet man im Allgemeinen eine solche Gleichung wie

$$\varphi_{(F_x)} = \varphi_{(f_x)}{}^2 - 2$$

als eine Differenzen-Gleichung, in welcher x nicht um h oder 1, sondern um eine Funktion von x wächst, dergestalt, daß f_x in F_x übergeht; und man

vergleicht dann diese Art Differenzen-Gleichungen mit jenen Differential-Gleichungen, in denen dx nicht constant, sondern selbst noch veränderlich ist. — In dieser Beziehung muß man die gegenwärtige Aufgabe als ein Beispiel zur Integration solcher Differenzen-Gleichungen ansehen, in welchen x nicht um etwas constantes (h oder 1) wächst, sondern selbst noch um etwas Veränderliches; in so fern nämlich x als eine Funktion von z angesehen wird, und der neue Zustand von x aus dem alten dadurch hervorgeht, daß z um den constanten Werth 1 wachsend gedacht wird.

§. 122.

Es kommen in manchen Untersuchungen auch Gleichungen vor, wie z. B.

1) $$\partial y_x + a \cdot \Delta y_x + b y_x = 0,$$

oder

2) $$\partial(\Delta y_x)_x + a \cdot \partial y_x + b \cdot \Delta y_x + c y_x = 0,$$

wo Δy_x den Zuwachs von y vorstellen soll, wenn x um 1 wächst. Dies sind Gleichungen, in denen Differenzen und Differential-Koefficienten zugleich vorkommen. Ihre Behandlung gehört zu dem „Kalkul mit gemischten Differenzen", dem wir hier nur seine Stelle anweisen wollen. Bis jetzt hat man wenig Fortschritte darin gemacht.

Was aber die vorstehenden beiden Gleichungen betrifft, so kann man aus ihnen einen Werth y_x finden, wenn man

$$y = C \cdot e^{mx}$$

setzt; sie gehen dann bezüglich über in

3) $$m + a \cdot (e^m - 1) + b = 0,$$

und in

4) $$m(e^{m-1}) + a^m + b \cdot (e^m - 1) + c = 0.$$

Findet man aus 3.), oder aus 4.), Werthe von m, z. B. m_1, m_2, m_3, m_4, etc. etc., so ist, weil die beiden gegebenen Gleichungen linear sind, für jede derselben

$$y = C_1 \cdot e^{m_1 x} + C_2 \cdot e^{m_2 x} + C_3 \cdot e^{m_3 x} + C_4 \cdot e^{m_4 x} + \cdots$$

zu nehmen, wo C_1, C_2, C_3, C_4, etc. etc. willkührliche Constanten vorstellen. —

Die weitere Untersuchung erlaubt uns der Zweck der gegenwärtigen Schrift nicht.

Schluß-

Schluß-Anmerkung.

Man kann ſich auch Doppel-Reihen denken, welche durch das allgemeine Glied $u_{x,y}$ vorgeſtellt ſind, ſo daß ihre Glieder aus $u_{x,y}$ hervorgehen, wenn man nach und nach x, $x+h$ $x+2h$, $x+3h$, ... ſtatt x ſetzt, und für jeden Werth von x, auch jedesmal noch y, $y+k$, $y+2k$, $y+3k$, etc. etc. ſtatt y ſchreibt. — Dann kann man von Differenzen Δu_x, $\Delta^2 u_x$, $\Delta^3 u_x$, etc. etc. nach x, aber auch gleichzeitig von Differenzen Δu_y, $\Delta^2 u_y$, $\Delta^3 u_y$, etc. etc. nach y ſprechen, und auch von ſolchen, die nach x und nach y zugleich genommen ſind, nämlich $\Delta^{1,1} u_{x,y}$, $\Delta^{2,1} u_{x,y}$, $\Delta^{1,2} u_{x,y}$, ... $\Delta^{m,n} u_{x,y}$; man kann dieſe Differenzen Partial-Differenzen nennen, und man bekommt dann auch Partial-Differenzen-Gleichungen und deren Integration; u. ſ. w. f.

Wenn es aber ſchon bei den einfachſten Differenzen-Gleichungen nur ſelten gelingen dürfte, ein Integral in endlicher Form zu erhalten, ſo muß dies noch mehr in den zuſammengeſetztern Unterſuchungen der Fall ſeyn. Deshalb können wir hier nur die möglichen Fragen andeuten, uns aber ſelbſt nicht weiter auf deren Beantwortung einlaſſen.

Dreizehntes Kapitel.

Einige Anwendungen der Differenzen-Rechnung.

Erste Abtheilung.

Einiges über Berechnung von Tafeln mittelst der Differenzen-Rechnung.

§. 123.

Man soll alle Werthe

$$\cdots u_{-5},\ u_{-4},\ u_{-3},\ u_{-2},\ u_{-1},\ u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3 \cdots$$

einer ganzen Funktion u_x z. B. $x^3 - 5x^2 + 6x - 1$ berechnen für alle ganzen Zahlen

$$\cdots -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7, \cdots$$

welche statt x gesetzt werden.

1) Man berechnet für $h = \Delta x = 1$, die Differenzen von u_x, nämlich

$$\Delta u_x = 3x^2 - 7x + 2;\quad \Delta^2 u_x = 6x - 4;\quad \Delta^3 u_x = 6;\quad \Delta^4 u_x = \Delta^5 u_x = \text{etc. etc.} = 0;$$

so hat man die allgemeinen Glieder der Ur-Reihe und ihrer ersten, zweiten, dritten Differenz-Reihen, während die Glieder der vierten und folgenden Differenz-Reihen alle der Null gleich sind. Die Ur-Reihe bildet also eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung.

2) Nun setzt man $x = 0$ und findet aus u_x, Δu_x, $\Delta^2 u_x$ und $\Delta^3 u_x$ sogleich

$$\Delta^3 u_0 = 6,\quad \Delta^2 u_0 = -4,\quad \Delta u_0 = 2 \quad \text{und} \quad u_0 = -1.$$

Also kennt man nun alle Glieder der dritten Differenz-Reihe, und von jeder ihrer Summen-Reihen das dem Zeiger 0 zugehörige Glied $\Delta^2 u_0$, Δu_0 und u_0; und man bildet sich daher die Glieder dieser Reihen auseinander nach der Formel des §. 87.), nämlich nach der Formel

$$1)\ \Delta^p u_{r+1} = \Delta^p u_r + \Delta^{p+1} u_r \quad \text{oder} \quad 2)\ \Delta^p u_r = \Delta^p u_{r+1} - \Delta^{p+1} u_r.$$

Man schreibt also nun hin die den Zeigern

$$\cdots\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ +4,\ +5,\ +6,\cdots$$

entsprechenden Glieder der

IIIten D.R. $\cdots$ 6, 6, 6, 6, **6**, 6, 6, 6, 6, 6, 6,...
IIten D.R. $\cdots$ $-28, -22, -16, -10, -4$, 2, 8, 14, 20, 26, 32,...
Iten D.R. $\cdots$ 78, 50, 28, 12, **2**, -2, 0, 8, 22, 42, 78,...
U.R. $\cdots$ $-169, -91, -41, -13, -1$, 1, -1, -1, 7, 29, 71,...

indem man von den zu dem Zeiger 0 gehörigen Gliedern ausgeht, und für die zur Rechten derselben hinzuschreibenden Zahlen, die Gleichung 1.), für die zur Linken derselben stehenden Zahlen dagegen die Gleichung 2.) anwendet. — Die gefundenen Glieder der Ur-Reihe sind nun die gesuchten Werthe von

u_x für $x = \cdots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, \cdots$.

Anmerkung. Diesem Resultate zufolge liegt zwischen 0 und 1, desgleichen zwischen 1 und 2, endlich auch zwischen 3 und 4 ein Werth von x, welcher $u_x = 0$ macht, d. h. welcher der Gleichung

$$x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0$$

genügt. Diese Gleichung hat also drei reelle und noch überdies positive Wurzel-Werthe.

§. 124.

Man soll die Werthe derselben Funktion u_x, z. B. $x^3 - 5x^2 + 6x - 1$ berechnen, für alle Werthe von x, welche $= 3;\ 3{,}1;\ 3{,}2;\ 3{,}3;\ 3{,}4;\ 3{,}5;\ 3{,}6;\ 3{,}7;\ 3{,}8;\ 3{,}9$ sind.

Man setze $x = 3 + \frac{z}{10}$, so geht u_x über in

$$u_x = (z^3 - 20z^2 + 300z - 1000) \cdot \tfrac{1}{1000}.$$

Man setzt nun

$$z^3 - 20z^2 + 300z - 1000 = v_z,$$

berechnet sich (nach §. 123.) die Werthe von v_z für $z = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, dividirt jeden derselben durch 1000, und man hat dann die gesuchten Werthe von u_x. Die Rechnung macht sich so: für $h = \Delta z = 1$, findet sich

$$\Delta v_z = 3z^2 - 37z + 281,\quad \Delta^2 v_z = 6z - 34;\quad \Delta^3 v_z = 6;$$

also hat man jetzt für $z = 0$, $v_0 = -1000$, $\Delta v_0 = 281$, $\Delta^2 v_0 = -34$ und $\Delta^3 v_0 = 6$. — Folglich berechnen sich die zu den Zeigern

	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
gehörigen Glieder der										
IIIten D. R.	6,	6,	6,	6,	6,	6,	6,	6,	6,	6,
IIten D. R.	−34,	−28,	−22,	−16,	−10,	−4,	2,	8,	14,	20,
Iten D. R.	281,	247,	219,	197,	181,	171,	167,	169,	177,	191,
U. R.	−1000,	−719,	−472,	−253,	−56,	125,	296,	463,	632,	809,

aus den zu $z=0$ gehörigen Gliedern derselben ohne Weiteres. Dividirt man aber die Glieder der Ur-Reihe durch 1000, so erhält man

-1; $-0{,}719$; $-0{,}472$; $-0{,}253$; $-0{,}056$; $+0{,}125$; $+0{,}296$; $+0{,}463$; $+0{,}632$; $+0{,}809$

als die zu den Werthen

3; 3,1; 3,2; 3,3; 3,4; 3,5; 3,6; 3,7; 3,8; 3,9

von x gehörigen Werthe von u_x d. h. von x^3-5x^2+6x-1.

Anmerkung. Bei dieser Gelegenheit sieht man, daß zwischen 3,4 und 3,5 ein Wurzel-Werth der Gleichung $x^3-5x^2+6x-1=0$ liegt.

Man kann jetzt wieder die Werthe von u_x suchen für die Werthe von x, welche nach und nach

$=3{,}40$; 3,41; 3,42; 3,43; 3,44; 3,45; 3,46; 3,47; 3,48; 3,49

gesetzt werden, indem man $x=3{,}4+\frac{z}{100}$ setzt, und auf eine ganz analoge Weise verfährt.

Dadurch ist aber das, was im I. Bd.) über die numerische Auflösung der höhern Gleichungen gesagt sich findet, vervollständigt.

§. 125.

Berechnung von Logarithmen-Tafeln.

Es ist allemal, sobald u_x den Brigg'schen Logarithmen von x vorstellt (nach I. Bd. §. 69.)

$$u_x=\frac{log\, x}{log\, 10},$$

wenn $log\, x$ und $log\, 10$ natürliche (Neper'sche) Logarithmen bedeuten. Bezeichnet man $\frac{1}{log\, 10}$, welches ein für allemal

berechnet werden kann, durch M (diese Zahl M heißt der Modul des Brigg'schen Logarithmen-Systems), so hat man

$$u_x = M \cdot log\, x;$$

also findet sich für $h = \Delta x$

$$\Delta u_x = M \cdot log\left(1+\frac{h}{x}\right) = M\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \frac{h^4}{4x^4} + \cdots\right).$$

Daraus folgt weiter

$$\Delta^2 u_x = M\left(-\frac{h^2}{x^2} + 2\frac{h^3}{x^3} + \cdots\right)$$

$$\Delta^3 u_x = M\left(\frac{2h^3}{x^3} + \cdots\right)^*)$$

$$\Delta^4 u_x = M\left(-\frac{6h^4}{x^4} + \cdots\right)$$

u. s. w. s. — Ist also $\frac{h}{x}$ ein kleiner Bruch, so werden die Differenzen Δu_x, $\Delta^2 u_x$, $\Delta^3 u_x$, $\Delta^4 u_x$, ... nach und nach immer kleiner und so äußerst klein, daß die übrigen eine lange Zeit außer Acht gelassen werden können; d. h. wenn man die Logarithmen bis auf zehn Decimalstellen berechnen will, so kann man diejenige Differenz und dann alle folgenden außer Acht lassen, die so klein ist, daß sie auf die ersten zehn Decimalstellen des Logarithmen keinen Einfluß mehr ausübt.

Denkt man sich z. B. die Brigg'schen Logarithmen

u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5

der Zahlen

10000, 10001, 10002, 10003, 10004, 10005, etc. etc.

---

*) Wir erinnern den Leser daran, daß $\Delta^3 u_x$ z. B. gefunden wird, wenn man von der Gleichung

$$\Delta^3 u_x = (u_1 - 1)^3 u_x = u_{x+3} - 3u_{x+2} + 3u_{x+1} - u_x,$$

d. h.

$$\Delta^3 u_x = log(x+3h) - 3log(x+2h) + 3log(x+h) - log\, x$$

$$= log\left(1+\frac{3h}{x}\right) - 3log\left(1+\frac{2h}{x}\right) + 3Log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

ausgeht, diese drei Logarithmen nach der bekannten Reihe für $log(1+z)$ in Reihen verwandelt, die nach Potenzen von $\frac{h}{x}$ fortlaufen, dann aber diese drei Reihen in eine einzige vereinigt.

so findet sich für sie, weil $h = 1$ und $x = 10000$ ist,

$$\begin{aligned} \Delta u_0 &= \quad 0{,}00004\ 34272\ 76863 \\ \Delta^2 u_0 &= -0{,}00000\ 00043\ 42076 \\ \Delta^3 u_0 &= \quad 0{,}00000\ 00000\ 00868. \end{aligned}$$

Deshalb kann man $\Delta^4 u_0$, $\Delta^5 u_0$, etc. etc., aber auch $\Delta^4 u_1$, $\Delta^5 u_1$, etc. etc. und $\Delta^4 u_2$, $\Delta^5 u_2$, etc. etc. etc., welche bezüglich, weil x größer geworden ist, noch kleiner seyn werden, eine lange Zeit hindurch außer Acht lassen. Man denkt sich daher die Glieder der dritten Differenz-Reihe alle einander gleich, berechnet daraus und aus dem direkt berechneten $\Delta^2 u_0$ die Glieder der zweiten Differenz-Reihe bloß durch fortgesetzte Addition, daraus die Glieder der ersten Differenz-Reihe, in so fern das Glied Δu_0 durch direkte Berechnung bekannt ist, und daraus, so wie aus $u_0 = 4$, die Glieder der Ur-Reihe selbst. Diese letzteren sind dann die gesuchten Logarithmen.

Da nach §. 91. I.)

$u_n = u_0 + n_1 \cdot \Delta u_0 + n_2 \cdot \Delta^2 u_0 + n_3 \cdot \Delta^3 u_0 + n_4 \cdot \Delta^4 u_0 + \cdots + \Delta^n u_0$

ist, wo n_1, n_2, n_3, n_4, etc. etc. Binomial-Koefficienten sind, so folgt, daß wenn n sehr groß wird, dann die Glieder $n_4 \cdot \Delta^4 u_0 + n_5 \cdot \Delta^5 u_0 + \cdots + \Delta^n u_0$ doch bedeutend genug werden können und daher nicht mehr außer Acht gelassen werden dürfen.

Weil aber $\Delta^4 u_0$, wenn $u_x = M \cdot \log x$ ist, mit dem Gliede $-6M\frac{h^4}{x^4}$ beginnt, so würde das 51te Glied u_{50} d. h. *log* 10050, je nachdem man das Glied $n_4 \cdot \Delta^4 u_0$ wegläßt oder noch hinzunimmt, um $\frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 6M \cdot \frac{1}{10^{16}}$ größer oder kleiner werden, während M zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ liegt. Dieser Unterschied, als Decimal-Bruch ausgedrückt, hat noch in den 10 ersten Decimalstellen lauter Nullen; also kann man auf diesem Wege die Logarithmen der Zahlen 10000 bis 10050 bis auf 10 Decimalstellen genau berechnen, wenn man nur die ganze Rechnung mit 15 Decimalstellen führt. — Um eine Kontrolle der Rechnung zu haben, muß man von Zeit zu Zeit einzelne Logarithmen, z. B. die der zusammengesetzten Zahlen, direkt berechnen, welche letzteren durch Addition der Logarithmen ihrer Faktoren erhalten werden.

Hörte aber bei 10051 die Genauigkeit der Rechnung auf, so würde man von vorn anfangen, und

log 10050, *log* 10051, *log* 10052, *log* 10053, *log* 10054, etc. etc.

durch

u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, etc. etc.

vorstellen, für $x = 10050$ und $h = 1$, die Werthe Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$ direkt

aus den Formeln berechnen, und nun aus der dritten Differenz-Reihe die zweite, aus dieser die erste, und aus dieser zuletzt wieder die Ur-Reihe durch fortgesetzte Addition bilden. — U. s. f. —

Zur Berechnung der Differenzen Δu_x, $\Delta^2 u_x$, $\Delta^3 u_x$, etc. etc. aus $u_x = M \cdot log\, x$, kann man sich auch noch viel schneller convergirende Reihen bilden. Man nimmt nämlich nach §. 67. des I. Bds.) für $\Delta x = h$,

1) $$\Delta u_x = M \cdot log\,(x+h) - M \cdot log\, x$$
$$= 2M\left[\frac{h}{2x+h} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{h}{2x+h}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{h}{2x+h}\right)^5 + \cdots\right].$$

Hernach hat man noch

$$\Delta^2 u_x = M \cdot log\,(x+2h) - 2M \cdot log\,(x+h) + M \cdot log\, x.$$

Geht man nun von

$$log\,(x+h) - log\, x = log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$
$$= \left(\frac{h}{x} - \tfrac{1}{2}\frac{h^2}{x^2} + \tfrac{1}{3}\frac{h^3}{x^3} + \tfrac{1}{4}\frac{h^4}{x^4} + \cdots\right)$$

aus, setzt man hier $-h$ statt h, addirt man dann die beiden Gleichungen, und wird zuletzt noch $x+h$ statt x gesetzt, so erhält man für $\Delta x = h$,

2) $$\Delta^2 u_x = -2M\left[\tfrac{1}{3}\left(\frac{h}{x+h}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{h}{x+h}\right)^5 + \tfrac{1}{7}\left(\frac{h}{x+h}\right)^7 + \cdots\right].$$

Will man nur eine Genauigkeit in den zehn erstern Decimalstellen, denkt man sich $h = 1$ und $x = 10000$, so reichen in 1.) die zwei ersten Glieder, in 2.) aber reicht schon das erste Glied allein aus, um die gewünschte Genauigkeit zu geben *).

§. 126.

Berechnung von Sinus- und Kosinus-Tafeln.

I. Zur Berechnung der Sinus-Tafeln wendet man auf eine sehr bequeme Weise die Formel an

*) Mehr hierüber findet man in den neuern Turiner Memoiren vom Jahre 1790—91 von Delambre.

$$u_2 = u_1 + \Delta u_1 = u_1 + \Delta u_0 + \Delta^2 u_0.$$

Sie giebt, wenn man unter u_0, u_1, u_2 bezüglich $\sin x$, $\sin(x+h)$, $\sin(x+2h)$ versteht, zunächst

$$\Delta u_0 = \sin(x+h) - \sin x = 2\cos(x+\tfrac{1}{2}h)\cdot\sin\tfrac{1}{2}h$$
$$\Delta^2 u_0 = 2\sin\tfrac{1}{2}h\cdot[\cos(x+\tfrac{3}{2}h) - \cos(x+\tfrac{1}{2}h)]$$
$$= -2(\sin\tfrac{1}{2}h)^2\cdot\sin(x+h)$$

und dann

$$1)\quad \sin(x+2h) = \sin(x+h) + [\sin(x+h) - \sin x] - 2(\sin\tfrac{1}{2}h)^2\cdot\sin(x+h).$$

Diese Formel 1.) wird nun auf folgende Art zur Berechnung der $\sin 2°$, $\sin 3°$, $\sin 4°$, $\sin 5°$, $\sin 6°$, etc. etc. benutzt. Man setzt nämlich $h = 1°$, also $\frac{1}{2}h = \frac{1}{2}$ und berechnet sich aus der Reihe

$$2)\quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

den Sinus von $\frac{1}{2}$ Grad, indem man nach der Proportion

$$180 : \pi = \tfrac{1}{2} : x,\quad x = \frac{\pi}{360}$$

findet, wo π den halben Umfang des Kreises für den Radius 1 vorstellt und diese Zahl statt x in 2.) substituirt. Setzt man dann in 2.) statt x die doppelt so große Zahl, so findet man auch noch $\sin 1°$ direkt. — Hernach aber setzt man in die Formel 1.) zuerst $h = 1°$, und statt x nach und nach $0°, 1°, 2°, 3°, 4°, \cdots$ bis $60°$, und man erhält, nach Delambre, diese Sinus bis auf 10 Decimalstellen genau. Die Rechnung wird erleichtert, wenn man $2(\sin\frac{1}{2}h)^2$ ein für allemal mit den neun Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 multiplicirt, um statt der Multiplikation von $2(\sin\frac{1}{2}h)^2$ mit $\sin(x+h)$ die einzelnen Reihen bloß addiren zu dürfen. Nachgehends wendet man die Formel

$$\sin(60°+\varphi) = \sin(60°-\varphi) + \sin\varphi$$

an, um die Sinus von $60°$ bis zu $90°$ zu berechnen.

Zur Kontrolle der Rechnung dienen

$\sin 15° = \sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{\frac{1}{8}}$; $\sin 18° = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}$; $\sin 30° = \frac{1}{2}$;
$\sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\sin 54° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$; $\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Auf dieselbe Weise kann man aber auch dann die Sinus von Minute zu Minute, oder von 10 Sekunden zu 10 Sekunden berechnen.

Setzt man aber in der Gleichung 1.) $x-2h$ statt x, so erhält man noch

$$3)\quad \sin(x-2h) = \sin(x-h) - [\sin x - \sin(x-h)] - 2(\sin\tfrac{1}{2}h)^2\cdot\sin(x-h).$$

ittelſt dieſer Formel kann man die Sinus auch rückwärts be-
hnen, indem man von $sin\,90^\circ = 1$ ausgeht.

II. Wendet man die von Legendre gegebene Formel
. 108. Note)

$$\Delta^n(sin\,x) = -2(sin\,\tfrac{1}{2}h)^2\cdot[\Delta^{n-1}sin\,x + \Delta^{n-2}sin\,x]$$

, um $\Delta(sin\,x)$, $\Delta^2(sin\,x)$, $\Delta^3(sin\,x)$, $\Delta^4(sin\,x)$, etc. etc. etwa
r $x = 0$ zu berechnen, ſo kann man die Sinus aller Bogen,
ie im vorhergehenden Paragraphen die Logarithmen durch fort-
ſetzte Bildung der dritten, zweiten und erſten Differenz-Reihe
rechnen *).

§. 126bis.

Berechnung der Logarithmen der Sinus und Koſinus in Tafeln.

I. Um die Logarithmen der Sinus zu berechnen, dazu
)lägt Delambre die Gleichung vor

$$1)\quad log\cdot sin\,(x+h) = log\cdot sin\,x + 2M\cdot\left[\frac{\Delta sin\,x}{2sin\,x+\Delta sin\,x} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\Delta sin\,x}{2sin\,x+\Delta sin\,x}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{\Delta sin\,x}{2sin\,x+\Delta sin\,x}\right)^5 + \ldots\right]$$

nd er empfiehlt, letztere dazu zu gebrauchen, um $log\cdot sin\,x$
on 45° bis zu 90° zu berechnen. Die Logarithmen der Si-
us der Winkel unter 45° finden ſich dann aus der Gleichung

$$2)\quad log\cdot sin\,\tfrac{1}{2}\varphi = log\cdot sin\,\varphi - (log\cdot cos\,\tfrac{1}{2}\varphi + log\,2).$$

II. Die Taylor'ſche Reihe giebt

$$3)\quad \Delta log\cdot sin\,x = log\cdot sin\,(x+h) - log\cdot sin\,x = cotg\,x\cdot h - (1+cotg\,x^2)\cdot\frac{h^2}{2!} + \ldots;$$

nd hier reichen die zwei erſten Glieder aus, um $\Delta log\cdot sin\,x$
u liefern, wenn h ſehr klein iſt.

---

*) Auf dieſem Wege ſind unter Prony's Leitung die großen Sinus-
Tafeln von 0,00001 zu 0,00001 des Quadranten, in dem Cadaſtre-Büreau
u Paris, berechnet worden, von denen zwei gleichlautende Abſchriften in die
Archive des Längenbüreau's der Sternwarte zu Paris niedergelegt wor-
en ſind.

III. Es ist

$$2\sin x + \Delta\sin x = \sin x + \sin(x+h),$$

also

$$\frac{\Delta\sin x}{2\sin x + \Delta\sin x} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{\sin(x+h) + \sin x} = tg\,\tfrac{1}{2}h \cdot cotg\,(x+\tfrac{1}{2}h).$$

Substituirt man dies in die Formel 1.), so wird solche brauchbar, um bereits vorhandene Tafeln zu verificiren, indem man die Glieder der Reihe dadurch berechnet, daß man die Logarithmen der Tangenten und Kotangenten aus den gegebenen Tafeln selbst nimmt, da die Fehler in den letztern Decimalstellen bei dieser Rechnung keinen Einfluß ausüben.

Auf diesem Wege hat Delambre mehrere Unrichtigkeiten in den großen Vlacq'schen Tafeln entdeckt *).

Zweite Abtheilung.

Von der Interpolation.

§. 127.

Ist u eine, entweder wirklich unbekannte Funktion von x, oder eine, zwar bekannte Funktion von x, welche man aber etwa wegen ihrer, zu numerischen Rechnungen unbequemen Form ignoriren will; kennt man ferner zu n Werthen $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ von x die zugehörigen Werthe $u_1, u_2, u_3, \cdots u_n$ von u, alle in Ziffern ausgedrückt, und sucht man nun zu gegebenen Werthen von x, welche zwischen diesen n Werthen liegen, die zugehörigen Werthe von u, so sagt man: „man wolle Werthe von u interpoliren oder einschalten. —

---

*) Delambre findet noch, indem er in der Reihe für $log(1+y)$ $-z^2$ statt y schreibt

$$log(1-z^2) = -M(z^2 + \tfrac{1}{2}z^4 + \tfrac{1}{3}z^6 + \tfrac{1}{4}z^8 + \cdots);$$

und daraus, indem er $z = \sin x$ also $1 - z^2 = \cos x^2$ nimmt

$$log\,\cos x = -M(\tfrac{1}{2}\sin x^2 + \tfrac{1}{4}\sin x^4 + \tfrac{1}{6}\sin x^6 + \cdots).$$

Diese Formel ist ungemein schnell convergent, so lange x noch klein ist.

§. 128.

Das einfachste Mittel, wenn z. B. zu vier Werthen von x die vier Werthe von u bekannt sind, solche Zwischen-Werthe von u zu finden, besteht darin, daß man statt u eine ganz beliebige Funktion von x setzt mit vier noch unbestimmten Koefficienten a, b, c, d, z. B.

$$(\odot)\cdots \quad \begin{cases} u = \dfrac{a+bx+cx^3}{dx^2} \\ \text{oder} \\ u = a+b\cdot \mathit{sin}\, x+c\cdot \mathit{cos}\, x+dx^2, \end{cases}$$

dann in diese Gleichung nach und nach jedes der vier zusammengehörigen Paare x_1, u_1; x_2, u_2; x_3, u_3, zuletzt x_4, u_4 statt x und u substituirt, — aus den vier dadurch hervorgehenden Gleichungen aber, die vier Unbekannten a, b, c und d findet. — Diese gefundenen Werthe werden dann statt a, b, c und d in die genommene Gleichung (⊙.) substituirt, und die so bestimmte Gleichung (⊙.) ist dann eine Interpolations-Formel.

Die genommene Gleichung (⊙) liefert nämlich nun, zu den Werthen x_1, x_2, x_3 und x_4 von x, genau wieder die Werthe u_1, u_2, u_3 und u_4 von u; an diesen Stellen fällt also die in ⊙.) gefundene Funktion u mit der wirklichen unbekannten oder ignorirten Funktion u_x zusammen. Für die Zwischen-Werthe von x liefert aber nun die Gleichung ⊙.) ebenfalls zugehörige Werthe von u, welche zwar nicht mit den Werthen genau zusammenfallen werden, welche die unbekannte oder ignorirte wirkliche Funktion u_x geliefert haben würde, von denen man aber annimmt, daß sie von den letzteren sehr wenig nur abweichen*).

*) Denkt man sich x und u als Koordinaten-Werthe, so drückt die genommene Gleichung ⊙.) eine Kurve aus, welche mit der durch die Gleichung $u = u_x$ gegebenen Kurve, (wenn u_x die unbekannte oder ignorirte Funktion ist) die 4 zu $x = x_1, x_2, x_3, x_4$ gehörigen Punkte gemein hat, in allen übrigen Punkten aber von der letztern Kurve verschieden seyn wird, während man hofft, daß dieser Unterschied der Ordinaten zwischen diesen vier Punkten nur unbedeutend ist.

§. 129.

Statt aber eine beliebige Funktion von x zu nehmen, nimmt man gewöhnlich die einfachste unter allen, nämlich eine ganze (algebraische rationale) Funktion von x, d. h. man setzt

$$(\mathfrak{C})\cdots \qquad u = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

und bestimmt auf die vorbeschriebene Weise die unbestimmt gelassenen Koefficienten a, b, c und d.

Die Hauptsache bleibt nun die Frage: durch welche Rechnung lassen sich aus den vier Gleichungen

$$\begin{aligned} u_1 &= a + bx_1 + cx_1^2 + dx_1^3 \\ u_2 &= a + bx_2 + cx_2^2 + dx_2^3 \\ u_3 &= a + bx_3 + cx_3^2 + dx_3^3 \\ u_4 &= a + bx_4 + cx_4^2 + dx_4^3 \end{aligned}$$

die vier Unbekannten a, b, c und d am bequemsten finden? —

Laplace, welcher von dem Princip der successiven Annäherung ausging, stellte diese ganze Funktion von x in der folgenden Form hin, nämlich ganz allgemein

$$\text{I.} \quad u = u_1 + (x-x_1)\cdot\delta u_1 + (x-x_1)(x-x_2)\cdot\delta^2 u_1 + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdot\delta_3 u_1 + \cdots,$$

wo die Koefficienten δu_1, $\delta^2 u_1$, $\delta^3 u_1$ bestimmt werden aus den Gleichungen

$$\delta u_1 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}, \qquad \delta u_2 = \frac{u_3 - u_2}{x_3 - x_2}, \qquad \delta u_3 = \frac{u_4 - u_3}{x_4 - x_3},$$

$$\delta u_4 = \frac{u_5 - u_4}{x_5 - x_4}, \cdots$$

$$\delta^2 u_1 = \frac{\delta u_2 - \delta u_1}{x_3 - x_1}, \qquad \delta^2 u_2 = \frac{\delta u_3 - \delta u_2}{x_4 - x_2}, \qquad \delta^2 u_3 = \frac{\delta u_4 - \delta u_3}{x_5 - x_3}, \cdots$$

$$\delta^3 u_1 = \frac{\delta^2 u_2 - \delta^2 u_1}{x_4 - x_1}, \qquad \delta^3 u_2 = \frac{\delta^2 u_3 - \delta^2 u_2}{x_5 - x_2}, \cdots$$

$$\delta^4 u_1 = \frac{\delta^3 u_2 - \delta^3 u_1}{x_5 - x_1}, \cdots$$

Diese Form läßt sich aber auf beliebig viel zum interpoliren benutzte Werthe von x ausdehnen *).

Man wird aber diese Formel nur dann anwenden, wenn man bemerkt, daß in dem Schema

$$\begin{array}{ccccccc} \delta u_1, & \delta u_2, & \delta u_3, & \delta u_4, & \delta u_5, & \cdots \\ & \delta^2 u_1, & \delta^2 u_2, & \delta^2 u_3, & \delta^2 u_4, & \cdots \\ & & \delta^3 u_1, & \delta^3 u_2, & \delta^3 u_3, & \cdots \\ & & & \delta^4 u_1, & \delta^4 u_2, & \cdots \end{array}$$

die Glieder der folgenden und namentlich die der letztern Horizontal-Reihen sehr klein werden; und man wird dann in der I.) so viele Glieder nehmen, daß das letzte mit diesem sehr kleinen Koefficienten $\delta^3 u_1$, oder $\delta^4 u_1$, oder $\delta^5 u_1$, etc. bereits versehen ist.

§. 130.

Verfolgt man die Bildung der Ausdrücke für δu_1, $\delta^2 u_1$, $\delta^3 u_1$, so findet man, daß δu_1 sich nicht verändert, wenn die Zeiger 1 und 2 an x (und u) beliebig mit einander vertauscht werden; daß $\delta^2 u_1$ sich nicht verändert, wenn man die Zeiger 1, 2, 3, an x (und u) beliebig mit einander vertauscht; daß endlich auch $\delta^3 u_1$ unverändert bleibt, wenn man die Zeiger 1, 2, 3, 4 an x (und u) beliebig mit einander vertauscht, wenn nur diese Vertauschung bei x und u zugleich und gleichmäßig geschieht.

Bezeichnet man daher die Koefficienten

---

*) Man findet diese Formel I.), wenn man die ganze Funktion (I.) sogleich in dieser Form annimmt, nämlich

$$u = u_1 + (x-x_1)\cdot\delta u_1 + (x-x_1)(x-x_2)\cdot\delta^2 u_1 + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdot\delta^3 u_1$$

mit den unbestimmten Koefficienten δu_1, $\delta^2 u_1$, $\delta^3 u_1$, — und in sie statt x und u, nach und nach x_2 und u_2, dann x_3 und u_3, endlich x_4 und u_4 substituirt. Aus den dadurch hervorgehenden Gleichungen

$$u_2 = u_1 + (x_2-x_1)\cdot\delta u_1, \quad u_3 = u_1 + (x_3-x_1)\cdot\delta u_1 + (x_3-x_2)(x_3-x_1)\cdot\delta^2 u_1$$

und

$$u_4 = u_1 + (x_4-x_1)\cdot\delta u_1 + (x_4-x_1)(x_4-x_2)\cdot\delta^2 u_1 + (x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)\cdot\delta^3 u_1$$

werden dann die durch δu_1, $\delta^2 u_1$, $\delta^3 u_1$ bezeichneten und vorher unbestimmt gelassenen Koefficienten ohne Weiteres, so wie sie oben gefunden sind, bestimmt.

δu_1, $\delta^2 u_1$, $\delta^3 u_1$, $\delta^4 u_1$
bezüglich durch $[1,2]$, $[1,2,3]$, $[1,2,3,4]$, $[1,2,3,4,5]$,
so ist $[1,2]=[2,1]$, $[1,2,3]=[2,1,3]=[3,1,2]=$ etc.
so wie $[1,2,3,4]=[2,3,1,4]=$ etc. etc. etc.
Und diese Ausdrücke bilden sich aus dem Schema

$$\begin{array}{l|l} x_1 & u_1 \\ x_2 & u_2 \\ x_3 & u_3 \\ x_4 & u_4 \\ x_5 & u_5 \end{array} \begin{array}{l} [1,2] \\ [2,3] \\ [3,4] \\ [4,5] \end{array} \begin{array}{l} [1,2,3] \\ [2,3,4] \\ [3,4,5] \end{array} \begin{array}{l} [1,2,3,4] \\ [2,3,4,5] \end{array} [1,2,3,4,5]$$

auf folgende Weise. Jedes Glied in jeder Vertikal-Reihe dieses Schema wird nämlich gefunden, wenn man die Differenz der beiden Glieder in der nächst vorhergehenden Vertikal-Reihe, zwischen denen das zu findende im Schema sichtbar ist, durch die Differenz $x_\nu - x_\mu$ dividirt, wenn statt ν die letzte Ziffer des Minuenden, statt μ dagegen die erste Ziffer des Subtrahenden in der durch $x_\nu - x_\mu$ zu dividirenden Differenz gesetzt wird.

Und hat man diese Werthe berechnet, so ist die Interpolations-Formel I.) jetzt so zu nehmen

II. $$u = u_1 + (x-x_1)[1,2] + (x-x_1)(x-x_2)[1,2,3] + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)[1,2,3,4] + \cdots.$$

§. 131.

In einer andern Form giebt Lagrange das End-Resultat der zu Anfange des vorhergehenden Paragraphen angedeuteten Rechnung. Dieser findet nämlich die Formel C. des §. 129.) in der Form

III. $$u = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \cdot u_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} \cdot u_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} \cdot u_3 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} \cdot u_4.$$

Man sieht es der Formel sogleich an, daß sie für $x = x_1, x_2, x_3, x_4$ allemal bezüglich $u = u_1, u_2, u_3, u_4$ liefert, und daß sie rechts in eine ganze Funktion von x vom dritten Grade umgeformt werden kann. — Auch ist es jedem Anfänger leicht, dieselbe Formel für den Fall auszudehnen, wo mehr oder weniger als vier Werthe zum Interpoliren benutzt werden sollen. Sollen z. B. nur die zwei Paare von Werthen x_1, u_1 und x_2, u_2 benutzt werden, so erhält man

$$1) \qquad u' = \frac{(x-x_2)}{x_1-x_2}\cdot u_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\cdot u_2,$$

wo u' die statt der unbekannten oder ignorirten Funktion u_x jetzt gesetzte ganze Funktion (vom ersten Grade) ist. — Und will man auch noch das dritte Paar Werthe, nämlich x_3, u_3 zum Interpoliren benutzen, so erhält man die ganze Funktion u'' vom zweiten Grade, nämlich

$$2) \quad u'' = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\cdot u_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\cdot u_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\cdot u_3,$$

welche jetzt statt der gesuchten oder ignorirten Funktion u_x gesetzt wird *).

---

*) Man kann aus diesen Formen des Lagrange auch leicht wieder die des Laplace ableiten. Aus 1.) folgt nämlich augenblicklich

$$1') \quad u' = u_1 + (x-x_1)\cdot\left[\frac{u_1}{x_1-x_2} + \frac{u_2}{x_2-x_1}\right] = u_1 + (x-x_1)\cdot\delta u_1.$$

Aus 2.) dagegen, wenn man die 1.) subtrahirt, ergiebt sich

$$2') \quad u'' = u' + (x-x_1)(x-x_2) \times\left[\frac{u_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \frac{u_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{u_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right] = u' + (x-x_1)(x-x_2)\cdot\delta^2 u_1.$$

Und aus III.) ergiebt sich, wenn man die 2.) subtrahirt

$$3') \quad u = u'' + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \times\left[\frac{u_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} + \frac{u_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} + \frac{u_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} + \frac{u_4}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}\right] = u'' + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdot\delta^3 u_1.$$

Addirt man aber alle drei letzteren Gleichungen und hebt man links und rechts die u' und u'' gegenseitig weg, so erhält man

$$u = u_1 + (x-x_1)\cdot\delta u_1 + (x-x_1)(x-x_2)\cdot\delta^2 u_1 + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdot\delta^3 u_1,$$

wo die δu_1, $\delta^2 u_1$, $\delta^3 u_1$ die in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke bedeuten. Dies ist aber die Form des Laplace §. 129. I.) oder §. 130. II.).

Aus dieser Betrachtung geht zugleich die Symmetrie der durch δu_1

Anmerkung. Es ist sehr leicht, nach dem Muster der Lagrange'schen Formel, noch neue Interpolations-Formeln zu bilden, welche zwar nicht mit einander übereinstimmen, von denen aber jede die gegebenen Werthe von u genau liefert, und Zwischen-Werthe berechnen läßt. Nimmt man z. B.

$$u = \frac{\sin p(x-x_2)\cdot\sin q(x-x_3)\cdot\sin r(x-x_4)}{\sin p(x_1-x_2)\cdot\sin q(x_1-x_3)\cdot\sin r(x_1-x_4)}\cdot u_1$$
$$+\frac{\sin p'(x-x_2)\cdot\sin q'(x-x_3)\cdot\sin r'(x-x_4)}{\sin p'(x_2-x_1)\cdot\sin q'(x_2-x_3)\cdot\sin r'(x_2-x_4)}\cdot u_2$$
$$+\frac{\sin p''(x-x_1)\cdot\sin q''(x-x_2)\cdot\sin r''(x-x_4)}{\sin p''(x_3-x_1)\cdot\sin q''(x_3-x_2)\cdot\sin r''(x_3-x_4)}\cdot u_3$$
$$+\frac{\sin p'''(x-x_1)\cdot\sin q'''(x-x_2)\cdot\sin r'''(x-x_3)}{\sin p'''(x_4-x_1)\cdot\sin q'''(x_4-x_2)\cdot\sin r'''(x_4-x_3)}\cdot u_4,$$

wo p, q, r, p′, q′, r′, p″, q″ und r″ ganz beliebige reelle Zahlen vorstellen, — so hat man nach den verschiedenen Werthen dieser letztern, unendlich viele transcendente Funktionen von derselben Form, welche für $x = x_1, x_2, x_3, x_4$ nach der Reihe $u = u_1, u_2, u_3, u_4$ liefern, welche also als Interpolations-Formeln gebraucht werden können (nach §. 128.).

Und nimmt man dieselbe Form, setzt man aber statt der Sinus, jetzt Tangenten, so hat man abermals unendlich viele, wiederum transcendente Interpolations-Formeln.

Alle diese Formeln würden jedoch wenig Bequemlichkeit in der Rechnung gewähren.

§. 132.

Encke giebt (nach Gauß*) den Rath, die zum Interpoliren mittelst der Form des Laplace (§. 130. II.) zu benutzenden Werthe von

---

oder [1, 2], $\delta^2 u_1$ oder [1, 2, 3], $\delta^3 u_1$ oder [1, 2, 3, 4] bezeichneten Ausdrücke augenfällig hervor, während die Gleichungen 1′.), 2′.) und 3′.) deutlich sehen lassen, daß jedes folgende Glied der Laplace'schen Form eine neue Correktion ist, des bis zu diesem Gliede für u genommenen Ausdrucks.

*) S. Berliner astronom. Jahrbuch für das Jahr 1830. Berlin 1828.

von x (und u) jedesmal so zu wählen, daß man von dem Werthe von x (und zugehörigem Werthe von u) ausgeht, welcher dem x am nächsten liegt, und solchen nach und nach durch diejenigen Werthe von x (und u) verbessert, welche abwechselnd auf beiden Seiten des bestimmten Werthes x liegen und immer der Reihe nach die nächsten sind. Man kann zu dem Ende die Formel II. des §. 130.) vorher danach umformen, wenn man nur eben so viele zum Interpoliren zu benutzende Werthe von x (und u) hat, welche dem bestimmten Werth x (zu welchem das zugehörige u gefunden werden soll) der Größe nach vorausgehen, als auch solche, die diesem bestimmten Werthe von x der Größe nach folgen.

Sind z. B. die der Größe nach geordneten Werthe von x durch x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, etc. vorgestellt, und liegt x zwischen x_2 und x_3, aber dem x_3 näher als dem x_2, so kann man in der Form II. des §. 130.) zuerst x_3, dann x_2, hernach x_4 und zuletzt x_1 benutzen, und sie nimmt dann, wenn daselbst 3, 2, 4, 1 statt bezüglich 1, 2, 3, 4 substituirt und dabei die Gleichheit der Ausdrücke [2,3,4], [3,4,2], etc. etc. beachtet wird, wie solche im §. 130.) bemerkbar gemacht worden, — die folgende Form an:

$$\text{IV.}\quad u = u_3 + (x-x_3)[2,3] + (x-x_3)(x-x_2)[2,3,4] + (x-x_3)(x-x_2)(x-x_4)[1,2,3,4].$$

Dieser Form würde man sich also bedienen, wenn x zwischen x_2 und x_3 und dem x_3 näher läge, als dem x_2. — Dabei liegen die Differenz-Werthe [2,3], [2,3,4], [1,2,3,4] im Schema des §. 130.) alle der Reihe nach abwechselnd oberhalb und unterhalb eines und desselben Horizontalstriches, der im gedachten Schema zwischen u_3 und [2,3] gedacht wird, der also auch zwischen u_3 und u_2, aber dem u_3 näher liegt.

Liegt x abermals zwischen x_2 und x_3, aber dem x_2 näher, so nimmt man zuerst x_2, dann x_3, hernach x_1, zuletzt x_4, und die Formel §. 130. II.) ändert sich dann so um:

V. $$u = u_2 + (x-x_2)[2,3] + (x-x_2)(x-x_3)[1,2,3] + (x-x_2)(x-x_3)(x-x_1)[1,2,3,4],$$

welche Form jetzt gebraucht wird, immer unter der Voraussetzung, daß unter x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 die der Größe nach auf einander folgenden Werthe von x verstanden werden. — Dabei liegen die jetzt gebrauchten Differenz-Größen $[2,3]$, $[1,2,3]$, $[1,2,3,4]$ der Reihe nach abwechselnd (im Schema des §. 130.) unterhalb und oberhalb des Horizontal-Striches, der zwischen u_2 und $[2,3]$ gedacht wird, der also zwischen u_2 und u_3, aber dem u_2 näher liegt.

Und liegt x zwischen x_3 und x_4, so wird man x_1 gar nicht, dagegen x_5 benutzen, und zwar, wenn x dem x_3 näher als dem x_4 liegt, zuerst x_3, dann x_4, hernach x_2, zuletzt x_5, so daß die Formel II. des §. 130.) jetzt so umgeformt wird, nämlich

VI. $$u = u_3 + (x-x_3)[3,4] + (x-x_3)(x-x_4)[2,3,4] + (x-x_3)(x-x_4)(x-x_2)[2,3,4,5];$$

und diese Form ist es also, welche jetzt benutzt wird. — Die hier gebrauchten Differenz-Werthe $[3,4]$, $[2,3,4]$, $[2,3,4,5]$ liegen jetzt der Reihe nach abwechselnd unterhalb und oberhalb des Horizontal-Striches, welcher im Schema des §. 130.) zwischen u_3 und $[3,4]$ hindurchgedacht wird, welcher also zwischen u_3 und u_4, aber dem u_3 näher liegt.

§. 133.

I. Denkt man sich die Differenzen der auf einander folgenden Werthe x_1, x_2, x_3, x_4, ··· von x, alle einander gleich und $= h$, so liefert die Formel §. 102. I.), wenn man daselbst zuerst x_1 statt x, und dann x statt $x_1 + nh$ substituirt, so daß

1) $$t = \frac{x - x_1}{h} \quad \text{statt } n$$

gesetzt werden muß, sogleich die Interpolations-Formel

2) $u = u_1 + t\cdot\Delta u_1 + \frac{t(t-1)}{2}\cdot\Delta^2 u_1 + \frac{t(t-1)(t-2)}{2\cdot 3}\cdot\Delta^3 u_1 + \cdots.$

Denn diese Formel enthält zur Rechten, weil $t = \frac{x-x_1}{h}$ ist, eine ganze Funktion von x, und giebt, so oft $x = x_1$, oder $x = x_2$, oder $x = x_3$, oder $x = x_4$, etc. etc. gesetzt wird, insofern dann $t = 1, 2, 3$ oder 4, etc. genommen werden muß (nach §. 91. I.), allemal auch die gegebenen zugehörigen Werthe u_1, u_2, u_3, u_4, etc. etc. (aus denen die Differenzen Δu_1, $\Delta^2 u_1$, $\Delta^3 u_1$ etc. berechnet worden sind).

Dieser Interpolations-Formel bediente man sich früher gewöhnlich; sie geht aber auch aus der Formel II. des §. 130.) hervor. Man findet nämlich unter der jetzigen Voraussetzung daselbst

$$[1,2] = \frac{\Delta u_1}{h};\quad [1,2,3] = \frac{\Delta^2 u_1}{2!h^2};\quad [1,2,3,4] = \frac{\Delta^3 u_1}{3!h^3};\ \text{u. s. f.,}$$

und deshalb geht die Formel §. 130. II.) sogleich in die vorliegende 2.) über.

II. Die Formel §. 132. IV.) giebt dagegen unter der jetzigen Voraussetzung, während x zwischen x_2 und x_3, dem x_3 aber näher gedacht bleibt, und wenn

3) $\frac{x_3 - x}{h} = t$ gesetzt wird,

4) $u = u_3 - t\cdot\Delta u_2 + \frac{t(t-1)}{2}\cdot\Delta^2 u_2 - \frac{t(t-1)(t+1)}{2\cdot 3}\cdot\Delta^3 u_1 + \cdots.$

Die Formel §. 132. V.) dagegen, wo x abermals zwischen x_2 und x_3 und dem x_2 näher gedacht ist, giebt, wenn

5) $\frac{x - x_2}{h} = t$ gesetzt wird,

6) $u = u_2 + t\cdot\Delta u_2 + \frac{t(t-1)}{2}\cdot\Delta^2 u_1 + \frac{t(t-1)(t+1)}{2\cdot 3}\cdot\Delta^3 u_1 + \cdots$*).

*) Für die wirkliche Ausrechnung schreibt man die Formeln 4.) und 6.) noch so:

Was aber die Anwendung dieſer Formeln betrifft, ſo wird man, wenn genug Werthe von u zu Gebote ſtehen, ſo viele Glieder nehmen, bis die folgenden der Differenzen $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, $\Delta^4 u$, $\Delta^5 u$, etc. etc. ſehr klein werden. Würden letztere nämlich zuletzt der Null genau gleich, ſo wäre die unbekannte und ignorirte Funktion u_x ſelbſt eine ganze Funktion von x (nach den §§. 101. und 93.), und dann würde jede dieſer Interpolations-Formeln mit ihr genau zuſammenfallen, auch in allen Zwiſchen-Werthen.

§. 134.

In dem beſonderen Falle, wo x genau in der Mitte zwiſchen x_2 und x_3 liegt, wo alſo im §. 133. N. 6.) $t = \frac{1}{2}$ ſeyn ſollte, würde dieſe Formel 6.) ſelbſt werden, wenn man bis zu $\Delta^4 u_0$ fortgeht,

1) $u = u_2 + \frac{1}{2}\Delta u_2 - \frac{1}{8}\Delta^2 u_1 - \frac{1}{16}\Delta^3 u_1 + \frac{3}{128}\Delta^4 u_0$.

Unter derſelben Vorausſetzung giebt aber die Formel §. 131. N. 4.) noch, weil daſelbſt $t = -\frac{1}{2}$ genommen werden muß,

2) $u = u_3 - \frac{1}{2}\Delta u_2 - \frac{1}{8}\Delta^2 u_2 + \frac{1}{16}\Delta^3 u_1 + \frac{3}{128}\Delta^4 u_1$.

Addirt man nun beide Reſultate, und nimmt man von der Summe die Hälfte, ſo hat man zuletzt

3) $u = \frac{1}{2}(u_2 + u_3) - \frac{1}{16}(\Delta^2 u_1 + \Delta^2 u_2) + \frac{3}{256}(\Delta^4 u_0 + \Delta^4 u_1)$,

wo die Differenzen immer über und unter einem durch x_2 und x_3 gezogenen Horizontal-Striche nächſt anliegen, ſobald man ſie nach dem Schema des §. 130.) bildet. Setzt man aber

$$u_2 + u_3 = k, \quad \Delta^2 u_1 + \Delta^2 u_2 = k', \quad \Delta^4 u_0 + \Delta^4 u_1 = k'',$$
$$\Delta^6 u_{-1} + \Delta^6 u_0 = k''', \text{ u. ſ. w. f.}$$

ſo geht die Form 3.) noch über in

4) $u = \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{8}\left[k' - \frac{3}{16}\left(k'' - \frac{5}{24}\left\{k''' - \cdots\right\}\right)\right]\right)$,

wo x_{-1}, etc. Werthe von x vorſtellen, die dem x_0 noch an Größe vorausgehen.

---

4) $u = u_3 - t\left(\Delta u_2 - \frac{t-1}{2}\left[\Delta^2 u_2 - \frac{t+1}{3}\left(\Delta^3 u_1 - \frac{t-2}{4}\Delta^4 u_1\right)\right]\right)$,

wo t die Bedeutung in 3.) hat; — und

6) $u = u_2 + t\left(\Delta u_2 + \frac{t-1}{2}\left[\Delta^2 u_1 + \frac{t+1}{3}\left(\Delta^3 u_1 + \frac{t-2}{4}\Delta^2 u_0\right)\right]\right)$,

wo t die Bedeutung in 5.) hat, während $\Delta^4 u_0$ vorausſetzt, daß man noch $x_0 < x_1$ und das zugehörige u_0 zum interpoliren benützt habe.

Nach dieſer Formel rechnet man bequem, und ſie giebt u oft aus zwei Gliedern derſelben genau genug, wenn nämlich die 4ten Differenzen ſchon ſehr klein ſeyn ſollten, ſo daß ſie außer Acht gelaſſen werden können.

Will man aber zwiſchen u_2 und u_3 drei Glieder einſchalten, ſo kann man zuerſt zwiſchen je zwei Gliedern genau in die Mitte eines einſchalten nach der vorſtehenden Formel; dann aber, nachdem die neuen Differenzen gebildet ſind, zwiſchen dieſem und x_2, und zwiſchen dieſem und x_3 jedesmal noch eines einſchalten, und dazu ſich derſelben Formel bedienen. — U. ſ. w. f.

Dritte Abtheilung.

Summation endlicher Reihen.

§. 135.

Die Formel §. 102. IV.), nämlich

$$(\odot)\cdots \quad f_x+f_{x+h}+f_{x+2h}+\cdots+f_{x+(n-1)h}=\Sigma f_{x+nh}-\Sigma f_x,$$

giebt die Summe von n Gliedern einer Reihe, welche alle aus einem allgemeinen Gliede f_x dadurch hervorgehen, daß man ſtatt x nach und nach n verſchiedene, um gleichviel (nämlich um h) von einander verſchiedene Werthe ſetzt; — ſobald man nur aus dem gegebenen f_x dies endliche Integral Σf_x zu finden im Stande iſt.

Setzt man alſo z. B. ſtatt f_x nach und nach die Funktionen, für welche man (in den §§. 105. 107. 108. und 109.) die endlichen Integrale finden konnte, ſo erhält man die Summen der n erſten Glieder einer größeren Anzahl ſolcher Reihen. Namentlich geht aus §. 105. N. 2.)

$$1) \quad a^x+a^{x+h}+a^{x+2h}+\cdots+a^{x+(n-1)h}=\frac{a^{x+nh}-a^x}{a^h-1}$$

hervor. Dies iſt die Summe der erſten n Glieder einer ſogenannten geometriſchen Progreſſion, die man in den Elementen auch auf andere Weiſe findet (S. I. Bd. pag. 87. N. 6.).

Ferner aus §. 107. A. 1.)

2) $x^{mlh}+(x+h)^{mlh}+(x+2h)^{mlh}+\cdots+(x+(n-1)h)^{mlh} = \frac{(x+(n-1)h)^{m+1lh}-(x-h)^{m+1lh}}{(m+1)h}$,

wenn nur m positiv oder negativ ganz oder Null ist.

Aus §. 107. B. 1.) ergiebt sich ferner

3) $x^{ml-h}+(x+h)^{ml-h}+(x+2h)^{ml-h}+\cdots+(x+(n-1)h)^{ml-h} = \frac{(x+nh)^{m+1l-h}-x^{m+1l-h}}{(m+1)h}$.

wenn nur m positiv oder negativ ganz oder Null ist.

Dagegen findet sich aus §. 107. C. 1.) für die Summe von n auf einander folgenden Binomial-Koefficienten (für $h=1$ genommen)

4) $x_m+(x+1)_m+(x+2)_m+\cdots+(x+n-1)_m = (x+n)_{m+1}-x_{m+1}$,

wenn nur m entweder Null oder eine positive ganze Zahl ist *).

Ferner geben die Formeln §. 108. N.N. 3. und 4.)

5) $cos\,x+cos(x+h)+cos(x+2h)+\cdots+cos(x+(n-1)h) = \frac{sin(x+(n-\frac{1}{2})h)-sin(x-\frac{1}{2}h)}{2sin\frac{1}{2}h} = \frac{cos(x+\frac{1}{2}(n-1)h)\cdot sin\frac{1}{2}nh}{sin\frac{1}{2}h}$,

6) $sin\,x+sin(x+h)+sin(x+2h)+\cdots+sin(x+(n-1)h) = \frac{cos(x-\frac{1}{2}h)-cos(x+(n-\frac{1}{2})h)}{2sin\frac{1}{2}h} = \frac{sin(x+\frac{1}{2}(n-1)h)\cdot sin\frac{1}{2}nh}{sin\frac{1}{2}h}$.

U. s. w. f.

Diese Formeln N.N. 1.—6.) sind nur als eben so viele Beispiele anzusehen. — Hier noch einige weitere Beispiele.

Ist z. B. die arithmetische Reihe der ersten Ordnung gegeben, nämlich

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \cdots\ n-1,\ n,\ n+1,\ \cdots,$$

und soll die Summe ihrer n ersten Glieder gefunden werden, so hat man das allgemeine x^{te} Glied $=x$ und $h=1$; also $f_x=x$, und (nach §. 109. N. 2. für $h=1$)

$$\Sigma f_x = \tfrac{1}{2}(x^2-x) = \tfrac{1}{2}x(x-1) = \frac{x(x-1)}{2}.$$

Folglich findet sich (nach ⊙.)

7) $x+(x+1)+(x+2)+\cdots+(x+n-1) = \frac{(x+n)(x+(n-1))}{2}-\frac{x(x-1)}{2}$;

also für $x=1$

8) $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$.

Soll nun die Summe der n ersten Glieder der figurirten Reihe der zweiten Ordnung

---

*) Nimmt man h nicht $=1$, sondern $h=h$, so erhält man die Summe von n Binomial-Koefficienten, von denen je zwei nächst auf einander folgende um $h-1$ zwischenliegender von einander entfernt sind.

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ \cdots$$

gefunden werden, deren allgemeines x^{tes} Glied $\frac{x^{2|1}}{2}$ ist (und welche man auch die Triangular-Zahlen nennt), so hat man $h=1$ und $f_x=\frac{x^{2|1}}{2}$, also nach §. 107. N. 1.) und §. 104. N. 4.)

$$\Sigma f_x=\frac{(x-1)^{3|1}}{3!};$$

folglich hat man (nach ⊙)

$$9)\quad \frac{x^{2|1}}{2}+\frac{(x+1)^{2|1}}{2}+\frac{(x+2)^{2|1}}{2}+\cdots+\frac{(x+n-1)^{2|1}}{2}=\frac{(x+(n-1)^{3|1}-(x-1)^{3|1}}{3!},$$

und für $x=1$

$$10)\quad 1+3+6+\cdots+\frac{n^{2|1}}{2!}=\frac{n^{3|1}}{3!}.$$

So finden sich hier die Summen der n ersten Glieder aller figurirten Reihen direkt, welche wir im I. Bd. §. 33.) auf indirektem Wege gefunden haben. Auf demselben Wege kann man also die Summe von n auf einander folgenden Gliedern von unzählich vielen solchen Reihen finden.

§. 136.

Man findet dieselben Resultate auch durch folgende Betrachtung. Bezeichnet man nämlich durch S_x die Summe der ersten $x-1$ Glieder einer Reihe, deren allgemeines x^{tes} Glied $=f_x$ ist (so daß die Reihe selbst durch

$$f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ \cdots\ f_{x-1},\ f_x$$

vorgestellt wird), so ist S_{x+1} die Summe der ersten x Glieder, also die Summe aus S_x und f_x, d. h. es ist

$$S_{x+1}=S_x+f_x,\quad \text{folglich}\quad S_{x+1}-S_x=f_x,$$

d. h.

$$(\mathbb{C})\cdots\quad \Delta_1 S_x=f_x\quad \text{und}\quad S_x=\Sigma_1 f_x+C_x,$$

wo C_x eine jedesmal noch zu bestimmende Constante ist, während Δ_1 und Σ_1 die zu Ende des §. 99.) festgestellte Bedeutung haben.

Soll also die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe gefunden werden, so wird man nach C.) S_x finden, dann aber $n+1$ statt x setzen.

Beispiel 1. Wollte man danach z. B. die Summe der n ersten Glieder der Reihe 1.) des §. 135.), nämlich der Reihe

$$a^x,\ a^{x+h},\ a^{x+2h},\ a^{x+3h},\ \ldots\ a^{x+(n-1)h}$$

finden, so würde man vor allen Dingen einen andern Buchstaben, etwa z, statt x setzen, um statt n jetzt x setzen zu können, so daß, wenn man noch p statt h setzt, zu summiren wäre die Reihe

$$a^z,\ a^{z+p},\ a^{z+2p},\ \ldots\ a^{z+(x-1)p}.$$

Hernach hätte man

$$f_x = a^{z+(x-1)p} = a^{z-p}\cdot a^{xp};$$

also (nach §. 104. IV.)

$$\Sigma_1 f_x = a^{z-p}\cdot\Sigma_1(a^{xp}) = a^{z-p}\cdot\frac{a^{xp}\ *)}{a^p-1} = \frac{a^{z+(x-1)p}}{a^p-1}.$$

Man hat daher nun nach der Formel (C.)

$$1)\qquad S_x = \frac{a^{z+(x-1)p}}{a^p-1} + C,$$

wo die Constante C noch zu bestimmen bleibt, während S_x die Summe der ersten $x-1$ Glieder der Reihe vorstellt. Setzt man daher $x=2$, so bedeutet S_x das erste Glied a^z der Reihe, und die vorliegende Gleichung 1.) geht daher über in

$$2)\qquad a^z = \frac{a^{z+p}}{a^p-1} + C,\quad \text{und giebt}\quad C = -\frac{a^z}{a^p-1}.$$

Dieser Werth von C in die 1.) substituirt, giebt nun

$$3)\qquad S_x = \frac{a^{z+(x-1)p}-a^z}{a^p-1}.$$

Setzt man nun hier $n+1$ statt x, so wie wiederum x statt z, und h statt p, so erhält man die Summe der ersten n Glieder der Reihe

$$a^x,\ a^{x+h},\ a^{x+2h},\ \ldots\ a^{x+(n-1)h} = \frac{a^{x+nh}-a^x}{a^h-1},$$

d. h. genau so wie im vorhergehenden §. 135. N. 1.).

Wir wollen es dem Anfänger überlassen, auch die übrigen Nummern des vorhergehenden §. 135.) auf dem jetzigen Wege wieder zu finden, und geben lieber hier noch mehrere besondere Beispiele.

Beispiel 2. Es sey zu summiren die Reihe von Brüchen, deren Zähler $=1$, deren Nenner aber die figurirten Zahlen der m^{ten} Ordnung sind. — Es ist also zu summiren die Reihe, deren allgemeines x^{tes} Glied

---

*) Setzt man nämlich $a^p = b$, so ist $a^{xp} = b^x$ und

$$\Sigma_1(a^{xp}) = \Sigma_1(b^x) = \frac{b^x}{b-1}\ \text{(nach §. 105. N. 2.) d. h.}\ \Sigma_1 a^{xp} = \frac{a^{xp}}{a^p-1}.$$

$$f_x = \frac{(m-1)!}{x^{\underline{m-1}}}$$

ist, d. h. die Reihe (für $x = 1, 2, 3, 4, \cdots x$)

$$1, \frac{1}{m}, \frac{2!}{m(m+1)}, \frac{3!}{m(m+1)(m+2)}, \cdots.$$

Man hat hier, weil (nach I. Bd. §§. 26. 27.)

$$\frac{1}{x^{\underline{m-1}}} = (x+m-1)^{-(m-1)}$$

und (nach §. 104. N. 6. und §. 107. N. 1.)

$$\Sigma_x (x+m-1)^{-(m-1)} = \frac{(x+m-2)^{-(m-2)}}{-m+2} = -\frac{1}{(m-2)\cdot x^{m-2}}$$

ist, — sogleich

$$\Sigma_x (f_x) = (m-1)!\,\Sigma_x\left(\frac{1}{x^{\underline{m-1}}}\right) = -\frac{(m-1)!}{(m-2)\cdot x^{m-2}}.$$

Folglich giebt die Formel (C.) jetzt

1) $$S_x = -\frac{(m-1)!}{(m-2)\cdot x^{m-2}} + C,$$

wo die Constante C noch zu bestimmen bleibt, während S_x die Summe der ersten $x-1$ Glieder der Reihe repräsentirt. Setzt man daher $x=2$, so stellt S_x das erste Glied 1 der Reihe vor, und die letztere Gleichung geht dadurch über in

2) $$1 = -\frac{1}{m-2} + C, \quad \text{so daß} \quad C = \frac{m-1}{m-2}$$

wird. Dieser Werth von C in S_x substituirt, giebt

3) $$S_x = \frac{m-1}{m-2} - \frac{(m-1)!}{(m-2)\cdot x^{m-2}}.$$

Setzt man daher hier statt x jetzt $n+1$, so erhält man die Summe der ersten n Glieder der gegebenen Reihe

$$1 + \frac{1}{m} + \frac{2!}{m(m+1)} + \frac{3!}{m(m+1)(m+2)} + \frac{4!}{m(m+1)(m+2)(m+3)} + \cdots,$$
$$= \frac{m-1}{m-2}\cdot\left[1 - \frac{(m-2)!}{(n+1)^{m-2}}\right].$$

Beispiel 3. Sollte die Summe der ersten n Glieder der Reihe

$$1^m, 2^m, 3^m, 4^m, \cdots x^m, \cdots$$

gefunden werden, für irgend eine bestimmte ganze positive Zahl m, so würde man nach §. 109.) $\Sigma_x(x^m)$ nehmen, dann

$$S_x = \Sigma_x(x^m) + C$$

haben; hierauf für $x=2$, $S_x = 1^m = 1$ nehmen müssen und daraus C bestimmen; diesen Werth von C hier herein substituiren, zuletzt aber $n+1$ statt x setzen

Diese Beispiele mögen aber ausreichen, um den Anfänger in den Stand zu setzen, deren noch mehrere und beliebig viele, welche eine glückliche Lösung zulassen, selbst zu lösen.

§. 137.

Hat man die Summe von n Gliedern einer Reihe gefunden, so darf man nur n immer größer und größer sich denken, zuletzt aber unendlich groß, um die Summe von immer mehr und mehr und zuletzt von unendlich vielen Gliedern derselben Reihe zu haben, wenn nur im letztern Falle die unendliche Reihe selbst convergent ist.

So kann man also in vielen Fällen auch die Summen von unendlichen und convergenten Reihen angeben.

Setzt man z. B. im Beispiel 2.) zu §. 136.) $n=\infty$, so erhält man sogleich

$$1+\frac{1}{m}+\frac{2!}{m(m+1)}+\frac{3!}{m(m+1)(m+2)}+\cdots \text{ in inf.} = \frac{m-1}{m-2},$$

wenn nicht $(m-2)!$ die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, also wenn $m \gtreqless 2$ ist.

Also findet sich für $m=3, 4, 5,$

$$1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{21}+\cdots = 2,$$
$$1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{20}+\tfrac{1}{35}+\tfrac{1}{56}+\cdots = \tfrac{3}{2},$$
$$1+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{35}+\tfrac{1}{70}+\tfrac{1}{126}+\cdots = \tfrac{4}{3},$$

u. s. w. f.; wobei man nicht übersehen wird, daß die Nenner dieser Reihen genau die figurirten Zahlen der 2ten, 3ten, 4ten, etc. etc. Ordnung sind.

Für $m=2$ würde man finden

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\cdots \text{ in inf.} = \tfrac{1}{0}.$$

Wir wissen aber, daß diese Reihe die gemeine harmonische Reihe und divergent ist.

Vierzehntes Kapitel.

Von der Summation allgemeiner und numerischer unendlichen Reihen, namentlich solcher die nach Sinus und Kosinus der vielfachen Bogen fortlaufen.

§. 138.

Außer den unendlichen, nach Potenzen von z fortlaufenden Reihen, welche durch die Division zweier ganzen Funktionen von z hervorgehen, und welche in der Geschichte der Mathematik unter dem Namen der recurrenten (recurrirenden) Reihen vorkommen, bemerke man noch die Reihen

1) $1+m_1z+m_2z^2+m_3z^3+m_4z^4+\cdots$ in inf. $=(1+z)^m$,

wo m_1, m_2, m_3, m_4, etc. etc. Binomial-Koefficienten vorstellen,

2) $1+\frac{z\cdot log\,a}{1}+\frac{z^2\cdot(log\,a)^2}{2!}+\frac{z^3\cdot(log\,a)^3}{3!}+\cdots=a^z$,

also

3) $1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots=e^z$,

wenn *log* a den natürlichen Logarithmen und e die Basis desselben vorstellt; — ferner

4) $z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4+\cdots=log\,(1+z)$,

5) $z+\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5+\frac{1}{7}z^7+\cdots=\frac{1}{2}log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$,

6) $z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots=sin\,z$,

7) $1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\frac{z^8}{8!}-\cdots=cos\,z$,

8) $z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{7}z^7 + \cdots = \frac{1}{tg}z$ d. h. *arc. tg* z,

9) $z + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot z^5 + \frac{1}{7}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot z^7 + \cdots = \frac{1}{sin}z$

d. h. *arc. sin* z,

welche am gewöhnlichsten und häufigsten erscheinen.

Setzt man in diesen Reihen statt z irgend einen andern zusammengesetzten Ausdruck, z. B. eine Funktion von x, so kann man die Resultate nach einem andern Veränderlichen, z. B. x ordnen; aber die Ausdrücke, welche sich zur Rechten ergeben, heißen dann doch immer die Summen dieser unendlichen Reihen zur Linken.

Man kann sich ferner eine unendliche Reihe aus zwei, drei, oder mehreren solchen unendlichen Reihen, deren Summen man kennt, durch arithmetische Operationen verbunden denken, und man erhält durch dieselbe Verbindung ihrer Summen einen Ausdruck in endlicher Form, der, in eine Reihe entwickelt, dieselbe wieder hervorbringt. Auch dieser Ausdruck wird die Summe dieser unendlichen Reihe genannt; und ihn zu finden heißt „die unendliche Reihe summiren."

Man kann aber auch aus gefundenen Summen die Summen von neuen Reihen dadurch finden, daß man die gegebenen nach irgend einem der vorkommenden Buchstaben differenziirt oder integrirt.

Die Kunst des Summirens einer Reihe besteht also im Wesentlichen darin, daß man sucht die Reihe in solche zu zerlegen, deren Summe man kennt, oder durch Einführung eines neuen Veränderlichen auf eine andere zurückzuführen, deren Summe bekannt ist.

Wir wollen aber hier nur einige der interessantesten summirbaren Reihen geben, und uns nachgehends auf die Kunst des Summirens hier nicht weiter einlassen.

§. 139.

Lehrsatz.

Ist bekannt die Summe irgend einer Reihe

1) $A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\cdots=F_x$,

so kann man sogleich auch eine nach Sinus oder Kosinus der vielfachen Bogen fortlaufende Reihe summiren, welche dieselben Koefficienten hat; denn es ist dann allemal

2) $A_0+A_1v\cdot\cos z+A_2v^2\cdot\cos 2z+A_3v^3\cdot\cos 3z$
$+A_4v^4\cdot\cos 4z+\cdots=\frac{1}{2}([F_x]_{v.e^{zi}}+[F_x]_{v.e^{-zi}})$

und

3) $A_1v\cdot\sin z+A_2v^2\cdot\sin 2z+A_3v^3\cdot\sin 3z$
$+A_4v^4\cdot\sin 4z+\cdots=\frac{1}{2i}([F_x]_{v.e^{zi}}-[F_x]_{v.e^{-zi}})$,

wo $[F_x]_{v.e^{zi}}$ und $[F_x]_{v.e^{-zi}}$ das bedeuten, was aus F_x wird, wenn man bezüglich $v\cdot e^{zi}$ und $v\cdot e^{-zi}$ statt x schreibt, während statt e^{zi} auch $\cos z+i\cdot\sin z$, und statt e^{-zi} auch $\cos z-i\cdot\sin z$ geschrieben werden kann (nach I. Bd. §. 70. III. u. IV.).

Und sind die Reihen 2.) und 3.) convergent, sobald $v=1$ gesetzt wird, so hat man dann auch noch

4) $A_0+A_1\cdot\cos z+A_2\cdot\cos 2z+A_3\cdot\cos 3z+A_4\cdot\cos 4z+\cdots$
$=\frac{1}{2}[F_x]_{e^{zi}}+\frac{1}{2}[F_x]_{e^{-zi}}$;

und

5) $A_1\cdot\sin z+A_2\cdot\sin 2z+A_3\cdot\sin 3z+A_4\cdot\sin 4z+\cdots$
$=\frac{1}{2i}[F_x]_{e^{zi}}-\frac{1}{2i}[F_x]_{e^{-zi}}$.

Der Grund davon ist folgender: das allgemeine r^{te} Glied der Reihe 3.) ist

$A_r\cdot v^r\cdot\sin rz$, also auch $A_r\cdot v^r\cdot\frac{e^{rzi}-e^{-rzi}}{2i}$,

folglich auch

$$\frac{1}{2i}A_r\cdot(v\cdot e^{zi})^r-\frac{1}{2i}A_r\cdot(v\cdot e^{-zi})^r.$$

Die Reihe 3.) zerfällt daher in die Differenz zweier anderen Reihen, deren allgemeine Glieder (wenn man den gemeinschaftlichen Faktor $\frac{1}{2i}$ herausgesetzt sich denkt) bezüglich

$A_r\cdot(v\cdot e^{zi})^r$ und $A_r\cdot(v\cdot e^{-zi})^r$

sind, deren Summen also nach 1.) bezüglich

$$= [F_x]_{v \cdot e^{zi}} \quad \text{und} \quad = [F_x]_{v \cdot e^{-zi}}$$

gefunden werden. — Auf ganz analoge Weise zerlegt sich die Reihe 2.), wenn man den Faktor $\frac{1}{2}$ herausſetzt, in die Summe dieſer beiden letztern Reihen.

§. 140.

Geſetzt es wären zu ſummiren die beiden Reihen

$$(R)\cdots \quad \cos nz + n_1 \cdot \cos(n-2)z + n_2 \cdot \cos(n-4)z + n_3 \cdot \cos(n-6)z + \cdots$$

und

$$(S)\cdots \quad \sin nz + n_1 \cdot \sin(n-2)z + n_2 \cdot \sin(n-4)z + n_3 \cdot \sin(n-6)z + \cdots,$$

in welchen n_1, n_2, n_3, etc. etc. die auf einander folgenden Binomial-Koefficienten einer n^{ten} Potenz vorſtellen, ſo daß man hat

$$1) \quad 1 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3 + n_4 x^4 + \cdots = (1+x)^n,$$

ſo würde man alſo damit beginnen, daß man dieſe Reihen in einfachere zerlegte. Weil aber

$$\cos(n-2r)z = \cos nz \cdot \cos 2rz + \sin nz \cdot \sin 2rz$$

und $$\sin(n-2r)z = \sin nz \cdot \cos 2rz - \cos nz \cdot \sin 2rz$$

iſt, und dies immer gilt, wenn ſtatt r nach und nach 1, 2, 3, 4, 5, 6, und alle poſitiven ganzen Zahlen geſetzt werden, ſo reduciren ſich dieſe Reihen R und S ſogleich auf dieſe anderen Reihen

$$(R_1)\cdots \quad 1 + n_1 \cdot \cos 2z + n_2 \cdot \cos 4z + n_3 \cdot \cos 6z + n_4 \cdot \cos 8z + \cdots$$

$$(S_1)\cdots \quad n_1 \cdot \sin 2z + n_2 \cdot \sin 4z + n_3 \cdot \sin 6z + n_4 \cdot \sin 8z + \cdots,$$

ſo nämlich, daß man hat:

$$2) \quad R = R_1 \cdot \cos nz + S_1 \cdot \sin nz;$$

$$3) \quad S = R_1 \cdot \sin nz - S_1 \cdot \cos nz;$$

und man darf daher nur noch die Summen der Reihen R_1 und S_1 finden.

Dieſe letzteren Reihen werden aber nun unmittelbar nach

§. 139.) summirt, wenn man statt 2z einen einzigen Buchstaben setzt. Man erhält nämlich aus der 1.), nach §. 139.)

$$4) \qquad R_1 = \frac{(1+e^{2zi})^n + (1+e^{-2zi})^n}{2}$$

und

$$5) \qquad S_1 = \frac{(1+e^{2zi})^n - (1+e^{-2zi})^n}{2i}.$$

Aus diesen Ausdrücken zur Rechten muß man aber, indem man sie umformt, i d. h. $\sqrt{-1}$ herausschaffen, weil sich letztere wechselseitig aufheben müssen. Nun ist aber

$$1+e^{2zi} = (e^{zi}+e^{-zi})\cdot e^{zi} = 2cos\,z\cdot(cos\,z+i\cdot sin\,z)$$

und

$$1+e^{-2zi} = (e^{zi}+e^{-zi})\cdot e^{-zi} = 2cos\,z\cdot(cos\,z-i\cdot sin\,z);$$

folglich auch

$$6) \qquad (1+e^{2zi})^n = (2cos\,z)^n\cdot(cos\,nz+i\cdot sin\,nz)$$

$$7) \qquad (1+e^{-2zi})^n = (2cos\,z)^n\cdot(cos\,nz-i\cdot sin\,nz),$$

wo jedesmal der Faktor $(2cos\,z)^n$ alle Werthe vorstellt, welche die n^{te} Potenz hat, damit die Ausdrücke zur Rechten genau eben so viele und genau dieselben Werthe vorstellen, welche die n^{ten} Potenzen zur Linken haben.

Will man aber in diesen Ausdrücken 6.) und 7.) zur Rechten die Potenz $(2cos\,z)^n$ nur als eindeutig behandeln und so als ob sie in jedem dieser beiden Ausdrücke 6.) und 7.) jedesmal einen und denselben Werth vorstelle, so darf man nur den Faktor 1^n oder $cos\,2nc\pi + i\cdot sin\,2nc\pi$ noch hinzufügen, wo c 0 und jede positive oder negative ganze Zahl vorstellt, und man hat dann

$$8) \quad (1+e^{2zi})^n = (2cos\,z)^n\cdot[cos\,n(2a\pi+z)+i\cdot sin\,n(2a\pi+z)]$$

$$9) \quad (1+e^{-2zi})^n = (2cos\,z)^n\cdot[cos\,n(2b\pi+z)-i\cdot sin\,n(2b\pi+z)],$$

wo wir einmal **a**, das andere Mal **b** statt c gesetzt haben, um die Unabhängigkeit der Werthe von 9.) und 8.) deutlich auszusprechen, während statt **a**, wie statt **b** nach und nach Null

und alle positiven und negativen ganzen Zahlen gesetzt werden müssen, der Faktor $(2\cos z)^n$ aber in beiden Ausdrücken einen und denselben seiner Werthe vorstellt.

Addirt man nun die Ausdrücke in 8.) und 9.) zur Rechten, so ist die Hälfte dieser Summe die Summe der Reihe R_1 (nach 4.); subtrahirt man dagegen den Ausdruck in 9.) zur Rechten, von dem in 8.) zur Rechten, und dividirt man die Differenz noch durch $2i$, so erhält man die Summe der Reihe S_1 (nach 5.).

Weil aber die Ausdrücke in 8.) und 9.) zur Rechten, so oft n eine ganze Zahl nicht ist, mehrere Werthe haben, so entsteht jetzt die wichtigste der Fragen, nämlich, welche dieser Werthe man addiren muß, um R_1, welche derselben man subtrahiren muß, um S_1 wirklich zu bekommen? — Um diese Frage zu beantworten, wollen wir annehmen, daß n beliebig reell sey; dann muß man unterscheiden,

a) wenn $\cos z$ positiv ist, also $(2\cos z)^n$ auch positiv und eindeutig genommen werden kann;

b) wenn $\cos z$ negativ, also $-2\cos z$ positiv ist, folglich $(-2\cos z)^n$ einen einzigen positiven Werth vorstellen kann.

I. Ist nun erstlich $\cos z$ positiv, — wird dann unter $(2\cos z)^n$ ihr einziger positiver Werth verstanden, und hat man sich endlich überzeugt, daß die Reihen R_1 und S_1 convergent sind (für diese Werthe von z, welche man jetzt im Auge hat), so muß man in 8.) und 9.) $b = a$ nehmen, damit die imaginären Theile herausfallen; und man erhält daher nun

10) $$R_1 = (2\cos z)^n \cdot \cos n(2a\pi + z)$$

und

11) $$S_1 = (2\cos z)^n \cdot \sin n(2a\pi + z),$$

wo nur noch ausgemittelt werden darf, ob Null statt a, oder welche ganze Zahl statt a gesetzt werden muß.

Weil

Weil jedoch die Gleichungen 10.) und 11.) nicht für alle Werthe von z gelten, sondern nur für diejenigen, welche *cos* z positiv machen, also nur für die Werthe von z, welche in dem $(4b-1)^{ten}$ oder $(4b+1)^{ten}$ Quadranten liegen, wo b entweder 0 oder jede positive oder negative ganze Zahl vorstellt; — weil also diese Gleichungen 10.) und 11.) immer nur für Werthe von z gelten, welche in zwei auf einander folgenden Quadranten liegen, für die Werthe von z aber nicht mehr gelten, welche in den nächsten beiden Quadranten genommen werden, wohl aber wieder in den dann nächsten beiden Quadranten ihre Wahrheit behalten, u. s. w. f.; so behält a entweder immer einen und denselben Werth (der nur einmal bestimmt zu werden braucht, um für immer bestimmt zu seyn), oder es kann sich der Werth von a ändern müssen, so oft z eine neue Kluft von zwei Quadranten übersprungen hat, innerhalb welcher die Formeln 10.) und 11.) nicht gelten können. Innerhalb je zweier Quadranten aber, für welche die Formeln 10.) und 11.) wieder gelten, und wo gar nichts vorhanden ist, was die Unterbrechung des Stetigkeits-Gesetzes rechtfertigen könnte, muß a einen und denselben Werth behalten. Da nun für $z=0$, die Reihe $R_1 = 2^n$ und die Reihe $S_1 = 0$ wird, sobald man diese Reihe für $z=0$ direckt betrachtet; und da dieselben Resultate auch aus den Formeln 10.) und 11.) hervorgehen, wenn man Null statt a setzt, so folgt:

daß man für alle Werthe von z, welche zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen (für welche *cos* z positiv wird, und unter denen sich $z=0$ befindet) $a=0$ nehmen müsse.

Die Formeln 10.) und 11.) geben daher

12) $R_1 = (2\cos z)^n \cdot \cos nz$ und $S_1 = (2\cos z)^n \cdot \sin nz$;

und dann noch (wegen 2. und 3.)

13) $R = (2\cos z)^n$ und $S = 0$

für alle Werthe von z, welche zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen.

Für $z = 2\mu\pi$, wo μ irgend eine beſtimmte ganze Zahl vorſtellt, nehmen die Reihen R_1 und S_1, wenn man ſie direckt betrachtet, offenbar dieſelben Werthe an, wie für $z = 0$, nämlich bezüglich 2^n und 0. Die Formeln 10.) und 11.) geben aber dieſelben Reſultate (für jedes reelle n) nur dann, wenn $a = -\mu$ genommen wird.

Alſo muß für alle Werthe von z, welche zwiſchen $(2\mu - \frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu + \frac{1}{2})\pi$ liegen, $a = -\mu$ genommen werden. Die Formeln 10.) und 11.) geben daher

$$14) \quad \begin{cases} R_1 = (2\cos z)^n \cdot \cos n(-2\mu\pi + z) \\ \qquad\quad = (2\cos z)^n \cdot \cos n(2\mu\pi - z) \\ S_1 = (2\cos z)^n \cdot \sin n(-2\mu\pi + z) \\ \qquad\quad = -(2\cos z)^n \cdot \sin n(2\mu\pi - z); \end{cases}$$

und (wegen 2. und 3.) dann auch noch

$$15) \quad \begin{cases} R = (2\cos z)^n \cdot \cos 2\mu n\pi \\ S = (2\cos z)^n \cdot \sin 2\mu n\pi, \end{cases}$$

für alle Werthe von z, welche zwiſchen $(2\mu - \frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu + \frac{1}{2})\pi$ liegen, wo μ entweder 0 oder poſitiv oder negativ ganz gedacht wird, ſo daß die Formeln 14.) und 15.) (für $\mu = 0$) die Formeln 12.) und 13.) in ſich ſchließen.

II. Betrachtet man aber die übrigen Werthe von z, für welche $\cos z$ negativ, alſo $-\cos z$ poſitiv iſt, ſo daß ſtatt $(-\cos z)^n$ ein poſitiver Werth geſetzt werden kann, ſo ſetze man in den Formeln 6.) und 7.) ſtatt $(2\cos z)^n$ zunächſt $(-2\cos z)^n \cdot (-1)^n$, dann aber ſtatt $(-1)^n$ wiederum $\cos n(2c+1)\pi + i \cdot \sin n(2c+1)\pi$, und denke ſich unter der Potenz $(-2\cos z)^n$ ihren einzigen poſitiven Werth. Dann erhält man ſtatt der Gleichungen 8.) und 9.) jetzt

$$8') \quad (1 + e^{2zi})^n$$
$$= (-2\cos z)^n \cdot [\cos n((2a+1)\pi + z) + i \cdot \sin n((2a+1)\pi + z)]$$
$$9') \quad (1 + e^{-2zi})^n$$
$$= (-2\cos z)^n \cdot [\cos n((2b+1)\pi + z) - i \cdot \sin n((2b+1)\pi + z)].$$

Statt der Gleichungen 10.) und 11.) erhält man jetzt, so oft $\cos z$ negativ ist,

$$10') \quad R_1 = (-2\cos z)^n \cdot \cos n((2a+1)\pi+z)$$

$$11') \quad S_1 = (-2\cos z)^n \cdot \sin n((2a+1)\pi+z).$$

Weil nun für $z = (2\mu+1)\pi$ (welches in der Mitte liegt zwischen den Grenz-Werthen $z = (2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und $z = (2\mu+\frac{3}{2})\pi$, innerhalb welcher $\cos z$ jedesmal negativ wird)
$\cos 2z = \cos 4z = \text{etc.} = 1$ und $\sin 2z = \sin 4z = \text{etc.} = 0$ wird, — so geben die Reihen R_1 und S_1 für $z = (2\mu+1)\pi$ direkt bezüglich die Werthe 2^n und 0. — Dieselben Resultate gehen aber (für jedes reelle n) auch aus den Formeln 10'.) und 11'.) hervor, wenn man daselbst $(2\mu+1)\pi$ statt z setzt, also -1 statt $\cos z$, zugleich aber $a = -(\mu+1)$ nimmt. Folglich

hat man für alle Werthe von z, welche zwischen $(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu+\frac{3}{2})\pi$ liegen, $a = -(\mu+1)$ zu nehmen. Es ist daher

$$12') \quad \begin{cases} R_1 = (-2\cos z)^n \cdot \cos n(-(2\mu+1)\pi+z) \\ S_1 = (-2\cos z)^n \cdot \sin n(-(2\mu+1)\pi+z) \end{cases}$$

oder

$$13') \quad \begin{cases} R_1 = (-2\cos z)^n \cdot \cos n((2\mu+1)\pi-z) \\ S_1 = -(-2\cos z)^n \cdot \sin n((2\mu+1)\pi-z); \end{cases}$$

und dann auch (wegen 2. und 3.)

$$14') \quad \begin{cases} R = (-2\cos z)^n \cdot \cos (2\mu+1)n\pi \\ S = (-2\cos z)^n \cdot \sin (2\mu+1)n\pi \end{cases}$$

für jeden Werth von z, welcher zwischen $(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu+\frac{3}{2})\pi$ liegt, während μ Null oder irgend eine positive oder negative ganze Zahl vorstellt*).

*) In den „Aufsätzen aus dem Gebiete der höhern Mathematik", Berlin 1823, hat der Verfasser (in der vierten Abtheilung) die Summen dieser Reihen zuerst gegeben. Sie sind auch von Poinsot und Cauchy eben so gefunden worden, von Poinsot fast gleichzeitig, von Cauchy spä-

§. 141.

Als ein Beiſpiel anderer Art zur Erläuterung des in §. 138.) beſchriebenen Summations-Verfahrens ſummiren wir noch die unendliche Reihe

$$(T)\cdots \quad \sin z - \frac{1}{3^4}\cdot\sin 3z + \frac{1}{5^4}\cdot\sin 5z - \frac{1}{7^4}\cdot\sin 7z + \cdots$$

Nach §. 139.) würde die Summe dieſer Reihe gefunden ſeyn, ſobald man die Summe der Reihe

$$(U)\cdots \quad x - \frac{1}{3^4}\cdot x^3 + \frac{1}{5^4}\cdot x^5 - \frac{1}{7^4}\cdot x^7 + \cdots$$

gefunden hätte. Weil aber dieſe letztere Summe nicht ſo bequem gefunden werden kann, ſo greifen wir die Reihe T direkt an. Sie giebt ſogleich

$$1)\quad \delta T_z = \cos z - \frac{1}{3^3}\cdot\cos 3z + \frac{1}{5^3}\cdot\cos 5z - \frac{1}{7^3}\cdot\cos 7z + \cdots$$

$$2)\quad \delta^2 T_z = -\sin z + \frac{1}{3^2}\cdot\sin 3z - \frac{1}{5^2}\cdot\sin 5z + \frac{1}{7^2}\cdot\sin 7z - \cdots$$

---

ter. — Der Verfaſſer legt weniger Werth auf die Reſultate, als auf die ganz elementaren Mittel, welche er zu deren Erzielung angewandt hat. Früher hatten Euler und Lagrange gelehrt, daß die Reihe R für alle Werthe von z, alſo unter allen Umſtänden $=(2\cos z)^n$, und $S=0$ ſey. Reſultate, die, wenn nicht n eine ganze Zahl iſt, dem Obigen zu Folge, nur dann wahr ſind, wenn z zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt. Beide große Analyſten haben verſäumt, die Mehrdeutigkeit der Potenzen zu beachten und gehörig in Rechnung zu bringen. Die mehrdeutigen Ausdrücke entſtehen allemal da, wo verſchiedene Zuſtände in einer und derſelben Rechnungsform ausgedrückt ſich finden. Sucht man alſo mit der nöthigen Aufmerkſamkeit die zuſammengehörigen Werthe heraus, ſo wird man eine Menge von ſcheinenden Sonderbarkeiten (Paradoxien) des Kalkuls entweder nicht finden, oder doch ſogleich auf den erſten Wegen erklärt haben.

Ehe man aber Reihen ſummirt, die nicht mehr allgemein ſind, muß man ſich vorher immer erſt überzeugen, ob oder wenn die Reihen convergiren ſind. Man vergleiche beſonders die oben erwähnten „Aufſätze aus dem Gebiete der höhern Mathematik", wo die wichtigſten praktiſchen Lehren für die Behandlung unendlicher Reihen zuſammengeſtellt ſind und durch Beiſpiele erläutert ſich finden.

Statt der Gleichungen 10.) und 11.) erhält man jetzt, so oft $\cos z$ negativ ist,

$$10') \quad R_1 = (-2\cos z)^n \cdot \cos n((2a+1)\pi+z)$$

$$11') \quad S_1 = (-2\cos z)^n \cdot \sin n((2a+1)\pi+z).$$

Weil nun für $z=(2\mu+1)\pi$ (welches in der Mitte liegt zwischen den Grenz-Werthen $z=(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und $z=(2\mu+\frac{3}{2})\pi$, innerhalb welcher $\cos z$ jedesmal negativ wird) $\cos 2z = \cos 4z = \text{etc.} = 1$ und $\sin 2z = \sin 4z = \text{etc.} = 0$ wird, — so geben die Reihen R_1 und S_1 für $z=(2\mu+1)\pi$ direkt bezüglich die Werthe 2^n und 0. — Dieselben Resultate gehen aber (für jedes reelle n) auch aus den Formeln 10'.) und 11'.) hervor, wenn man daselbst $(2\mu+1)\pi$ statt z setzt, also -1 statt $\cos z$, zugleich aber $a=-(\mu+1)$ nimmt. Folglich

hat man für alle Werthe von z, welche zwischen $(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu+\frac{3}{2})\pi$ liegen, $a=-(\mu+1)$ zu nehmen. Es ist daher

$$12') \quad \begin{cases} R_1 = (-2\cos z)^n \cdot \cos n(-(2\mu+1)\pi+z) \\ S_1 = (-2\cos z)^n \cdot \sin n(-(2\mu+1)\pi+z) \end{cases}$$

oder

$$13') \quad \begin{cases} R_1 = \quad (-2\cos z)^n \cdot \cos n((2\mu+1)\pi-z) \\ S_1 = -(-2\cos z)^n \cdot \sin n((2\mu+1)\pi-z); \end{cases}$$

und dann auch (wegen 2. und 3.)

$$14') \quad \begin{cases} R = (-2\cos z)^n \cdot \cos (2\mu+1)n\pi \\ S = (-2\cos z)^n \cdot \sin (2\mu+1)n\pi \end{cases}$$

Für jeden Werth von z, welcher zwischen $(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu+\frac{3}{2})\pi$ liegt, während μ Null oder irgend eine positive oder negative ganze Zahl vorstellt*).

*) In den „Aufsätzen aus dem Gebiete der höhern Mathematik", Berlin 1823, hat der Verfasser (in der vierten Abtheilung) die Summen dieser Reihen zuerst gegeben. Sie sind auch von Poinsot und Cauchy eben so gefunden worden, von Poinsot fast gleichzeitig, von Cauchy spä-

§. 141.

Als ein Beispiel anderer Art zur Erläuterung des im §. 138.) beschriebenen Summations-Verfahrens summiren wir noch die unendliche Reihe

$$(T)\cdots \quad \sin z - \frac{1}{3^4}\cdot \sin 3z + \frac{1}{5^4}\cdot \sin 5z - \frac{1}{7^4}\cdot \sin 7z + \cdots.$$

Nach §. 139.) würde die Summe dieser Reihe gefunden seyn, sobald man die Summe der Reihe

$$(U)\cdots \quad x - \frac{1}{3^4}\cdot x^3 + \frac{1}{5^4}\cdot x^5 - \frac{1}{7^4}\cdot x^7 + \cdots$$

gefunden hätte. Weil aber diese letztere Summe nicht so bequem gefunden werden kann, so greifen wir die Reihe T direckt an. Sie giebt sogleich

$$1)\ \partial T_z = \cos z - \frac{1}{3^3}\cdot \cos 3z + \frac{1}{5^3}\cdot \cos 5z - \frac{1}{7^3}\cdot \cos 7z + \cdots$$

$$2)\ \partial^2 T_z = -\sin z + \frac{1}{3^2}\cdot \sin 3z - \frac{1}{5^2}\cdot \sin 5z + \frac{1}{7^2}\cdot \sin 7z - \cdots$$

---

ter. — Der Verfasser legt weniger Werth auf die Resultate, als auf die ganz elementaren Mittel, welche er zu deren Erzielung angewandt hat. Früher hatten Euler und Lagrange gelehrt, daß die Reihe R für alle Werthe von z, also unter allen Umständen $=(2\cos z)^n$, und $S=0$ sey; Resultate, die, wenn nicht n eine ganze Zahl ist, dem Obigen zu Folge, nur dann wahr sind, wenn z zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt. Beide große Analysten haben versäumt, die Mehrdeutigkeit der Potenzen zu beachten und gehörig in Rechnung zu bringen. Die mehrdeutigen Ausdrücke entstehen aber allemal da, wo verschiedene Zustände in einer und derselben Rechnungsform ausgedrückt sich finden. Sucht man also mit der nöthigen Aufmerksamkeit die zusammengehörigen Werthe heraus, so wird man eine Menge von anscheinenden Sonderbarkeiten (Paradoxien) des Kalkuls entweder nicht vorfinden, oder doch sogleich auf den ersten Wegen erklärt haben.

Ehe man aber Reihen summirt, die nicht mehr allgemein sind, muß man sich vorher immer erst überzeugen, ob oder wenn die Reihen convergent sind. Man vergleiche besonders die oben erwähnten „Aufsätze aus dem Gebiete der höhern Mathematik", wo die wichtigsten praktischen Lehren für die Behandlung unendlicher Reihen zusammengestellt sind und durch Beispiele erläutert sich finden.

3) $\vartheta^3 T_z = -\cos z + \frac{1}{3}\cdot\cos 3z - \frac{1}{5}\cdot\cos 5z + \frac{1}{7}\cdot\cos 7z - \cdots$

Die für $-\vartheta^3 T_z$ erhaltene Reihe läßt sich nun nach §. 139.) summiren, sobald man §. 138. N. 8.) zu Hülfe nimmt.

Man findet nämlich sogleich allgemein

4) $v\cdot\cos z - \frac{1}{3}v^3\cdot\cos 3z + \frac{1}{5}v^5\cdot\cos 5z - \cdots$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{1}{tg}\left(\frac{2v}{1-v^2}\cdot\cos z\right),$$

also für $v = 1$, weil $\frac{1}{tg}\frac{1}{0} = (b+\frac{1}{2})\pi$ ist,

5) $\cos z - \frac{1}{3}\cos 3z + \frac{1}{5}\cos 5z - \cdots = \frac{1}{2}b\pi + \frac{1}{4}\pi,$

wo b eine noch näher zu ermittelnde ganze Zahl oder Null vorstellt. Diese Gleichung gilt aber nur, so lange nicht $\cos z = 0$ (weil dann der Ausdruck zur Rechten in 4., für $v = 1$, $= \frac{1}{tg}\frac{0}{0}$ wird), d. h. so lange nicht $z = (\mu+\frac{1}{2})\pi$ ist, wo μ Null oder jede ganze Zahl vorstellt. Aber eben weil für $z = \frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, $\cdots$, $-\frac{1}{2}\pi$, $-\frac{3}{2}\pi$, etc. das Gesetz der Stetigkeit unterbrochen wird, in so fern für diese Einzel-Werthe von z die Gleichung 5.) nicht mehr gilt, so wird b zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ seinen Werth nicht ändern, wohl aber vielleicht für andere Grenzen von z anders werden. Weil aber für $z = 0$ die Reihe 5.) zur Linken in

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots$$

übergeht, von der wir wissen, daß sie den Werth $\frac{1}{4}\pi$ hat, so folgt, daß $b = 0$ genommen werden muß, für alle Werthe von z, welche zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen.

Man findet also jetzt aus 5.)

6) $\cos z - \frac{1}{3}\cdot\cos 3z + \frac{1}{5}\cdot\cos 5z - \frac{1}{7}\cdot\cos 7z + \cdots = +\frac{1}{4}\pi,$

für alle Werthe von z, welche zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen.

Für $z = \pi$, ist $\cos z = \cos 3z = \cos 5z = \text{etc.} = -1$; daher ist die Summe der Reihe 5.), wenn sie direckt gefunden wird, $= -\frac{1}{4}\pi$; also muß man jetzt $b = -1$ nehmen; folg-

für alle Werthe von z, welche zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen.

Integrirt man nun diese Gleichung noch einmal, so erhält man

13) $\partial T_z = \cos z - \frac{1}{3^3}\cdot\cos 3z + \frac{1}{5^3}\cdot\cos 5z - \cdots = -\frac{1}{8}\pi z^2 + C$,

wo die Constante C (für z zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$) noch näher bestimmt werden muß. Setzt man zu dem Ende $z = 0$, so geht die Reihe links in

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots$$

über, deren Summe zwar $= \frac{1}{32}\pi^3$ ist, aber nicht so augenblicklich gefunden werden kann. Wollte man deshalb in der Gleichung 13.) lieber $z = \frac{1}{2}\pi$ setzen, so würden alle Glieder zur Linken $= 0$ werden und man würde

$$0 = -\frac{1}{32}\pi^3 + C, \quad \text{d. h.} \quad C = \frac{1}{32}\pi^3$$

erhalten. Allein da man nicht weiß, ob überhaupt die Form 13.) der Summe, noch an der Grenze von z, d. h. für $z = -\frac{1}{2}\pi$ oder für $z = +\frac{1}{2}\pi$ gilt, so bleibt dieses letztere Verfahren, zur Bestimmung der Constante, immer gewagt, und wäre hier höchstens nur dadurch zu rechtfertigen, daß die Formeln 10.) und 11.) für $z = \frac{1}{2}\pi$, also für $\mu = 0$, alle beide in einander übergehen. Man braucht jedoch nicht gerade $z = \frac{1}{2}\pi$ zu nehmen, sondern kann $z = \frac{1}{2}\pi - \varkappa$ setzen, dagegen $\varkappa$ unendlich-klein sich denken. Man hat dann

$\cos z = \sin \varkappa$, $\cos 3z = -\sin 3\varkappa$, $\cos 5z = \sin 5\varkappa$, etc.

und die Gleichung 13.) wird nun

$$\sin \varkappa + \frac{1}{3^3}\cdot\sin 3\varkappa + \frac{1}{5^3}\cdot\sin 5\varkappa + \cdots = -\frac{1}{8}\pi(\tfrac{1}{2}\pi - \varkappa)^2 + C.$$

Da sich nun die Reihe links immer mehr der Null nähert, je kleiner $\varkappa$ gedacht ist, und für $\varkappa$ unendlich klein (wegen der unendlich großen Nenner im Unendlichen) selber unendlich klein wird, so hat man für $\varkappa$ unendlich-klein

$$0 = -\frac{1}{32}\pi^3 + C, \quad \text{also} \quad C = +\frac{1}{32}\pi^3.$$

Es ist daher ∂T_z oder

14) $\cos z - \frac{1}{3^3}\cdot\cos 3z + \frac{1}{5^3}\cdot\cos 5z - \cdots = \frac{1}{32}\pi^3 - \frac{1}{8}\pi z^2$

für alle Werthe von z, welche zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen.

Wird nun zuletzt diese Gleichung 14.) noch einmal integrirt, so erhält man, weil das Resultat für $z = 0$, links $= 0$ wird, folglich auch rechts $= 0$ werden muß, T oder

15) $\sin z - \frac{1}{3^4}\cdot\sin 3z + \frac{1}{5^4}\cdot\sin 5z - \cdots = \frac{1}{32}\pi^3 z - \frac{1}{24}\pi z^3$,

so oft z zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt.

Will man jedoch untersuchen, welche Summe dieselbe Reihe T.), d. h. die Reihe in 15.) zur Linken hat, wenn $z > \frac{1}{2}\pi$ wird, — so setze man $z = \pi - u$, während man sich u zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ denkt, so daß z selbst eben deshalb zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{3}{2}\pi$ liegt. Weil dann

$\sin(2a+1)z = \sin[(2a+1)\pi - (2a+1)u] = \sin(2a+1)u$

wird, so wird jetzt die Summe der gedachten Reihe $= \frac{1}{32}\pi^3 u - \frac{1}{24}\pi u^3$; also daß man hat

16) $\sin z - \frac{1}{3^4}\cdot\sin 3z + \frac{1}{5^4}\cdot\sin 5z - \cdots$

$$= \tfrac{1}{32}\pi^3(\pi - z) - \tfrac{1}{24}\pi(\pi - z)^3;$$

und diese Gleichung gilt für alle Werthe von z, welche zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{3}{2}\pi$ liegen.

Es ist aber leicht auf diesem letztern Wege weiter zu gehen und die Summe derselben Reihe T zu finden, wenn z zwischen $\frac{3}{2}\pi$ und $\frac{5}{2}\pi$, dann zwischen $\frac{5}{2}\pi$ und $\frac{7}{2}\pi$ liegt, u. s. w. f. Setzt man aber allgemeiner $z = (2\mu+1)\pi - u$ und denkt man sich u zwischen $+\frac{1}{2}\pi$ und $-\frac{1}{2}\pi$, so liegt z zwischen $(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu+\frac{3}{2})\pi$. Für diesen Werth von z geht aber die Reihe T wiederum in

$$\sin u - \frac{1}{3^4}\cdot\sin 3u + \frac{1}{5^4}\sin 5u - \cdots$$

über, deren Summe (nach 15.) $= \frac{1}{3\cdot 2}\pi^3 u - \frac{1}{2\cdot 4}\pi u^3$ ist. Folglich erhält man

17) $$\sin z - \frac{1}{3^4}\cdot\sin 3z + \frac{1}{5^4}\cdot\sin 5z - \cdots$$
$$= \frac{1}{3\cdot 2}\pi^3[(2\mu+1)\pi - z] - \frac{1}{2\cdot 4}\pi[(2\mu+1)\pi - z]^3,$$

so oft z zwischen $(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu+\frac{3}{2})\pi$ liegt.

Setzt man aber $z = 2\mu\pi - u$, und denkt man sich u zwischen $+\frac{1}{2}\pi$ und $-\frac{1}{2}\pi$, so liegt z zwischen $(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu+\frac{1}{2})\pi$. Weil aber nun $\sin(2a+1)z = -\sin(2a+1)u$ wird, so geht die Reihe T.) jetzt in eine andere über, deren Summe $= -\frac{1}{3\cdot 2}\pi^3 u + \frac{1}{2\cdot 4}\pi u^3$ ist. Daher findet sich nun

18) $$\sin z - \frac{1}{3^4}\cdot\sin 3z + \frac{1}{5^4}\cdot\sin 5z - \cdots$$
$$= -\frac{1}{3\cdot 2}\pi^3(2\mu\pi - z) + \frac{1}{2\cdot 4}\pi(2\mu\pi - z)^3.$$

so oft z zwischen $(2\mu-\frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ liegt, wo μ entweder Null oder jede positive oder negative ganze Zahl vorstellt.

Durch die Gleichungen 17.) und 18.) sieht sich aber nun die zu Eingange des Paragraphen gegebene Aufgabe auf das vollständigste gelöst, nämlich für alle reellen Werthe von z.

§. 142.

Wir wollen uns noch mit der Summation der Reihe U.) des §. 141.), nämlich der Reihe

(U)··· $$x - \frac{1}{3^4}\cdot x^3 + \frac{1}{5^4}\cdot x^5 - \frac{1}{7^4}\cdot x^7 + \cdots$$

etwas beschäftigen, um neue Modifikationen des Summations-Verfahrens daran sichtbar machen zu können.

Differenzirt man nämlich die Gleichung

1) $$U = x - \frac{1}{3^4}x^3 + \frac{1}{5^4}x^5 - \frac{1}{7^4}x^7 + \cdots,$$

so erhält man

$$2)\quad \partial U_x = 1 - \frac{1}{3^3}\cdot x^2 + \frac{1}{5^3}\cdot x^4 - \frac{1}{7^3}\cdot x^6 + \cdots.$$

Wollte man nun diese Gleichung noch einmal differenziiren, so würde sich der Exponent in den Nennern nicht vermindern und man würde seinen Zweck verfehlen. Multiplicirt man aber die Gleichung 2.) vorher mit x und differenziirt man dann die hervorgehende Gleichung, so erhält man

$$3)\quad \partial(x\cdot\partial U_x)_x = 1 - \frac{1}{3^2}\cdot x^2 + \frac{1}{5^2}\cdot x^4 - \frac{1}{7^2}\cdot x^6 + \cdots.$$

Auf demselben Wege findet sich aber weiter

$$4)\quad \partial(x\cdot\partial(x\cdot\partial U_x)_x)_x = 1 - \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{1}{5}x^4 - \tfrac{1}{7}x^6 + \cdots.$$

Multiplicirt man diese Gleichung noch einmal mit x, so ist die Reihe zur Rechten (nach §. 138. N. 8.) summirbar und $= \frac{1}{tg}x$. Also hat man

$$5)\quad \partial(x\cdot\partial(x\cdot\partial(x\cdot\partial U_x)_x)_x)_x = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{tg}x.$$

Integrirt man nun und bestimmt man die Constante so, daß das Integral mit $x = 0$ anfängt, so erhält man

$$6)\quad x\cdot\partial(x\cdot\partial(x\cdot\partial U_x)_x)_x = x - \frac{1}{3^2}\cdot x^3 + \frac{1}{5^2}\cdot x^5 - \frac{1}{7^2}\cdot x^7 + \cdots$$
$$= \int_{x\div 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{tg}x\cdot dx.$$

Dividirt man diese Gleichung durch x, und integrirt man noch einmal, so daß das Integral mit $x = 0$ anfängt, so ergiebt sich

$$7)\quad x\cdot\partial(x\cdot\partial(x\cdot\partial U_x)_x)_x = x - \frac{1}{3^3}\cdot x^3 + \frac{1}{5^3}\cdot x^5 - \frac{1}{7^3}\cdot x^7 + \cdots$$
$$= \int_{x\div 0}\left(\frac{1}{x}\int_{x\div 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{tg}x\cdot dx\right)\cdot dx.$$

Dividirt man diese Gleichung noch einmal durch x und integrirt man dann zum dritten Male, so erhält man

8) $$U = x - \frac{1}{3^4}\cdot x^3 + \frac{1}{5^4}\cdot x^5 - \frac{1}{7^4}x^7 + \cdots$$
$$= \int_{x\div 0}\left(\frac{1}{x}\int_{x\div 0}\left(\frac{1}{x}\int_{x\div 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{tg}x\cdot dx\right)\cdot dx\right)\cdot dx.$$

Die Schwierigkeit ist jetzt auf die Aus-Werthung der Integrale zurückgeführt; aber diese letztere ist so groß, daß man sich aller dieser Gleichungen lieber dazu bedienen wird, diese Integrale zur Rechten in die Reihen zur Linken auszuwerthen, als dazu, diese Reihen zu summiren, wenn man nicht eben diese angezeigten Integrationen als endliche Summen-Formen für diese Reihen ansehen will.

Namentlich giebt die Gleichung 7.), wenn man $x = 1$ setzt, und wenn man sich aus §. 141.) noch erinnert, daß

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \tfrac{1}{32}\pi^3$$

gefunden wird, den Werth des bestimmten Integrals

$$\int_{1\div 0}\left(\frac{1}{x}\int_{x\div 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{tg}x\cdot dx\right)\cdot dx = \tfrac{1}{32}\pi^3,$$

welche Formel als ein Beitrag zu denen des achten Kapitels anzusehen ist.

Anmerkung. Da wir über Summation der unendlichen Reihen nur Andeutungen geben können, so halten wir das vorstehende für dazu ausreichend, und bemerken nur noch, daß man sich zuweilen eine endliche Reihe als die Differenz zweier summirbaren unendlichen Reihen denken kann, und daß man in diesem Falle die Summe einer endlichen Reihe dadurch findet, daß man unendliche Reihen summirt.

Funfzehntes Kapitel.

Von der Entwickelung beliebig gegebener Funktionen in Reihen, die nach Sinus und Kosinus der vielfachen Bogen fortlaufen.

(Fourier's Reihen.)

§. 143.

In der Abtheilung über Interpoliren und zwar im §. 128.) haben wir bereits die Aufgabe behandelt: eine Funktion von beliebig angenommener Form, aber unbestimmten Koefficienten so vollends zu bestimmen, daß ihre, zu n Werthen x_1, x_2, x_3, ··· x_n von x gehörigen n Werthe, mit den n zu denselben Werthen von x gehörigen Werthen u_1, u_2, u_3, ··· u_n irgend einer andern bekannten oder unbekannten Funktion u_x, bezüglich zusammenfallen. Die so gefundene Funktion wird im Allgemeinen n Glieder haben müssen, weil sie anfänglich eben so viel unbestimmte Koefficienten haben muß, welche (nach §. 128.) ihre Bestimmung finden.

Ist nun $x_1 = a$ und $x_n = b$, und sind alle übrigen Werthe x_2, x_3, x_4, ··· x_{n-1} nach und nach immer größer werdend, und dabei alle größer als a und kleiner als b; und denkt man sich zuletzt die Zahl der Werthe von x zwischen a und b, also die Zahl n, die beliebig groß seyn kann, immer größer, so bekommt man jedesmal eine, aber immer aus mehr Gliedern bestehende Funktion (Reihe), welche mit der andern Funktion u_x immer mehr Werthe gemein hat, während diese gemeinschaftlichen Werthe zu solchen Werthen von x gehören, welche zwischen a

und b liegen. Und denkt man sich endlich n unendlich groß, d. h. denkt man sich zwischen a und b unendlich viele Werthe von x, die alle unendlich wenig von einander verschieden sind, so wird man auf diesem Wege auch eine Funktion von unendlich vielen Gliedern bekommen können, d. h. eine unendliche Reihe, welche mit u_x alle, zu den von a bis b stetig neben einander liegenden Werthen von x gehörigen Werthe von u_x gemein hat, dagegen für alle Werthe von x, die kleiner als a oder größer als b sind, von der Funktion u_x abweichen wird.

Und weil dabei die Form der gesuchten Funktion oder Reihe noch ganz willkührlich ist (nach §. 128.), so wird man auf diesem Wege mehrere verschiedene unendliche Reihen finden können, welche alle die Werthe von u_x liefern, so lange x zwischen a und b sich befindet, welche aber, so oft $x<a$ oder $x>b$ ist, von einander und auch von dem Werthe von u_x verschiedene Werthe liefern werden.

Man darf sich jedoch dabei nicht verhehlen, daß sich der Ausführung dieser Idee Hindernisse in den Weg stellen können. Diese Hindernisse treten aber nicht ein, wenn man die gesuchte Funktion aus einer Reihe von Gliedern bestehen läßt, die nach Sinus oder nach Kosinus vielfacher Bogen fortlaufen, wie dies in den wichtigsten Anwendungen der Mathematik auf Physik wünschenswerth, ja unentbehrlich wird. — Die nächsten Paragraphen werden dies bestätigen.

§. 144.

Es sey u_x eine beliebig gegebene völlig bestimmte Funktion von x. Man sucht nun die Koefficienten A_1, A_2, A_3, ... der endlichen Reihe

1) $A_1 \cdot \sin x + A_2 \cdot \sin 2x + A_3 \cdot \sin 3x + \cdots + A_{n-1} \cdot \sin(n-1)x$

so zu bestimmen, daß diese Reihe für $x = \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \cdots \frac{(n-1)\pi}{n}$, mit den zugehörigen Werthen von u_x, die wir bezüg-

lich durch $u_1, u_2, u_3, \cdots u_{n-1}$ bezeichnen wollen, einerlei Werth erhalte.

Nach §. 128.) hat man zur Bestimmung dieser $n-1$ Koefficienten die $n-1$ Gleichungen

$$A_1 \cdot \sin\frac{\pi}{n} + A_2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n} + A_3 \cdot \sin\frac{3\pi}{n} + \cdots + A_{n-1} \cdot \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = u_1$$

$$A_1 \cdot \sin\frac{2\pi}{n} + A_2 \cdot \sin\frac{4\pi}{n} + A_3 \cdot \sin\frac{6\pi}{n} + \cdots + A_{n-1} \cdot \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = u_2$$

$$A_1 \cdot \sin\frac{3\pi}{n} + A_2 \cdot \sin\frac{6\pi}{n} + A_3 \cdot \sin\frac{9\pi}{n} + \cdots + A_{n-1} \cdot \sin\frac{3(n-1)\pi}{n} = u_3$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$A_1 \cdot \sin\frac{(n-1)\pi}{n} + A_2 \cdot \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} + A_3 \cdot \sin\frac{3(n-1)\pi}{n} + \cdots + A_{n-1} \cdot \sin\frac{(n-1)^2\pi}{n} = u_{n-1}.$$

Diese Gleichungen gehören zu den einfachen algebraischen Gleichungen und müssen nun nach den $n-1$ Unbekannten $A_1, A_2, A_3, \cdots A_{n-1}$ aufgelöst werden.

Um aber aus diesen Gleichungen einen der unbekannten Koefficienten z. B. A_m zu finden, muß man die $n-2$ übrigen eliminiren; und dazu kann man sich der Methode der Multiplikatoren (der französischen oder Bezout'schen Eliminations-Methode) bedienen. Im gegenwärtigen Falle erreicht man seinen Zweck sogleich, wenn man diese $n-1$ Gleichungen nach der Reihe mit

$$2\sin\frac{m\pi}{n},\quad 2\sin\frac{2m\pi}{n},\quad 2\sin\frac{3m\pi}{n},\quad \cdots\ 2\sin\frac{(n-1)m\pi}{n}$$

multiplicirt und zuletzt alle addirt. Betrachtet man nämlich

dann in der neuen Gleichung das mit A_v afficirte Glied, ſo hat ſolches den Koefficienten,

$$2\sin\frac{m\pi}{n}\cdot\sin\frac{v\pi}{n}+2\sin\frac{2m\pi}{n}\cdot\sin\frac{2v\pi}{n}+2\sin\frac{3m\pi}{n}\cdot\sin\frac{3v\pi}{n}+\cdots$$
$$+2\sin\frac{(n-1)m\pi}{n}\cdot\sin\frac{(n-1)v\pi}{n},$$

oder, wenn man die Produkte der Sinus in Differenzen von Koſinus verwandelt, den Koefficienten

$$\cos\frac{(m-v)\pi}{n}+\cos\frac{2(m-v)\pi}{n}+\cos\frac{3(m-v)\pi}{n}+\cdots$$
$$+\cos\frac{(n-1)(m-v)\pi}{n}$$
$$-\cos\frac{(m+v)\pi}{n}-\cos\frac{2(m+v)\pi}{n}-\cos\frac{3(m+v)\pi}{n}-\cdots$$
$$-\cos\frac{(n-1)(m+v)\pi}{n},$$

oder, wenn man jede dieſer Koſinus-Reihen (nach §. 135. N. 5.) ſummirt, den Koefficienten

$$\frac{\sin(n-\frac{1}{2})\frac{(m-v)\pi}{n}}{2\sin\frac{(m-v)\pi}{2n}}-\frac{\sin(n-\frac{1}{2})\frac{(m+v)\pi}{n}}{2\sin\frac{(m+v)\pi}{2n}}.$$

Weil aber, ſo oft θ Null oder irgend eine ganze Zahl iſt, allemal $\sin\theta\pi=0$ und $\cos\theta\pi=(-1)^\theta$, alſo auch

$$\sin(n-\tfrac{1}{2})\frac{\theta\pi}{n}=\sin\left(\theta\pi-\frac{\theta\pi}{2n}\right)=-(-1)^\theta\cdot\sin\frac{\theta\pi}{2n}$$

iſt, ſo verwandelt ſich, ſo lange m von v verſchieden, alſo $m-v$ nicht Null iſt, dieſer Koefficient von A_v in

$-\frac{1}{2}(-1)^{\mu-v}+\frac{1}{2}(-1)^{\mu-v}$ d. h. in $\frac{1}{2}(-1)^{\mu-v}\cdot((-1)^{2\mu}-1)$
d. h. in 0 (Null),

ſo daß alle Glieder aus der neuen Gleichung herausfallen, bis auf das einzige mit A_m afficirte Glied. Der Koefficient von A_m dagegen wird

$$2\left(\sin\frac{m\pi}{n}\right)^2+2\left(\sin\frac{2m\pi}{n}\right)^2+2\left(\sin\frac{3m\pi}{n}\right)^2+\cdots$$
$$+2\left(\sin\frac{(n-1)m\pi}{n}\right)^2$$

und verwandelt sich, nach der Formel $2\sin\beta^2=1-\cos 2\beta$, in

$$(n-1)-\left[\cos\frac{2m\pi}{n}+\cos\frac{4m\pi}{n}+\cos\frac{6m\pi}{n}+\cdots\right.$$
$$\left.+\cos\frac{2(n-1)m\pi}{n}\right].$$

Nun ist aber diese Summe der Kosinus (nach §. 135. Nr. 5.)

$$=\frac{\cos m\pi\cdot\sin\frac{(n-1)m\pi}{n}}{\sin\frac{m\pi}{n}}=-1\ ^*);$$

also ist der Koefficient von A_m allemal $=n$.

Die entstandene Gleichung reducirt sich daher auf

$$2)\quad A_m=\frac{2}{n}\cdot\left(u_1\cdot\sin\frac{m\pi}{n}+u_2\cdot\sin\frac{2m\pi}{n}+u_3\cdot\sin\frac{3m\pi}{n}+\cdots\right.$$
$$\left.+u_{n-1}\cdot\sin\frac{(n-1)m\pi}{n}\right)$$

oder

$$3)\quad A_m=\frac{2}{n}\,S\left[u_b\cdot\sin\frac{bm\pi}{n}\right]\ ^{**}),$$

*) Es ist nämlich

$$\frac{(n-1)m\pi}{n}=m\pi-\frac{m\pi}{n},$$

also

$$\sin\frac{(n-1)m\pi}{n}=-(-1)^m\cdot\sin\frac{m\pi}{n},$$

weil $\cos m\pi=(-1)^m$ ist, so lange nur m Null oder eine positive ganze Zahl ist.

**) Es ist sehr interessant, die Kunstgriffe wahrzunehmen, durch welche Lagrange die Faktoren gefunden hat, womit wir hier jede der auflösenden Gleichungen multiplicirt haben, damit, wenn nachher alle Gleichungen addirt werden, alle Glieder zur Linken herausfallen, bis auf das einige Glied, welches A_m enthält, so daß nun A_m gefunden wird. — Man

wenn man statt b alle positiven ganzen Zahlen setzt, die nicht $>n-1$ sind.

Setzt man aber hier herein statt m nach und nach 1, 2, 3, 4, 5, $\cdots$ $n-1$, so hat man alle die einzelnen Koefficienten A_1, A_2, A_3, A_4, $\cdots$ A_{n-1} gefunden. — Die gesuchte endliche Reihe 1.) geht aber dadurch über in

$$4) \qquad \frac{2}{n}\cdot S\left[\sin ax\cdot S\left[u_b\cdot \sin\frac{ba\pi}{n}\right]\right],$$

wo man dem a alle Werthe 1, 2, 3, $\cdots$ $n-1$ giebt, und für jeden bestimmten Werth von a, wiederum dem b alle Werthe 1, 2, 3, $\cdots$ $n-1$ geben muß, um den Koefficienten von *sin* ax zu bekommen. Diese endliche, aus $n-1$ Gliedern bestehende Reihe 4.) hat nun die Eigenschaft, daß sie für $x=\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \cdots \frac{(n-1)\pi}{n}$, mit den Werthen u_1, u_2, u_3, $\cdots$ u_{n-1} von u_x (für dieselben Werthe von x) bezüglich zusammenfällt; für jeden andern Werth von x aber im Allgemeinen einen andern Werth annehmen wird, als den, den die gegebene Funktion u_x annimmt.

§. 145.

Nimmt man nun hier n unendlich groß, so daß der Unterschied $\frac{\pi}{n}$ der Werthe von x unendlich-klein wird und durch dx bezeichnet werden kann, während $\frac{b\pi}{n}$ die verschiedenen Werthe von x vorstellt, von $x=0$ an bis zu $x=\pi$ hin, so verwandelt sich jetzt, weil $\frac{2}{n}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n}=\frac{2}{\pi}\cdot dx$ wird, der Koefficient A_m (in 3.) in

---

vergleiche deshalb noch des Verfassers „Lehrbuch der Mechanik" 3. Theil (Berlin bei Enslin 1838.) Kap. XV. pag. 513 seqq. und die Miscellanea Taurin. T. I.—T. III. (1759.—1766.)

$$A_m = \frac{2}{\pi} \cdot S(u_x \cdot \sin mx \cdot dx),$$

wo S die Summe aller unendlich vielen Glieder bedeutet, welche aus $u_x \cdot \sin mx \cdot dx$ dadurch hervorgehen, daß man ſtatt x alle Werthe ſetzt, welche um dx von einander verſchieden ſind, d. h. welche ſtetig neben einander und zwiſchen 0 und π liegen. Dieſe Summe wird aber (nach §. 20.) durch das beſtimmte Integral

$$\frac{2}{\pi} \cdot \int_{\pi+0} u_x \cdot \sin mx \cdot dx$$

ausgedrückt; daher hat man jetzt

5) $$A_m = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{\pi+0} u_x \cdot \sin mx \cdot dx,$$

ſo daß

6) $$\frac{2}{\pi} \cdot S[\sin ax \cdot \int_{\pi+0} u_x \cdot \sin ax \cdot dx]$$

eine unendliche Reihe vorſtellt, welche nach Sinus der vielfachen Bogen ax (d. h. x, 2x, 3x, 4x, etc. etc.) fortgeht, und welche die Eigenſchaft hat, daß ihre Werthe (wenn ſie nur deren wirklich hat, d. h. wenn ſie convergent iſt) mit den Werthen von u_x zuſammenfallen, ſo oft x zwiſchen 0 und π liegt; während für alle übrigen Werthe von x, die Werthe der Reihe 6.) von den Werthen von u_x im Allgemeinen verſchieden ſeyn werden, und namentlich ſchon für $x = 0$ und für $x = \pi$ verſchieden ſeyn können.

Schreibt man daher

I. $$\begin{cases} u_x = A_1 \cdot \sin x + A_2 \cdot \sin 2x + A_3 \cdot \sin 3x + A_4 \cdot \sin 4x \\ \qquad\qquad + \text{in inf.}, \\ \text{und nimmt man dabei } A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots \text{ aus der} \\ \text{Gleichung} \\ A_m = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{\pi+0} u_x \cdot \sin mx \cdot dx, \end{cases}$$

ſo gilt dieſe Gleichung einmal nur, wenn dieſe unendliche Reihe convergent iſt, und dann nur für alle Werthe von x, welche zwiſchen 0 und π liegen; und ſie wird im Allgemeinen ſchon

nicht mehr wahr ſeyn, wenn $x = 0$ oder $x = \pi$ ſelbſt gilt wird, noch weniger aber, wenn man $x < 0$ oder $x > \pi$ nehmen wollte.

§. 146.

Setzt man in I.) $2\sin x \cdot u_x$ ſtatt u_x, und zerlegt man in A_m das Produkt $2\sin mx \cdot \sin x$ in die Differenz $\cos(m-1)x - \cos(m+1)x$, und dadurch A_m ſelber in die Differenz

$$B_{m-1} - B_{m+1},$$

indem man

$$B_m = \frac{2}{\pi} \int_{x \div 0} u_x \cdot \cos mx \cdot dx$$

nimmt, — ſubſtituirt man ſtatt A_1, A_2, A_3, A_4, etc. etc. ihre Werthe $B_0 - B_2$, $B_1 - B_3$, $B_2 - B_4$, $B_3 - B_5$, etc. etc., ordnet man das Ganze nach B_0, B_1, B_2, B_3, etc. etc. und dividirt man zuletzt durch $2\sin x$ wieder weg, ſo erhält man

II.
$$\begin{cases} u_x = \frac{1}{2}B_0 + B_1 \cdot \cos x + B_2 \cdot \cos 2x + B_3 \cdot \cos 3x + \text{—}, \\ \text{wenn genommen wird, für } m = 0, 1, 2, 3, 4, \text{—}, \\ B_m = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{x \div 0} u_x \cdot \cos mx \cdot dx. \end{cases}$$

Dieſe Gleichung gilt natürlich auch nur dann, wenn die I.) gilt, und wenn dieſe Reihe in II.) zur Rechten ebenfalls convergent iſt.

Anmerkung. Das Verfahren des Eliminirens, welches wir im §. 143.) angewandt haben, zeigt uns übrigens ein Mittel, beide unendliche Reihen I.) und II.) direkt zu finden, ohne zuvor eine endliche Reihe von n Gliedern finden zu müſſen, um von ihr aus zu dem Falle überzugehen, in welchem n unendlich groß iſt. Stellen wir uns nämlich direkt folgende Aufgaben:

I. Man ſoll eine beliebig gegebene Funktion u_x in eine nach dem Sinus vielfacher Bogen fortlaufende Reihe entwickeln.

Auflöſung. Man wende die Methode der unbeſtimmten Koefficienten an, ſetze daher zuerſt

$$u_x = A_1 \cdot \sin x + A_2 \cdot \sin 2x + A_3 \cdot \sin 3x + \cdots,$$

und ſuche nun die unbeſtimmten Koefficienten, dieſer Gleichung gemäß zu beſtimmen.

Denkt man aber daran, daß wenn a und b zwei beliebige ganze Zahlen vorſtellen, dann allemal

$$\int_{\pi \div 0} \sin ax \cdot \sin bx \cdot dx = 0 \quad \text{iſt, ſo oft} \quad a \gtrless b,$$

dagegen

$$\int_{\pi \div 0} \sin ax \cdot \sin bx \cdot dx = \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{iſt, wenn} \quad a = b \text{ *)},$$

ſo wird man die angenommene Gleichung nach und nach mit $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$, $\sin 4x$, $\sin 5x$, etc. etc. multipliciren, jede dieſer neuen Gleichungen aber links und rechts nach x zwiſchen den Grenzen 0 und π integriren; und man erhält

$$\int_{\pi \div 0} u_x \cdot \sin x \cdot dx = \tfrac{1}{2}\pi \cdot A_1;$$
$$\int_{\pi \div x} u_x \cdot \sin 2x \cdot dx = \tfrac{1}{2}\pi \cdot A_2;$$
$$\int_{\pi \div 0} u_x \cdot \sin 3x \cdot dx = \tfrac{1}{2}\pi \cdot A_3; \quad \text{u. ſ. w. f.,}$$

ſo daß hieraus die unbeſtimmten Koefficienten A_1, A_2, A_3, etc. etc. gefunden werden, in beſtimmte Integrale ausgedrückt. Man erhält zuletzt

$$1) \qquad u_x = \frac{2}{\pi} \cdot S\left[\sin ax \cdot \int_{\pi \div 0} u_x \cdot \sin ax \cdot dx\right],$$

wenn ſtatt a nach und nach Null und alle ganzen Zahlen geſetzt werden, und wenn S bedeutet, daß die Summe aller unendlich vielen Glieder, die auf dieſe Weiſe aus dem, in den ecki-

---

*) Es iſt nämlich

$$\sin ax \cdot \sin bx = \tfrac{1}{2}\cos(a-b)x - \tfrac{1}{2}\cos(a+b)x$$

und für $a = b$

$$\sin ax \cdot \sin ax = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2ax;$$

alſo

$$1') \quad \int \sin ax \cdot \sin bx \cdot dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}$$

aber

$$2') \quad \int \sin^2 ax \cdot \sin ax \cdot dx = \tfrac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \cdot \sin 2ax.$$

gen Klammern befindlichen allgemeinen Gliede hervorgehen, genommen werden ſoll.

II. Soll u_x in eine Reihe verwandelt werden, welche nach Koſinus der vielfachen Bogen fortläuft, ſo ſetze man

$$u_x = B_0 + B_1 \cdot \cos x + B_2 \cdot \cos 2x + B_3 \cdot \cos 3x + \text{etc.},$$

multiplicire dieſe Gleichung mit $\cos 0$, $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\cos 4x$, etc. etc., nehme links und rechts die Integrale zwiſchen den Grenzen 0 und π, und man erhält

$$\int_{\pi+0} u_x \cdot dx = B_0 \cdot \pi, \qquad \text{alſo} \qquad B_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\pi+0} u_x \cdot dx$$

außerdem aber noch, wenn a jede beliebige poſitive ganze Zahl vorſtellt,

$$B_a = \frac{2}{\pi} \int_{\pi+0} u_x \cdot \cos ax \cdot dx.$$

Man hat daher zuletzt

$$u_x = \frac{1}{\pi} \int_{\pi+0} u_x \cdot dx + \frac{2}{\pi} \cdot S\left[\cos ax \cdot \int_{\pi+0} u_x \cdot \cos ax \cdot dx\right],$$

wo jedoch der Werth Null von a ausgeſchloſſen bleibt; oder auch

$$2) \qquad u_x = \frac{2}{\pi} \cdot S\left[\cos ax \cdot \int_{\pi+0} u_x \cdot \cos ax \cdot dx\right],$$

wenn man auch noch $a = 0$, aber von dieſem Gliede nur die Hälfte nimmt.

Dieſe Gleichungen 1.) und 2.) ſind genau die Gleichungen I.) des §. 145.) und II.) des §. 146.); nur daß man hier noch nicht weiß, wie weit ſie gelten.

Wir haben nämlich jetzt die Methode der unbeſtimmten Koefficienten angewandt, alſo *vorausgeſetzt*, daß eine ſolche Reihe, wie wir ſie ſuchen, exiſtirt. Die gefundenen Reſultate gelten alſo *gar nicht*, wenn dieſe Vorausſetzung gar nie ſtatt haben ſollte, — oder ſie gelten doch nur in dem Umfange, in welchem dieſe Vorausſetzung ſtatt hat, ohne daß das Geſetz der Stetigkeit unterbrochen wird. Die Unterſuchung, *ob* überhaupt oder *in welchem Umfange* die, mittelſt der Methode der un

bestimmten Koefficienten gefundenen Resultate gelten, muß daher der Anwendung der gedachten Methode selbst allemal auf dem Fuße folgen *).

Man müßte daher nun 1) die Convergenz der gefundenen Reihen untersuchen (da solche nicht nach Potenzen von x fortlaufen); — und in allen den Fällen, wo die Convergenz ausgemittelt ist, 2) die Reihen selbst wieder summiren, um zu sehen, ob, oder in welchen Fällen sie die Funktion u_x wieder geben.

§. 147.

Geht man aber von den (§. 145. und §. 146.) gefundenen Gleichungen aus, nämlich von

$$\text{I.} \quad \begin{cases} u_x = A_1 \cdot \sin x + A_2 \cdot \sin 2x + A_3 \cdot \sin 3x + \text{ in inf.}, \\ \text{wo} \qquad A_m = \frac{2}{\pi} \int_{x=0} u_x \cdot \sin mx \cdot dx, \end{cases}$$

und

$$\text{II.} \quad \begin{cases} u_x = \frac{1}{2}B_0 + B_1 \cdot \cos x + B_2 \cdot \cos 2x + B_3 \cdot \cos 3x + \text{in inf.}, \\ \text{wo} \qquad B_m = \frac{2}{\pi} \int_{x=0} u_x \cdot \cos mx \cdot dx, \end{cases}$$

so wissen wir bereits aus der dortigen Entwickelung, daß sie nur für alle Werthe von x gelten, welche zwischen 0 und π liegen. Dagegen geht aus der Entwickelung des §. 144.) hervor, daß die Werthe u_1, u_2, u_3, ... u_{n-1} ganz willkührlich und gesetzlos gewählt werden können, daß daher dieselben Formeln I.) und II.) noch gelten, wenn u_x eine Reihe völlig ge-

*) Früher glaubte man, daß die Resultate, welche die Methode der unbestimmten Koefficienten liefert, keiner weitern Bestätigung bedürften, indem man wähnte, daß wenn die Annahme der Form nicht gerechtfertigt sey, solches sich während der Rechnung durch Widersprüche sogleich herausstelle. — Wir haben gegen diese gefährliche Ansicht bereits in den „Aufsätzen aus dem Gebiete der höhern Mathematik", Berlin 1823. S. 39. ff. gewarnt, und gezeigt, daß kein Widerspruch während der Entwickelung sich zeigen kann, sobald die angenommene Form der Reihe auch nur in einem einzigen besonderen Falle zulässig seyn sollte.

ſetzloſer Werthe vorſtellt, d. h. eine **discontinuirliche Funktion** von x iſt. Man kann aber bald noch bemerken:

1) Die Gleichung I.) gilt auch noch für alle negativen Werthe von x, welche zwiſchen 0 und $-\pi$ liegen, ſo oft ſtatt u_x eine ſolche continuirliche oder discontinuirliche Funktion φ_x geſetzt wird, welche die Eigenſchaft hat, daß $\varphi_{-x} = -\varphi_x$ iſt.

2) Die Gleichung II.) gilt dagegen auch noch für alle negative Werthe von x, welche zwiſchen 0 und $-\pi$ liegen, aber wenn ſtatt u_x eine andere Funktion ψ_x geſetzt wird, welche dieſe andere Eigenſchaft hat, daß $\psi_{-x} = \psi_x$ iſt.

3) Setzt man daher, während u_x jede beliebige Funktion vorſtellt

$$\varphi_x = \tfrac{1}{2}u_x - \tfrac{1}{2}u_{-x} \quad \text{und} \quad \psi_x = \tfrac{1}{2}u_x + \tfrac{1}{2}u_{-x},$$

ſo iſt

$$u_x = \varphi_x + \psi_x,$$

dabei aber φ_x eine ſolche Funktion, wie ſie in 1.) vorausgeſetzt worden, während ψ_x eine ſolche iſt, wie wir ſie uns in 2.) gedacht haben. Findet man daher aus I.) φ_x, und aus II.) ψ_x, ſo folgt, weil $\varphi_x + \psi_x = u_x$ iſt,

$$\text{III.} \quad u_x = \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}B_0 + B_1 \cdot cos\, x + B_2 \cdot cos\, 2x + B_3 \cdot cos\, 3x + \cdots \\ \quad + A_1 \cdot sin\, x + A_2 \cdot sin\, 2x + A_3 \cdot sin\, 3x + \cdots \end{array}\right\},$$

wenn A_m und B_m aus den Gleichungen

$$B_m = \frac{1}{\pi}\int_{x+0}(u_x + u_{-x}) \cdot cos\, mx \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{x+(-\pi)} u_x \cdot cos\, mx \cdot dx \text{ *)},$$

$$A_m = \frac{1}{\pi}\int_{x+0}(u_x - u_{-x}) \cdot sin\, mx \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{x+(-\pi)} u_x \cdot sin\, mx \cdot dx$$

*) Zerlegt man das letztere Integral nach §. 24. I.) in zwei Integrale, von denen das eine zwiſchen π und 0, das andere zwiſchen 0 und $-\pi$ genommen iſt, und führt man in letzterem $z = -x$ (alſo $x = -z$) ein, ſo verwandelt ſich ſolches nach §. 22. II.) in $\int_{x+0} u_{-z} \cdot cos\, mz \cdot dz$ d. h. in

bestimmt werden; und diese Gleichung III.) gilt für jeden Werth von x, welcher zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, wenn nur die Reihen selbst convergent sind. Für $x=0$ kann aber vielleicht die Gleichung III.) nicht gelten, weil die I.) und II.) für $x=0$ nicht nothwendig wahr bleiben.

4) Weil man aber in jedem bestimmten Integral nach x, statt x und dx bezüglich z und dz setzen kann, und weil dadurch

$$\cos mx \cdot \int u_z \cdot \cos mx \cdot dx = \int u_z \cdot \cos mx \cdot \cos mz \cdot dz,$$

$$\sin mx \cdot \int u_z \cdot \sin mx \cdot dx = \int u_z \cdot \sin mx \cdot \sin mz \cdot dz,$$

also, wenn man beide Gleichungen addirt und durch π dividirt,

$$B_m \cdot \cos mx + A_m \cdot \sin mx = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha \div (-\alpha)} u_z \cdot \cos m(z-x) \cdot dz$$

geschrieben werden kann, so geht die III.), wenn man je zwei unter einander stehende Glieder nach der vorstehenden Formel vereinigt, noch über in

$$\text{IV.} \quad u_x = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha \div (-\alpha)} u_z \cdot \left[\tfrac{1}{2} + \cos(z-x) + \cos 2(z-x) + \cos 3(z-x) + \ldots\right] \cdot dz.$$

Umgekehrt: Kann erwiesen werden, daß wenn man von dieser letztern Reihe n erste Glieder nimmt, der Ausdruck zur Rechten der Funktion u_x immer näher kommt, je größer n gedacht wird, und dem u_x unendlich nahe rückt, wenn n unendlich groß wird, so ist nicht bloß erwiesen, daß die Reihen in III.) zur Rechten convergent sind, sondern es ist auch zu gleicher Zeit das ganze Verfahren gerechtfertigt, welches zu diesen Reihen geführt hat. — Dies wollen wir nun nach Dirichlet hier thun *).

§. 148.

A. Wir wollen in III.) zur Rechten die Glieder der Reihen bis zu $B_n \cdot \cos nx$ und $A_n \cdot \cos nx$ nehmen, also $2n+1$

$\int_{\alpha \div 0} u_{-x} \cdot \cos mx \cdot dx$, und es erhellt nun die oben statt gehabte Umformung des Integrals.

Aehnliches für die nächste Zeile im Texte.

*) S. Dove's Repertorium der Physik. I. Bd.

Glieder, und dieſe ſummiren. Zu dem Ende muß man von der Reihe in IV.) zur Rechten die Glieder unter dem Integral-Zeichen bis zu dem Gliede $\cos n(z-x)$ nehmen. Die Summe dieſer Koſinuſſe iſt aber (nach §. 135. N. 5.)

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(2n+1)(z-x)}{2\sin \frac{1}{2}(z-x)},$$

alſo iſt die Summe der erſtern $2n+1$ Glieder in der Reihe III.) zur Rechten ausgedrückt durch

$$(\Gamma) \ldots \quad \frac{1}{\pi}\int_{\pi+(-\pi)} u_x \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(2n+1)(z-x)}{2\sin \frac{1}{2}(z-x)} \cdot dz.$$

Wir müſſen nun zuſehen, ob für $n = \infty$ dieſer Ausdruck Γ in u_x übergeht, ſo lange x zwiſchen $+\pi$ und $-\pi$ liegt.

B. Wir werden aber zuerſt zeigen, daß wenn man das Integral von $\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} \cdot d\beta$, nachdem der Kürze wegen $2n+1 = \varkappa$ geſetzt worden iſt, nach und nach zwiſchen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{\varkappa}$, $\frac{\pi}{\varkappa}$ und $\frac{2\pi}{\varkappa}$, $\frac{2\pi}{\varkappa}$ und $\frac{3\pi}{\varkappa}$, ..., $\frac{(\nu-1)\pi}{\varkappa}$ und $\frac{\nu\pi}{\varkappa}$, ..., $\frac{n\pi}{\varkappa}$ und $\frac{\pi}{2}$ nimmt, dieſe Werthe deſſelben abwechſelnd poſitiv und negativ ſind, und abſolut immer kleiner werden, ſo daß, wenn man die abſoluten Werthe dieſes Integrals innerhalb der gedachten Grenzen bezüglich durch

$$Q_1, \; Q_2, \; Q_3, \; \ldots\ldots \; Q_\nu, \; \ldots\ldots \; Q_{n+1}$$

bezeichnet, dieſe eine abnehmende Reihe bilden.

Dies zeigt ſich ſo:

Es liegt $\varkappa\beta$ allemal zwiſchen $(\nu-1)\pi$ und $\nu\pi$, wenn β zwiſchen $\frac{(\nu-1)\pi}{\varkappa}$ und $\frac{\nu\pi}{\varkappa}$ liegt. Daher iſt $\sin\varkappa\beta$ für alle dieſe Werthe von β fortwährend poſitiv, wenn ν ungerade, und fortwährend negativ, wenn ν gerade iſt, während $\sin\beta$ in demſelben Zwiſchenraume immerfort poſitiv bleibt. Alſo iſt für alle Werthe von β, welche zwiſchen $\frac{(\nu-1)\pi}{\varkappa}$ und $\frac{\nu\pi}{\varkappa}$ liegen, $\frac{\sin\varkappa\beta}{\sin\beta} \cdot d\beta$ fortwährend poſitiv oder fortwährend negativ, je nachdem ν ungerade oder gerade; alſo iſt auch (nach §. 20.)

$$\int_{\frac{\nu\pi}{\varkappa}+\frac{(\nu-1)\pi}{\varkappa}} \frac{\sin\varkappa\beta}{\sin\beta}\cdot d\beta$$

positiv, wenn ν ungerade, und negativ, wenn ν gerade, d. h. es ist

$$\varrho_\nu = (-1)^{\nu-1}\int_{\frac{\nu\pi}{\varkappa}+\frac{(\nu-1)\pi}{\varkappa}} \frac{\sin\varkappa\beta}{\sin\beta}\cdot d\beta.$$

Dieser Werth von ϱ_ν läßt sich auch durch ein Integral ausdrücken, welches zwischen andern Grenzen, nämlich zwischen den von ν unabhängigen Grenzen 0 und $\frac{\pi}{\varkappa}$ genommen ist. Man darf zu dem Ende nur einen neuen Veränderlichen statt β einführen, mittelst der Gleichung

$$\beta = \frac{(\nu-1)\pi}{\varkappa}+\gamma,$$

so erhält man (nach §. 22. Anmerkg.)

$$\varrho_\nu = (-1)^{\nu-1}\int_{\frac{\pi}{\varkappa}+0} \frac{\sin[(\nu-1)\pi+\varkappa\gamma]}{\sin\left(\frac{(\nu-1)\pi}{\varkappa}+\gamma\right)}\cdot d\gamma$$

oder, weil $\sin(\nu-1)\pi = 0$, $\cos(\nu-1)\pi = (-1)^{\nu-1}$ und daher $\sin[(\nu-1)\pi+\varkappa\gamma] = (-1)^{\nu-1}\cdot\sin\varkappa\gamma$ ist, und wenn man β statt γ, so wie auch $d\beta$ statt $d\gamma$ schreibt

$$\varrho_\nu = \int_{\frac{\pi}{\varkappa}+0} \frac{\sin\varkappa\beta}{\sin\left(\frac{(\nu-1)\pi}{\varkappa}+\beta\right)}\cdot d\beta.$$

In diesem Integrale wird aber der Zähler $\sin\varkappa\beta$, welchen Werth von ν man nimmt, immer nach und nach alle Werthe von $\sin 0$ bis $\sin\varkappa$ durchlaufen, während die zugehörigen Nenner $\sin\left(\frac{(\nu-1)\pi}{\varkappa}+\beta\right)$ für jeden größern Werth von ν ebenfalls immer bezüglich größer seyn werden, so daß die durch das Integral summirten Differential-Theilchen immer kleiner sind, wenn ν größer gedacht wird. Also wird ϱ_ν desto kleiner werden, je größer ν gedacht wird.

C. Die Summe aller dieser einzelnen Integrale ist (nach §. 24. I.) dem zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ genommenen Integral von $\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\cdot d\beta$ gleich. Weil aber $\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}$ nichts anders ist (nach §. 135. N. 5.) als die Summe

$$1+2\cos 2\beta+2\cos 4\beta+2\cos 6\beta+\cdots+2\cos 2n\beta$$

und diese letzteren Glieder, nach β zwischen den Grenzen 0 und

$\frac{1}{2}\pi$ integrirt, alle Null geben, bis auf das erstere, welches $\frac{1}{2}\pi$ giebt, so hat man

$$\int_{\frac{1}{2}\pi \div 0} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} \cdot d\beta = \tfrac{1}{2}\pi;$$

folglich ist

1) $\varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_4 + \cdots \pm \varrho_{n+1} = \frac{1}{2}\pi,$

aber eben deshalb, und weil die Glieder dieser Reihe beständig abnehmen, hat man, wenn $2m < n$ übrigens eine gerade Zahl ist,

2) $\varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_4 + \cdots - \varrho_{2m} + \varrho_{2m+1} > \frac{1}{2}\pi$

und

3) $\varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_4 + \cdots - \varrho_{2m} < \frac{1}{2}\pi.$

Subtrahirt man nämlich von der Reihe zur Rechten in 2.) die positiven Glieder $(\varrho_{2m+2} - \varrho_{2m+3})$, $(\varrho_{2m+4} - \varrho_{2m+5})$, etc. etc., so erhält man erst (nach 1.) den Werth $\frac{1}{2}\pi$. — Addirt man dagegen zu der Reihe zur Rechten in 2.) noch die positiven Glieder $(\varrho_{2m+1} - \varrho_{2m+2})$, $(\varrho_{2m+3} - \varrho_{2m+4})$, etc. etc., so erhält man ebenfalls (nach 1.) erst den Werth $\frac{1}{2}\pi$.

D. Denken wir uns nun unter f_β eine solche Funktion von β, welche von $\beta = 0$ an bis zu $\beta = b$ hin, während b eine willkührliche positive Constante, aber nicht $> \frac{1}{2}\pi$ ist, immer einen positiven Werth hat, dabei aber nie wächst, deren Werthe also entweder immer kleiner werden oder doch dieselben bleiben, und stellen wir uns vor, daß das Integral

$$\int_{b \div 0} \frac{\sin\varkappa\beta}{\sin\beta} \cdot f_\beta \cdot d\beta = S$$

(nach §. 24. I.) ebenfalls in die Summe einzelner Theile zerlegt werde, die bezüglich von 0 bis $\frac{\pi}{\varkappa}$, von $\frac{\pi}{\varkappa}$ bis $\frac{2\pi}{\varkappa}$, ... zuletzt von $\frac{r\pi}{\varkappa}$ bis b genommen sind, wenn r so groß und positiv ganz gedacht ist, daß $\frac{(r+1)\pi}{\varkappa} = > b$ wird, — so sind auch diese Integrale, welche wir durch

R_1, $-R_2$, R_3, $-R_4$, R_5, $-R_6$, etc. etc. bezeichnen wollen, abwechſelnd poſitiv und negativ, ſo daß R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, etc. etc. lauter abſolute Zahlen (d. h. nicht negative) vorſtellen. Denkt man ſich nämlich

$$R_\nu = (-1)^{\nu-1} \int_{\frac{\nu\alpha}{\pi}+\frac{(\nu-1)\alpha}{\pi}} \frac{\sin \alpha\beta}{\sin \beta} \cdot f_\beta \cdot d\beta,$$

ſo iſt R_ν allemal poſitiv.

Man hat alſo

1) $S = R_1 - R_2 + R_3 - R_4 + \cdots \pm R_{r+1}$

und da die abſoluten Zahlen R_1, R_2, R_3, R_4, ... wiederum eine abnehmende Reihe bilden, ſo iſt wiederum

2) $S > R_1 - R_2 + R_3 - R_4 + \cdots - R_{2m}$

3) $S < R_1 - R_2 + R_3 - R_4 + \cdots - R_{2m} + R_{2m+1}$,

wenn nur $2m$ gerade und $< r$ iſt.

Es iſt nämlich (nach §. 24. V.) der Werth R_ν allemal $= f_{\beta'} \cdot \varrho_\nu$, wenn $f_{\beta'}$ einen unbekannten Zwiſchen-Werth von f_β vorſtellt, der zwiſchen dem größten $f_{(\nu-1)\alpha:\alpha}$ und kleinſten $f_{\nu\alpha:\alpha}$ von allen Werthen von f_β liegt, die ſich von $\beta = \frac{(\nu-1)\alpha}{\alpha}$ an, bis zu $\beta = \frac{\nu\alpha}{\alpha}$ hin, für alle Werthe von β ergeben. Weil aber der Vorausſetzung zu Folge, f_β nie größer wird (während β wächſt) und dabei immer poſitiv bleibt, ſo folgt daraus: 1) daß R_ν immer poſitiv iſt, aber auch 2) daß $R_{\nu+1} < R_\nu$ iſt; denn es iſt aus demſelben Grunde, aus welchem man $R_\nu = f_{\beta'} \cdot \varrho_\nu$ hat, auch $R_{\nu+1} = f_{\beta''} \cdot \varrho_{\nu+1}$, wo $f_{\beta''} \leqq f_{\beta'}$ iſt, während man ohnedies $\varrho_{\nu+1} < \varrho_\nu$ hat.

E. Setzt man nun in der Ungleichung D. 2.) ſtatt der addirten Glieder R_1, R_3, R_5, etc. kleinere oder gleiche Werthe, nämlich bezüglich $f_{\alpha:\alpha} \cdot \varrho_1$, $f_{3\alpha:\alpha} \cdot \varrho_3$, $f_{5\alpha:\alpha} \cdot \varrho_5$, etc. etc., und ſtatt der ſubtrahirten Glieder R_2, R_4, R_6, ... bezüglich größere (oder gleiche) Werthe, nämlich $f_{\alpha:\alpha} \cdot \varrho_2$, $f_{3\alpha:\alpha} \cdot \varrho_4$, $f_{5\alpha:\alpha} \cdot \varrho_6$, ſo bleibt offenbar dieſelbe Ungleichuug noch aufrecht, d. h. man hat noch

1) $S > f_{\alpha:\alpha} \cdot (\varrho_1 - \varrho_2) + f_{3\alpha:\alpha} \cdot (\varrho_3 - \varrho_4) + \cdots + f_{(2m-1)\alpha:\alpha} \cdot (\varrho_{2m-1} - \varrho_{2m})$.

Wendet man nun das umgekehrte Verfahren auf D. 3.) an, d. h. setzt man statt der addirten Glieder bezüglich größere, statt der subtrahirten Glieder aber bezüglich kleinere, so ergiebt sich noch

2) $S < f_0 \cdot \varrho_1 - f_{2\varkappa:\varkappa} \cdot (\varrho_2 - \varrho_3) - f_{4\varkappa:\varkappa} \cdot (\varrho_4 - \varrho_5) - \cdots - f_{2\varkappa m:\varkappa} \cdot (\varrho_{2m} - \varrho_{2m+1})$.

Weil aber in 1.) und in 2.) alle Glieder positiv sind, so bleiben diese beiden Ungleichheiten noch aufrecht, wenn man statt aller dieser Werthe von f, mit Ausnahme von f_0, einen und denselben Werth $f_{2m\varkappa:\varkappa}$ setzt (der entweder eben so groß oder kleiner ist, als jeder dieser Werthe). Man hat also

3) $S > (\varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_4 + \cdots - \varrho_{2m}) \cdot f_{2m\varkappa:\varkappa}$,

4) $S < f_0 \cdot \varrho_1 - (\varrho_2 - \varrho_3 + \varrho_4 - \cdots + \varrho_{2m} - \varrho_{2m+1}) \cdot f_{2m\varkappa:\varkappa}$.

Weil jedoch nach C. 2.) der erste Faktor in 3.) zur Rechten $> \frac{1}{2}\pi - \varrho_{2m+1}$, dagegen der erste Faktor des subtrahirten Gliedes in 4.) zur Rechten $< \varrho_1 - \frac{1}{2}\pi$ ist, so folgt noch aus 3.) und 4.)

5) $S > \frac{1}{2}\pi \cdot f_{2m\varkappa:\varkappa} - \varrho_{2m+1} \cdot f_{2m\varkappa:\varkappa}$

6) $S < \frac{1}{2}\pi \cdot f_{2m\varkappa:\varkappa} + \varrho_1 \cdot (f_0 - f_{2m\varkappa:\varkappa})$.

F. Denkt man sich nun n unendlich groß, so ist $\varkappa = 2n+1$ ebenfalls unendlich groß, und auch r unendlich groß, weil r die größeste ganze Zahl ist, welche in $\frac{b}{\pi} \cdot \varkappa$ d. h. in $\frac{b}{\pi}(2n+1)$ steckt; also kann auch nun m unendlich groß werden, weil keine andere Bedingung für m obwaltet, als daß $2m < r$ seyn soll. Man denke sich aber m immer so, daß $\frac{2m}{\varkappa}$ d. h. $\frac{2m}{2n+1}$ für $n = \infty$ noch unendlich klein wird (man denke sich z. B. m von der Form $\sqrt{n}$, oder n von der Form m^2), so werden die für S (in D. 5. und 6.) gefundenen Grenzen nur unendlich wenig von einander verschieden seyn; und man hat dann $S = \frac{1}{2}\pi \cdot f_0$; d. h.

$$(\odot) \cdots \int_{b\doteq 0} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} \cdot f_\beta \cdot d\beta = \tfrac{1}{2}\pi \cdot f_0 \quad (\text{für } n = \infty),$$

während b positiv, $\leqq \frac{1}{2}\pi$ und im Uebrigen eine beliebige constante Zahl ist.

Denn es ist auf der einen Seite (nach §. 24. N. 5.)

$$\varrho_{2m+1} = \frac{1}{\sin\beta'} \int_{\frac{(2m+1)\pi}{\pi}}^{\frac{(2m+2)\pi}{\pi}} \sin n\beta \cdot d\beta = \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{\sin\beta'},$$

wenn $\frac{1}{\sin\beta'}$ ein unbekannter Werth von $\frac{1}{\sin\beta}$ ist, aber zwischen dem größten und kleinsten der Werthe liegt, die $\frac{1}{\sin\beta}$ annimmt, wenn statt β alle Werthe von $\frac{(2m+1)\pi}{n}$ an bis zu $\frac{(2m+2)\pi}{n}$ hin gesetzt werden. Also liegt ϱ_{2m+1} zwischen $\frac{2}{n} \cdot \frac{1}{\sin\frac{(2m+1)\pi}{n}}$ und $\frac{2}{n} \cdot \frac{1}{\sin\frac{(2m+2)\pi}{n}}$, d. h. zwischen $\frac{2}{(2m+1)\pi} \cdot \frac{\left[\frac{(2m+1)\pi}{n}\right]}{\sin\frac{(2m+1)\pi}{n}}$ und $\frac{2}{(2m+2)\pi} \cdot \frac{\left[\frac{(2m+2)\pi}{n}\right]}{\sin\frac{(2m+2)\pi}{n}}$; also wird

$$\varrho_{2m+1} = 0 \quad \text{für} \quad m = \infty \quad \text{d. h. für} \quad n = \infty;$$

folglich wird auch $\varrho_{2m+1} \cdot f_{2m\pi:\pi} = 0$.

Auf der andern Seite wird $\frac{2m\pi}{\pi} = 0$ für $n = \infty$, also $f_{2m\pi:\pi} = f_0$, während ϱ_1 für $n = \infty$ einen endlichen bestimmten Werth annimmt; denn es ist nach C. 2.) für $m = 1$, $\varrho_1 - \varrho_2 < \frac{1}{2}\pi$, also $\varrho_1 < \frac{1}{2}\pi + \varrho_2$, während nach den nächst vorhergehenden Zeilen (wenn 2 statt $2m+1$ gesetzt wird) ϱ_2 allemal zwischen

$$\frac{2}{2\pi} \cdot \frac{\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\sin\frac{2\pi}{n}} \quad \text{und} \quad \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{\left(\frac{3\pi}{n}\right)}{\sin\frac{3\pi}{n}}$$

liegt; — also wird auch $\varrho_1 \cdot (f_{2m\pi:\pi} - f_0) = 0$.

G. Daraus folgt auch noch, daß wenn $a < b$ ist, übrigens positiv und beliebig constant, und wenn f_β zwischen $\beta = a$ und $\beta = b$ nie zunimmt, dann allemal für $n = \infty$ seyn wird

$$(\mathfrak{C})\cdots \int_{b\ldots a} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\cdot f_\beta\cdot d\beta = 0 \quad (\text{für } n=\infty),$$

wenn nur $b \leqq \frac{1}{2}\pi$ iſt.

Denn da man ſich zwiſchen $\beta=0$ und $\beta=a$ die Funktion f_β noch ſo denken kann, daß ſie von $\beta=0$ bis $\beta=b$ nie zunimmt, ſo hat man (nach F. ⊙.) daſſelbe Integral $=\frac{1}{2}\pi\cdot f_0$, es mag ſolches zwiſchen $\beta=0$ und $\beta=a$, oder zwiſchen $\beta=0$ und $\beta=b$ genommen werden, während das letztere aus der Summe des erſteren und des zwiſchen $x=a$ und $x=b$ genommenen Integrals beſteht (nach §. 24. I.).

II. Stehen aber dieſe Reſultate ⊙.) und (ℭ.) feſt, wenn f_β poſitiv iſt und (während β innerhalb ſeiner Grenzen wächſt) nie zunimmt, ſo gelten dieſelben auch noch, wenn die Werthe von f_β auch negativ werden, — und auch dann noch, wenn die Werthe von f_β immerfort, mit β zugleich größer werden, oder dieſelben bleiben, und dabei poſitiv und auch negativ ſind.

Denn, angenommen, daß f_β zwar nicht mit β wächſt, aber doch negativ wird, ſo nehme man c conſtant und größer als der abſolut größeſte negative Werth von f_β, ſo iſt $c-f_\beta$ immer poſitiv, und es gelten daher die Formeln ⊙.) und (ℭ.), wenn $c-f_\beta$ ſtatt f_β geſetzt wird. Dann aber zerlegt ſich das Integral (in ⊙. oder ℭ. zur Linken) in die Differenz

$$\int c\cdot\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\cdot d\beta - \int f_\beta\cdot\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\cdot d\beta,$$

von welchem das erſtere $=\frac{1}{2}\pi\cdot c$ wird für $n=\infty$ (nach ⊙.), oder $=0$ wird für $n=\infty$ (nach (ℭ.), je nachdem die Grenzen des Integrals 0 und b, oder a und b ſind; während das ganze Integral in denſelben Fällen (nach ⊙. oder (ℭ.), $=\frac{1}{2}\pi(c-f_0)$, oder $=0$ wird. Daraus ergeben ſich aber wieder die Formeln ⊙.) und (ℭ.) für das jetzige f_β.

Nimmt ferner f_β nie zu, ſo nimmt $-f_\beta$ nie ab, alſo gelten dann die Formeln ⊙.) und (ℭ.) wenn man $-f_\beta$ ſtatt f_β ſetzt. Dies giebt (nach ⊙. und (ℭ.)

$$-\int f_\beta\cdot\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\cdot d\beta = \frac{1}{2}\pi\cdot(-f_0), \text{ oder } = 0,$$

je nachdem die Grenzen des Integrals 0 und b, oder a und b ſind. Dies iſt aber wiederum die Gleichung ⊙.) oder (ℭ.) für die jetzige Funktion f_β.

J. Es gelten endlich dieſe Formeln ⊙.) und (ℭ.) auch, wenn f_β irgend eine beliebige ſtetige Funktion iſt, welche zwiſchen den

den Grenz-Werthen 0 und b, oder a und b von β, beliebig oft vom Wachsen zum Abnehmen, oder vom Abnehmen zum Wachsen übergeht.

Dies folgt, wenn man (nach §. 24. I.) das Integral in so viel Theile zerlegt, als die Funktion vom Abnehmen zum Wachsen, oder vom Wachsen zum Abnehmen übergeht, so daß die Integrale nach und nach zwischen den Grenzen 0 oder a und ε_1, dann zwischen ε_1 und ε_2, hernach zwischen ε_2 und ε_3, u. s. w., zuletzt zwischen ε_ν und b genommen sind, wenn $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots \varepsilon_\nu$ die Werthe von β vorstellen, für welche f_β ein solches Maximum oder Minimum ist. Dann sind die Integrale alle (nach ℂ. und H.) einzeln $=0$, bis auf das zwischen $\beta=0$ und $\beta=\varepsilon_1$ genommene, welches (nach ⊙. und H.) $=\frac{1}{2}\pi\cdot f_0$ ist.

K. Unterbricht aber f_β für $\beta=\varepsilon$ (wo ε zwischen 0 und b liegt) seine Stetigkeit und zwar so daß f_β als Endwerth der einen Funktion einen besonderen Werth hat, den wir durch $f_{\varepsilon-0}$ bezeichnen wollen, und als Anfangs-Werth der andern Funktion (die von $\beta=\varepsilon$ an unter f_β verstanden werden soll) einen anderen Werth hat, den wir durch $f_{\varepsilon+0}$ bezeichnen, und der von $f_{\varepsilon-0}$ verschieden ist*), so gelten die Sätze ⊙.) und ℂ.) deshalb noch immer, weil nun das Integral wiederum in zwei zerlegt werden kann, von denen nur das eine, welches von 0 bis ε sich erstreckt, $=\frac{1}{2}\pi\cdot f_0$ ist, nach ⊙.) und J.); das andere aber $=0$ ist, nach ℂ.) und J.). — Und wenn die Stetigkeit innerhalb der Grenz-Werthe von β beliebig oft unterbrochen wird, so darf man nur das Integral (nach §. 24. I.) in eben so viele Theile zertheilt sich denken, um die letzteren alle $=0$, das erstere aber $=\frac{1}{2}\pi\cdot f_0$ zu haben.

L. Also gelten die Formeln ⊙.) und ℂ.) für jede beliebige stetige oder nicht stetige Funktion, welche statt f_β gesetzt werden mag.

In dem Ausdrucke T in A.), dessen Werth für $n=\infty$ wir eigentlich aufsuchen, nämlich in

*) Nur im Falle der Stetigkeit ist also $f_{\varepsilon-0}=f_{\varepsilon+0}=f_\varepsilon$.

1) $$\pi \cdot T = \int_{\pi+(-\pi)} u_z \cdot \frac{\sin(n+1)\cdot\frac{1}{2}(z-x)}{2\sin\frac{1}{2}(z-x)} \cdot dz,$$

ist aber u_z beliebig gedacht, stetig oder nicht stetig.

Dieses Integral T läßt sich nun zunächst (nach §. 24. I.) in zwei Integrale zerlegen, von denen das eine von $-\pi$ bis x, das andere von x bis $+\pi$ sich erstreckt. Nach §. 22. Anmerkg.) kann man aber diese letzteren beiden sogleich umformen, so daß man erhält

2) $$\pi \cdot T = \int_{0+-(\pi+x)} u_{x+z} \cdot \frac{\sin(2n+1)\cdot\frac{1}{2}z}{2\sin\frac{1}{2}z} \cdot dz + \int_{(\pi-x)+0} u_{x+z} \cdot \frac{\sin(2n+1)\cdot\frac{1}{2}z}{2\sin\frac{1}{2}z} \cdot dz,$$

oder, wenn man $\frac{1}{2}z = \beta$, also $dz = 2d\beta$ setzt, und wenn man ferner auf das erstere dieser Integrale die Formel $\int_{b+a} f \cdot dx = -\int_{a+b} f \cdot dx$ anwendet,

3) $$\pi \cdot T = \int_{\frac{1}{2}(\pi+x)+0} u_{x-2\beta} \cdot \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} \cdot d\beta + \int_{\frac{1}{2}(\pi-x)+0} u_{x+2\beta} \cdot \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} \cdot d\beta.$$

Betrachten wir zunächst das zweite dieser Integrale. Da x zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, so liegt $\frac{1}{2}(\pi-x)$ zwischen π und 0. Für $\frac{1}{2}(\pi-x) = 0$, d. h. für $x = \pi$ ist solches Integral, $= 0$. — Ist x Null oder positiv, aber zwischen 0 und π, so ist $\frac{1}{2}(\pi-x) < \frac{1}{2}\pi$; also ist (nach ⊙. J. und K.) dasselbe zweite Integral $= \frac{1}{2}\pi \cdot u_{x+0}$, wenn $n = \infty$ gedacht wird. — Ist aber x negativ, zwischen 0 und $-\pi$, also $\frac{1}{2}(\pi-x) > \frac{1}{2}\pi$, so zerlege man dasselbe zweite Integral (nach §. 24. I.) in die Summe zweier Integrale, von denen das eine zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegt, also für $n = \infty$ (nach ⊙. und J.) den Werth $\frac{1}{2}\pi \cdot u_{x+0}$ annimmt, das andere dagegen $= \int_{\frac{1}{2}(\pi-x)+\frac{1}{2}\pi} u_{x+2\beta} \cdot \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} \cdot d\beta$ ist. Setzt man in diesem letzteren $\pi - \beta = \gamma$, und wendet man noch den Satz an,

nach welchem $\int_{b+a} f \cdot dx = -\int_{a+b} f \cdot dx$ ist, so erhält man selbiges

$$= \int_{\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}(\pi+x)} u_{x+2\pi-2\gamma} \cdot \frac{\sin(2n+1)(\pi-\gamma)}{\sin(\pi-\gamma)} \cdot d\gamma.$$

Weil aber $\sin(\pi-\gamma) = \sin\gamma$ und, insofern n eine ganze Zahl ist, auch $\sin(2n+1)(\pi-\gamma) = \sin(2n+1)\gamma$ ist, so wird dieses letztere Integral

$$= \int_{\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}(\pi+x)} u_{x+2\pi-2\gamma} \cdot \frac{\sin(2n+1)\gamma}{\sin\gamma} \cdot d\gamma;$$

und solches wird nun wiederum für $n = \infty$ der Null gleich (nach C. J. und K.). Hiervon ist ausgenommen der Fall, wo $x = -\pi$ selbst ist, so daß die erstere Grenze $\frac{1}{2}(\pi+x), = 0$ wird, weil für diesen Fall das Integral (nach O. J. und K.) $= \frac{1}{2}\pi \cdot u_{x+2\pi-0}$ d. h. $= \frac{1}{2}\pi \cdot u_{\pi-0}$ wird.

Es ist also für alle Werthe von x, die zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen, und für $n = \infty$, das zweite Integral in 3.) $= \frac{1}{2}\pi \cdot u_{x+0}$; die beiden Grenzen $x = -\pi$ und $x = +\pi$ ausgenommen. Für $x = -\pi$ wird nämlich dasselbe $= \frac{1}{2}\pi \cdot u_{\pi+0} + \frac{1}{2}\pi \cdot u_{\pi-0}$ und für $x = +\pi$ wird dasselbe $= 0$, immer unter der Voraussetzung, daß $n = \infty$ ist.

Betrachtet man ganz auf dieselbe Weise das erstere der Integrale in 3.), so findet man zuletzt, daß solches für $n = \infty$ im Allgemeinen $= \frac{1}{2}\pi \cdot u_{x-0}$ wird, dagegen

für $x = -\pi$ in 0

und für $x = +\pi$ in $\frac{1}{2}\pi \cdot u_{\pi-0} + \frac{1}{2}\pi \cdot u_{-\pi+0}$

übergeht.

M. Folglich findet man aus 3.) für alle Werthe von x, die zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen, wenn $n = \infty$ gedacht wird,

$$T = \tfrac{1}{2}(u_{x-0} + u_{x+0}).$$

Für $x = -\pi$ und auch für $x = +\pi$ wird dagegen, immer unter der Voraussetzung, daß $n = \infty$ ist,

$$T = \tfrac{1}{2}(u_{\pi-0} + u_{-\pi+0}).$$

Man sieht daraus:

1) Ist u_x bei einem bestimmten Werthe von x stetig, also $u_{x-0} = u_{x+0} = u_x$, so geht T für $n = \infty$ genau in u_x über.

2) Für die Werthe von x dagegen, wo u_x discontinuirlich ist, und wo ein End-Werth u_{x-0} der erstern Form von u_x, und ein Anfangs-Werth u_{x+0} der andern Form von u_x existirt, wird T für $n = \infty$ die halbe Summe dieser beiden Werthe von u_x, die zu diesem bestimmten Werthe von x gehören.

3) An den Grenzen der Werthe von x, d. h. für $x = -\pi$ und für $x = +\pi$, wird T für $n = \infty$ nur dann $= u_x$ d. h. $= u_{-\pi}$, oder $= u_{+\pi}$, wenn die Funktion u_x die Eigenschaft hat, daß sie für $x = -\pi$ und für $x = +\pi$ einen und denselben Werth annimmt.

Also ist (nach A.) die Convergenz der Reihe III.) des §. 147.), so wie zugleich die Richtigkeit dieser Formel erwiesen, mit Berücksichtigung der gefundenen Ausnahmen an den Grenzen, und der Modifikation, welche für den Werth von x eintritt, an welchem die Funktion u_x discontinuirlich ist, und selbst zwei verschiedene Werthe hat; in welchem Falle die Reihe III.) des §. 147.) die halbe Summe dieser letztern liefert.

§. 149.

I. Denkt man sich nun eine beliebige Funktion u_x von $x = 0$ an bis zu $x = \pi$ hin, dann aber von $x = 0$ an bis $x = -\pi$ hin, eine andere, ebenfalls durch u bezeichnete Funktion, so daß für einerlei Werth von x, $u_{-x} = u_x$ wird, so ist für $u = 0$, doch noch $u_{x-0} = u_{x+0}$, obgleich (für $x = 0$) im Allgemeinen die Stetigkeit unterbrochen seyn wird. Unter der jetzigen Voraussetzung wird aber ferner

$$u_x \cdot \cos mx \cdot dx$$

für alle negativen Werthe von x bezüglich dieselben Werthe annehmen, wie für die gleichgroßen und positiven Werthe von x, während

$$u_x \cdot \sin mx \cdot dx$$

für die negativen Werthe von x zwar der Größe nach dieselben Werthe annehmen wird, wie für die gleich großen und positiven Werthe von x, jedoch allemal mit dem entgegengesetzten $\pm$ Zeichen. Deshalb ist jetzt (nach §. 24. II. und III.)

$$B_m = \frac{2}{\pi} \int_{x+0} u_x \cdot \cos mx \cdot dx \quad \text{und} \quad A_m = 0.$$

— Also geht aus III.) des §. 147.) wiederum die II.) des §. 147.) hervor, nur daß wir jetzt wissen, daß dieselbe auch noch für $x = 0$ und für $x = \pi$ gilt (weil $u_{-x} = u_{+x}$ gedacht worden ist) und für die Werthe von x, für welche u_x zwei Werthe u_{x-0} und u_{x+0} haben sollte, allemal noch richtig bleibt, wenn links unter u_x die halbe Summe dieser beiden Werthe verstanden wird. Und weil die Funktion u_x von $x = 0$ bis $x = \pi$ ganz beliebig gedacht worden ist, so gilt also die Gleichung II.) des §. 147.) für $x = 0$, für $x = \pi$ und für alle Werthe von x, welche zwischen 0 und π liegen, wenn auch u_x eine ganz beliebige Funktion von x vorstellt; nur für diejenigen Werthe von x, wo die Stetigkeit von u_x unterbrochen seyn sollte und wo zwei Werthe u_{x-0} und u_{x+0} existiren, muß links die halbe Summe dieser beiden Werthe gesetzt werden, wenn die Gleichung richtig verbleiben soll.

II. Denkt man sich wiederum u_x von $x = 0$ an bis $x = \pi$ ganz beliebig, dagegen von $x = 0$ an bis zu $x = -\pi$ hin so fortgesetzt, daß $u_{-x} = -u_x$ ist, so hat man $B_m = 0$ und $A_m = \frac{2}{\pi} \int_{x+0} u_x \cdot \sin mx \cdot dx$; und die III. des §. 147.) geht nun wieder in die I.) desselben §. 147.) über, so daß letztere für jedes u_x gilt, und für jedes x zwischen 0 und π; — aber im Allgemeinen nicht gilt für $x = 0$ und auch nicht für $x = \pi$. — An den Stellen endlich, wo u_x (zwischen $x = 0$ und $x = \pi$) ihre Stetigkeit verlieren sollte und wo zwei Werthe u_{x-0} und u_{x+0} von u_x existiren, da gilt sie nur, wenn zur

Linken unter u_x die halbe Summe dieser beiden Werthe verstanden wird.

§. 150.

Will man Reihen haben, die nach Sinus und Kosinus der vielfachen Bogen fortlaufen, welche aber eine Funktion u_x ausdrücken von $x = -a$ an bis zu $x = +a$ hin, so darf man nur in der III.) des §. 147.) einen neuen Veränderlichen y statt x einführen, so daß $y = \frac{ax}{\pi}$, oder $x = \frac{\pi y}{a}$ und $dx = \frac{\pi}{a} \cdot dy$ wird. Man erhält dann aus §. 147. III.) sogleich (nach §. 22. III.)

$$u_{\pi y:a} = \tfrac{1}{2}B_0 + B_1 \cdot \cos\frac{\pi y}{a} + B_2 \cdot \cos\frac{2\pi y}{a} + B_3 \cdot \cos\frac{3\pi y}{a} + \cdots$$
$$+ A_1 \cdot \sin\frac{\pi y}{a} + A_2 \cdot \sin\frac{2\pi y}{a} + A_3 \cdot \sin\frac{3\pi y}{a} + \cdots,$$

während

$$B_m = \frac{1}{a}\int_{a+(-a)} u_{\pi y:a} \cdot \cos\frac{m\pi y}{a} \cdot dy,$$

und

$$A_m = \frac{1}{a}\int_{a+(-a)} u_{\pi y:a} \cdot \sin\frac{m\pi y}{a} \cdot dy$$

ist; und diese Gleichung gilt, zwischen den durch $\frac{\pi y}{a} = -\pi$ und $\frac{\pi y}{a} = +\pi$ gegebenen Grenz-Werthen von y, d. h. von $y = -a$ bis zu $y = +a$ hin.

Weil aber u_x jede beliebige Funktion von x gewesen ist, so ist auch $u_{\pi y:a}$ jede beliebige Funktion von y, so daß man u_y selbst dafür setzen kann. Dies giebt aber, wenn man wieder x statt y schreibt:

$$\text{V.}\quad \begin{cases} u_x = \frac{1}{2}B_0 + B_1 \cdot \cos\frac{\pi x}{a} + B_2 \cdot \cos\frac{2\pi x}{a} + B_3 \cdot \cos\frac{3\pi x}{a} + \cdots \\ \qquad + A_1 \cdot \sin\frac{\pi x}{a} + A_2 \cdot \sin\frac{2\pi x}{a} + A_3 \cdot \sin\frac{3\pi x}{a} + \cdots, \\ \text{wenn} \quad B_m = \frac{1}{a}\int_{a+(-a)} u_x \cdot \cos\frac{m\pi x}{a} \cdot dx \\ \text{und} \quad A_m = \frac{1}{a}\int_{a+(-a)} u_x \cdot \sin\frac{m\pi x}{a} \cdot dx \quad \text{ist;} \end{cases}$$

und diese Formel ist gültig von $x = -a$ bis zu $x = +a$ hin. — An den Grenzen selbst, nämlich für $x = -a$ und für $x = +a$ giebt die Reihe zur Rechten jedoch nicht u_{-a} oder u_{+a}, sondern jedesmal $\frac{1}{2}u_{+a} + \frac{1}{2}u_{-a}$. Und an den Stellen, wo, wegen Unterbrechung der Stetigkeit, u_x zwei Werthe hat, u_{x-0} und u_{x+0}, da giebt die Reihe zur Rechten allemal die halbe Summe dieser beiden Werthe.

Aus dieser V.) folgt nun aber noch (nach §. 149.)

$$\text{VI.}\quad \begin{cases} u_x = \frac{1}{2}B_0 + B_1 \cdot \cos\frac{\pi x}{a} + B_2 \cdot \cos\frac{2\pi x}{a} + B_3 \cdot \cos\frac{3\pi x}{a} + \cdots \\ \text{wenn} \quad B_m = \frac{2}{a}\int_{a+0} u_x \cdot \cos\frac{m\pi x}{a} \cdot dx \quad \text{ist;} \end{cases}$$

und diese Formel gilt von $x = 0$ inkl. an, bis zu $x = a$ inkl. hin. — Ferner noch

$$\text{VII.}\quad \begin{cases} u_x = A_1 \cdot \sin\frac{\pi x}{a} + A_2 \cdot \sin\frac{2\pi x}{a} + A_3 \cdot \sin\frac{3\pi x}{a} + \cdots \\ \text{wenn} \quad A_m = \frac{2}{a}\int_{a+0} u_x \cdot \sin\frac{m\pi x}{a} \cdot dx \quad \text{ist;} \end{cases}$$

und diese Formel gilt von $x = 0$ exkl. an, bis zu $x = a$ exkl. hin.

§. 151.

Diese Reihen (I.—III. und V.—VII.) werden die Fourier'schen Reihen genannt, weil Fourier zuerst ihre hohe Wichtigkeit in den Anwendungen der Mathematik auf Physik geltend macht und ihre Natur näher kennen gelehrt hat. Man kann

ſie noch mannigfach umformen, und wir wollen hier noch einige dieſer Umformungen mittheilen.

Setzt man z. B. 2a ſtatt a in den Formeln VI.) und VII.), dann f_x ſtatt u_x, hernach $x = z + a$, alſo $dx = dz$, zuletzt aber ſtatt f_{z+a} wieder u_z, ſo erhält man ſogleich, wenn man noch lieber x ſtatt z ſchreibt

$$\text{VIII.} \quad \begin{cases} u_x = \frac{1}{2}B_0 + B_1 \cdot \cos\frac{\pi(x+a)}{2a} + B_2 \cdot \cos\frac{2\pi(x+a)}{2a} \\ \qquad\qquad + B_3 \cdot \cos\frac{3\pi(x+a)}{2a} + \cdots \\ \text{wenn} \quad B_m = \frac{1}{a}\int_{a\div(-a)} u_x \cdot \cos\frac{m\pi(x+a)}{2a} \cdot dx \quad \text{ist;} \end{cases}$$

und dieſe Formel iſt gültig von $x = -a$ inkl. an bis zu $x = +a$ inkl. hin; — ferner

$$\text{IX.} \quad \begin{cases} u_x = A_1 \cdot \sin\frac{\pi(x+a)}{2a} + A_2 \cdot \sin\frac{2\pi(x+a)}{2a} \\ \qquad\qquad + A_3 \cdot \sin\frac{3\pi(x+a)}{2a} + \cdots \\ \text{wenn} \quad A_m = \frac{1}{a}\int_{a\div(-a)} u_x \cdot \sin\frac{m\pi(x+a)}{2a} \cdot dx \quad \text{ist;} \end{cases}$$

und dieſe Formel iſt gültig von $x = -a$ exkl. an bis zu $x = +a$ exkl. hin.

Weil aber

$$\cos\frac{2\mu\pi(x+a)}{2a} = \cos\left(\frac{\mu\pi x}{a} + \mu\pi\right) = (-1)^\mu \cdot \cos\frac{\mu\pi x}{a}$$

$$\sin\frac{2\mu\pi(x+a)}{2a} = \sin\left(\frac{\mu\pi x}{a} + \mu\pi\right) = (-1)^\mu \cdot \sin\frac{\mu\pi x}{a},$$

und

$$\cos\frac{(2\mu+1)\pi(x+a)}{2a} = (-1)^{\mu+1}\sin\frac{(2\mu+1)\pi x}{2a}$$

$$\sin\frac{(2\mu+1)\pi(x+a)}{2a} = (-1)^\mu \cdot \cos\frac{(2\mu+1)\pi x}{2a}$$

iſt, ſo erhält man noch, wenn von den vorliegenden Reihen

VIII.) und IX.) die geraden Glieder von den ungeraden abgesondert werden:

$$\text{X.}\quad \begin{cases} u_x = \frac{1}{2}B_0 + B_2\cdot\cos\frac{\pi x}{a} + B_4\cdot\cos\frac{2\pi x}{a} + B_6\cdot\cos\frac{3\pi x}{a} + \cdots \\ \qquad + B_1\cdot\sin\frac{\pi x}{2a} + B_3\cdot\sin\frac{3\pi x}{2a} + B_5\cdot\sin\frac{5\pi x}{2a} + \cdots \\ \text{wenn} \quad B_{2\mu} = \frac{1}{a}\int_{a+(-a)} u_x\cdot\cos\frac{\mu\pi x}{a}\cdot dx \\ \text{und} \quad B_{2\mu+1} = \frac{1}{a}\int_{a+(-a)} u_x\cdot\sin\frac{(2\mu+1)\pi x}{2a}\cdot dx \quad \text{ist;} \end{cases}$$

und diese Formel gilt von $x = -a$ an inkl. bis zu $x = +a$ inkl. hin; ferner

$$\text{XI.}\quad \begin{cases} u_x = A_2\cdot\sin\frac{\pi x}{a} + A_4\cdot\sin\frac{2\pi x}{a} + A_6\cdot\sin\frac{3\pi x}{a} + \cdots \\ \qquad + A_1\cdot\cos\frac{\pi x}{2a} + A_3\cdot\cos\frac{3\pi x}{2a} + A_5\cdot\cos\frac{5\pi x}{2a} + \cdots \\ \text{wenn} \quad A_{2\mu} = \frac{1}{a}\int_{a+(-a)} u_x\cdot\sin\frac{\mu\pi x}{a}\cdot dx \\ \text{und} \quad A_{2\mu+1} = \frac{1}{a}\int_{a+(-a)} u_x\cdot\cos\frac{(2\mu+1)\pi x}{2a}\cdot dx \quad \text{ist;} \end{cases}$$

welche Formel gilt von $x = -a$ exkl. an bis zu $x = +a$ exkl. hin.

Anmerkung. Wir dürfen uns jedoch hier in weiteres Detail nicht einlassen. Wer von diesem neuen Gebiete der Analysis noch mehr kennen lernen will, und besonders die fruchtbaren Anwendungen dieser Reihen, den verweisen wir nicht bloß auf des Verfassers „Lehrbuch der Mechanik" 2ter Th. Anhang. Berlin 1837, und 3ter Theil Kap. XV., sondern in's Besondere auf die „théorie de la chaleur par Fourier"; à Paris 1822. (worin Fourier zuerst seine wichtigen Untersuchungen und Resultate umfangreicher mitgetheilt hat), so wie noch auf die „théorie mathematique de la chaleur" par Poisson; à Paris 1835.

Berlin, gedruckt bei Trowitzsch und Sohn.

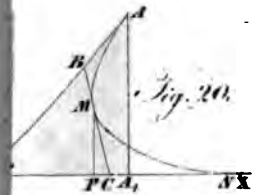


Fig. 20.

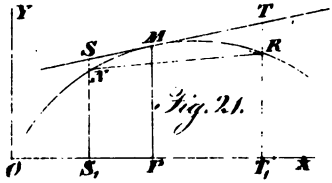
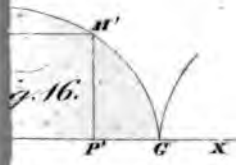


Fig. 21.



g. 16.

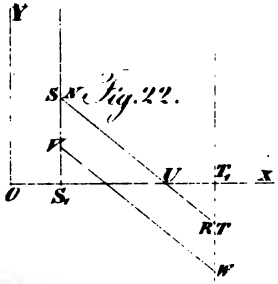
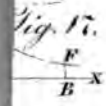


Fig. 22.



ig. 17.

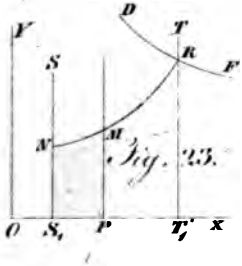


Fig. 23.

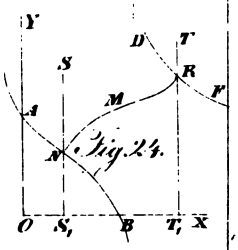


Fig. 24.

9.

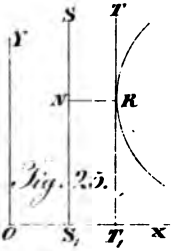


Fig. 25.

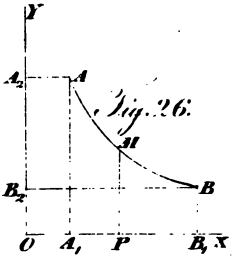
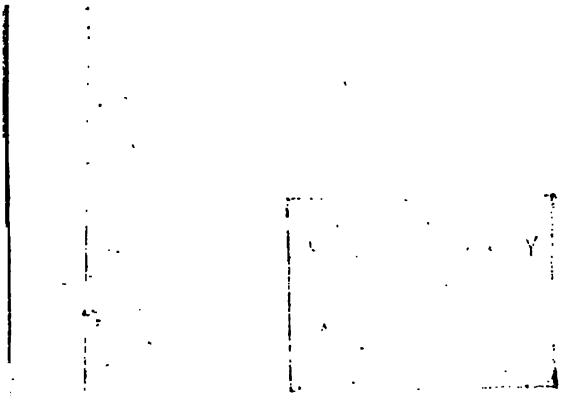
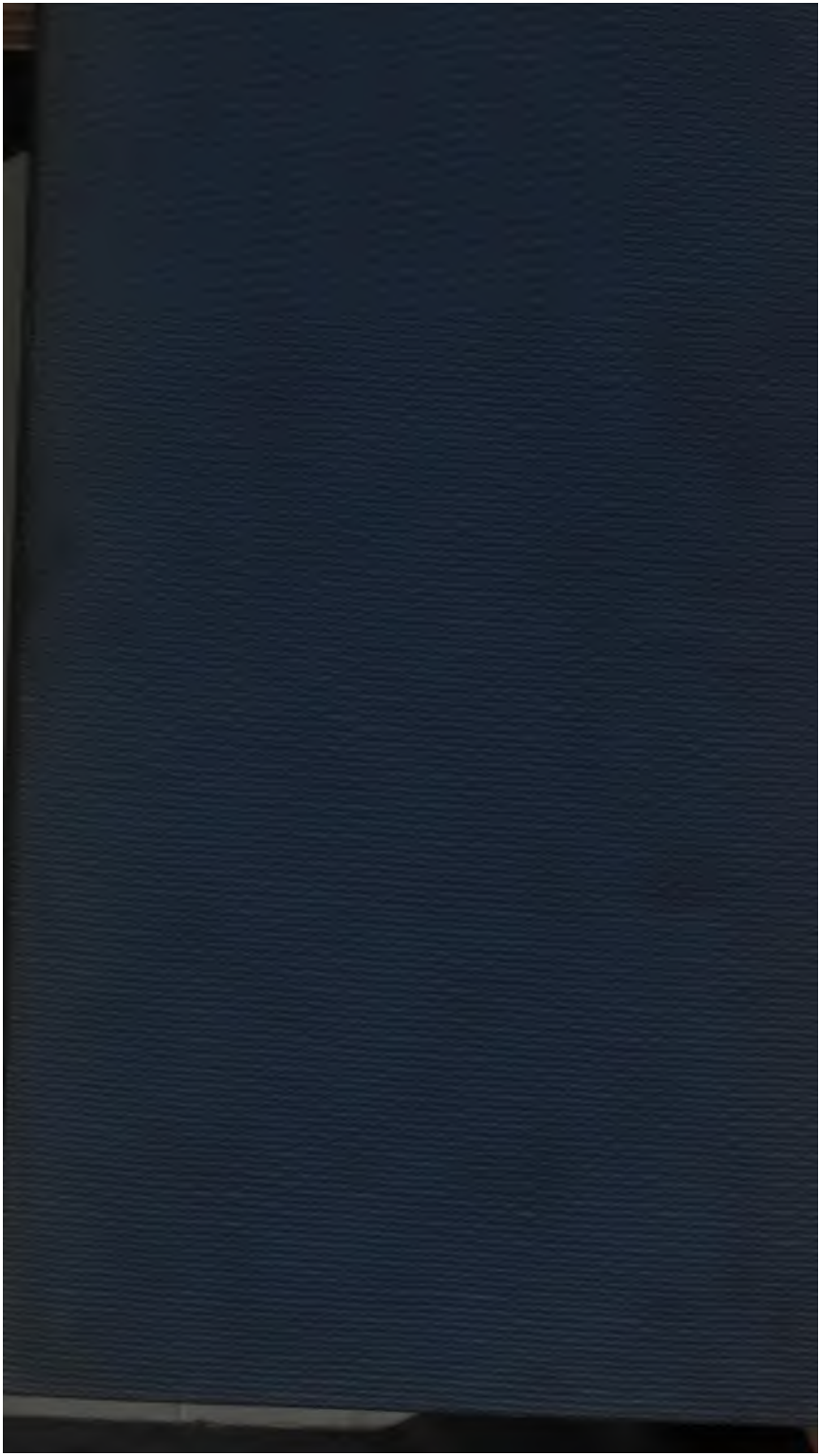


Fig. 26.


Y